統計試驗法(蒙特卡罗法)

及其在电子数字計算机上的实現

〔苏联〕H. П. 布斯連科 Ю. A. 施廖盖尔 著
王毓云 杜淑敏 譯
徐 鍾 济 等 校

上 海 科 学 技 术 出 版 社

內 容 提 要

本书敘述統計試驗法，即蒙特卡罗法的基本原理、应用及其在电子数字計算机上的实現．共九章．在引言中，对蒙特卡罗法的基本原理作了扼要的介紹．第一、二两章对应用蒙特卡罗法需用的随机数的产生和検定，以及模拟随机过程的簡单概型的实現作了分析介紹．三至八章介紹蒙特卡罗法的应用，包括积分計算，矩陣求逆及綫代数方程組的求解，微分方程边値問題，特征値与特征函数，反应堆計算，排队論等問題，分析了应用中的解題步驟，誤差估計，实現情况等．最后一章介紹使用蒙特卡罗法的专用数字計算机．本书可供計算数学工作者，以及有关工程技术人員参考．

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ
(МОНТЕ-КАРЛО) И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ НА
ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ
Н. П. Бусленко, Ю. А. Шрейдер
Физматгиз, 1961

統計試驗法(蒙特卡罗法)
及其在电子数字計算机上的实現
王毓云 杜淑敏 譯 徐鍾济等 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本850×1156 1/32 印張5 16/32 排版字数134,000
1964年11月第1版 1964年11月第1次印刷
印数 1—5,500

統一书号 13119·617 定价(科六) 0.85元

目　次

引　言

最近几年計算数学发展的基本情况可以用以下几件彼此紧密关联的事实予以說明：首先是高速数字計算机的广泛应用，其次是大运算量的算法在計算机上的实现，以及种种能在計算机上实现的新算法的研究.

統計試驗方法 在文献中称做蒙特卡罗法❶. 利用了这个方法，就有可能对一系列重要的問題，創造出一套十分适宜在数字計算机上实現的算法.

本书的主旨在于說明以蒙特卡罗法为基础的一套算法，同时叙述計算机上实現这套算法的基本方式.

蒙特卡罗法的基本思想是把各种随机过程的概率特征（随机事件的概率或随机变量的数学期望）与数学分析問題的解答（积分值，微分方程的解等等）联系起来.

这种联系的第一个有趣的例子是大家都知道的，这就是 Einstein 与 Smoluchowski 在研究中所发現的随机游动过程与描述扩散物质濃度变化的微分方程之間的联系. 經典的处理情况是把随机过程特征的确定变为一个分析問題的解，如是，就认为随机过程的研究在某种程度上已告終結. 此时，分析問題的解答，不管其困难程度如何，就形成了一个与前无关的独立研究阶段.

但重要的是与經典处理情况相反的情形，在文献[31]中，第一次注意到了这种情况. 这里不是去解分析問題，而是模拟随机过程，用数学期望或概率的統計估計值作为原分析問題的近似解.

所以，蒙特卡罗法就在于利用概率特征与分析計算問題之間

❶ 以下統計試驗法均称为蒙特卡罗法.——譯者注

的联系．这就是用实驗的方法确定相应的概率与数学期望值，来代替一系列复杂的分析公式的計算．由于有了快速电子数字計算机，这个方法得到了广泛的发展．

历史上第一个采用这一方法的例子，就是所謂 Buffon 問題．

在平面上画等距离的平行直綫簇，在此平面上投一枚針，問这一針与任一直綫相交的概率是多少？可以証明，这个概率等于

$$p=\frac{1}{\pi}.❶$$

能否从这里确定出数 π？要回答这个問題，首先应該在画有平行直綫的平面上实际地来投擲一枚針．于是就有

$$\frac{m}{n}\approx\frac{1}{\pi},\tag{0.1}$$

这里 n 是投擲針的总次数，m 是針与任一直綫相交的总数．从关系式(0.1)就可以算出 π．这是經过实驗証明的．其結果与已知的 π 值甚为符合．

为了引进实际計算問題的例子，我們来研究积分

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx$$

的計算．我們規定，函数 $f(x)$ 界于 0 与 1 之間，即当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$．

应当求出以曲綫 $y=f(x)$，x 軸，y 軸以及 $x=1$ 为边界的区域 G 的面积 S（見图 1），必須指出，由于比例尺度可以任意改变，对函数 $f(x)$ 的界定并不很重要．

設在正方形$(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$里，随机地投擲一个点，它的两个坐标在区間$(0,\ 1)$内是相互独立和均匀分布的．試求这个点落在曲綫下面的区域里的概率．显然，这事件的概率 p 与面积 S 的值相等．令$(\xi,\ \eta)$是任意取得的一点，因为 $0\leqslant\xi\leqslant 1$; $0\leqslant\eta\leqslant 1$，$(\xi,\ \eta)$点显然落在正方形内．

---

❶ 假設針的长度等于相邻二平行綫間的距离的 $\frac{1}{2}$．——譯者注

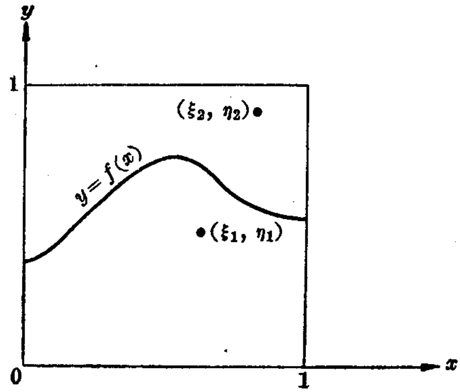

图 1

假設有某种方法得到均匀分布的独立变量 ξ 及 η. 取第一对变量 ξ_1, η_1, 檢查不等式

$$\eta_1 < f(\xi_1) \tag{0.2}$$

是否滿足, 假如滿足, 則投擲的随机点(ξ_1, η_1)便落在曲綫下的区域 G 里. 然后我們取許多的随机点(ξ_i, η_i), 并檢驗是否滿足不等式(0.2). 令滿足不等式(0.2)的点的总数为 m, 并除以所有点的总数 n, 就得到 $\frac{m}{n}$. 根据大数定律, $\frac{m}{n}$ 近似于点 (ξ, η) 落在区域 G 內的概率 p.

$\frac{m}{n}$ 就是所求积分的近似值.

現在来讲一讲如何估計蒙特卡罗法的精确度. 这一点对于以后决定应用的范圍极为重要. 假設模拟某一事件 A, 其出現的概率为 p.

我們用 δ_i 表示这样的变量, 卽若在第 i 次試驗出現事件 A, 則 δ_i 等于1, 若事件 A 不出現, 則 δ_i 等于零. 所以在試驗中, 事件 A 出現的次数等于

$$M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i,$$

其中 N 是总的試驗次数.

我們仅限于討論独立試驗的概型. 事件 A 出現的頻率等于 $\frac{M}{N}$, 它近似地按 Gauss 律❶分布, 其数学期望为

$$E\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{Np}{N}=p,$$

方差为

$$D\left[\frac{M}{N}\right]=\frac{p(1-p)}{N}.$$

因此, 变量 $\frac{M}{N}$ 以概率 0.997 满足条件(当 N 充分大时)

$$\left|\frac{M}{N}-p\right|<3\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}. \tag{0.3}$$

公式(0.3)的右端是对蒙特卡罗法計算事件 A 的概率的誤差估計.

从公式(0.3)可以看出, 降低誤差就意味着增加試驗次数, 也就是增加計算时間. 令公式(0.3)右端为 ε, 便有

$$N=\frac{9p(1-p)}{\varepsilon^2}, \tag{0.4}$$

假如精确度提高 10 倍, 則需延长解題的时間一百倍, 所以蒙特卡罗法不可能产生具有很高精确度的解. 如蒙特卡罗法不用特殊的加速收斂的方法, 就只能得到极大誤差为 0.01~0.001 的精确度.

以后会看到, 蒙特卡罗法很适宜于多維的問題, 这些問題通常对精确度的要求不高, 这样, 蒙特卡罗法的缺陷就不象初看起来那么严重.

設用蒙特卡罗法模拟随机变量 ξ, 目的是近似地确定其数学期望 $E[\xi]$.

令 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$ 为变量 ξ 在 N 次独立試驗中所取之値, 則

$$\bar{\xi}=\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_N}{N}$$

近似地按 Gauss 律分布. 其相应参数等于

❶ 对于充分大的 N.

$$E[\bar{\xi}]=E[\xi],$$

$$D[\bar{\xi}]=\frac{D[\xi]}{N}.$$

因此,有下面的估計(以 0.997 的置信水平):

$$|\bar{\xi}-E(\xi)|<3\sqrt{\frac{D[\xi]}{N}}. \tag{0.5}$$

在这种情况,解題时間与要求的精确度 ε 的平方成反比:

$$N=\frac{9D[\xi]}{\varepsilon^2}. \tag{0.6}$$

在解决具体問題时,为了估計誤差,可以用方差的統計估計值

$$\bar{D}=\frac{(\xi_1-\bar{\xi})^2+(\xi_2-\bar{\xi})^2+\cdots+(\xi_N-\bar{\xi})^2}{N-1}$$

来代替(0.6)式右端的理論值 $D[\xi]$, $\bar{D}$ 由模拟过程中的值

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_N$$

算出.

于是,蒙特卡罗法的精确度,只有在解題过程中才能予以很好的估計.

这个事实类似于物理实驗的精确度,它也只能根据实驗的結果才能可靠地确定.

必須指出,蒙特卡罗法还有一个特点是計算誤差的估計具有概率性质. 对于这个方法不能断言誤差不超过某值,而只能指出誤差以接近于 1 的概率不超过某界限. 特别,在(0.3)及(0.5)的估計式中,其概率等于 0.997. 如果利用电子計算机,則蒙特卡罗法与其他方法之間的原則性差别就某种意义来讲有所减小,因为任何一种方法由于机器本身的緣故都有产生誤差的概率. 此外,在計算方法中所应用的誤差估值,相当大的部分并不是对所有情形都正确,而只是对实际可能的情形是正确的. 也就是說,实质上是具有概率意义的,虽然方式比較隐蔽.

蒙特卡罗法計算的一般模型可以看作是某个 Марков 过程的

实現.

我們研究状态数有限和时間离散的 Марков 过程. 这过程是一个体系(以后用 Ω 表示), 它可以处于有限个状态 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ 中的任一个状态. 在离散时間序列的每一时刻, 体系 Ω 总处于其中一个状态. 我們用 $\omega(n)$ 表示第 n 个时刻体系 Ω 所处的状态. 如果在第 n 个时刻, 体系 Ω 处于状态 ω_i, 那么在下一个时刻它将以概率 p_{ij}(不依賴于 n) 轉移到状态 ω_j.

令状态 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_l$ 为体系 Ω 的特殊状态 ($l<m$), 这是指, 只要 Ω 轉移到其中一个状态, 体系将永远停留在那里. 在轉移概率語言中, 这就表示: 当 $i \leqslant l$ 时,

$$p_{ij}=\delta_{ij},$$

即

$$p_{ii}=1; \quad 若\ i \neq j, \quad 則\ p_{ij}=0,$$

此外, 对于每一个非特殊状态而言总存在一个正的概率, 使其經过若干时間之后轉移到一个特殊状态. 大家知道, 在这些条件下, 体系 Ω 經过若干时間轉移到一个特殊状态的概率为 1. 此外, 体系 Ω «生存» 的平均时間, 即体系轉移到一个特殊状态的时間总是有限的❶.

我們来証明这一点. 根据假設, 对于体系 Ω 的每一个非特殊状态 ω_i, 总能找到一个整数 n_i, 使得在开始时刻处于状态 ω_i 的体系 Ω 經过 n_i 步之后, 以概率 $p_i>0$ 轉移到一个特殊状态. 引进記号:

$$n=\max_i n_i,$$

$$p=\min_i p_i.$$

則通过 νn(ν 为整数) 步体系尙未轉移到特殊状态的概率不超过

❶ 自然, 体系 Ω«生存» 的时間依賴于体系的初始状态. 以后将按照所有初始状态来估計«生存»的平均时間的极大值.

$$(1-p)^{\nu}.$$

由此可知，体系《生存》的平均时間不超过

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu n[(1-p)^{\nu}-(1-p)^{\nu+1}]=\frac{n(1-p)}{p}.$$ ❶

以上所述的蒙特卡罗法的模型可描述如下. 設上述 Марков 过程在开始时刻处于状态 $\omega_{i_0}=\Omega(0)$. 过程从某一状态經过一系列状态的轉移以后，以概率 1 轉移到一个特殊状态. 过程的《生存》历史可写为轉移序列的格式

$$\Omega(0)\to\Omega(1)\to\cdots\to\Omega(n).$$

考慮与 Марков 过程有关的随机变量

$$\xi=\xi[\Omega(0),\ \Omega(1),\ \cdots,\ \Omega(n)],$$

它是过程历史的函数. 我們要确定此随机变量所取之值.

此后，我們将体系 Ω 返回到初始状态 ω_{i_0}，重新跟踪过程的历史. 这样試驗 N 次之后，我們将有随机变量 ξ 的 N 个值. 由于所有这些試驗是两两独立的，故随机变量 ξ 的算术平均值

$$\bar{\xi}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_i$$

与随机变量的期望值 $E(\xi)$ 相差很小. 以后研究的問題就是要建立这样的 Марков 过程，使其数学期望 $E(\xi)$ 恰恰是相应問題的解，而其值用蒙特卡罗法来計算.

除以上所讲外，还可以設想蒙特卡罗法的其他模型. 考慮下述的 Марков 过程，其中体系 Ω 从某一状态經过有限步轉移为任一其他状态的轉移概率均不为 0. 这样的过程显然沒有特殊状态. 我們研究随机变量 $\xi=\xi(\omega_i)$，它是 Марков 过程状态的函数.

因此(見[8])，随机变量 ξ 可能值的算术平均值

$$\bar{\xi}=\frac{1}{N}\{\xi[\Omega(0)]+\xi[\Omega(1)]+\cdots+\xi[\Omega(N)]\}$$

---

❶ 原书等式右端誤为 $\frac{n(1-p^2)}{p}$. ——校者

当 $N\to\infty$ 时趋近于随机变量 ξ 的数学期望，也就是說，我們得到了計算数学期望的方法．此数学期望是按下面的含义来理解的．在作了关于 Марков 过程的上述假定后，体系 Ω 从状态 ω_i 經过 n 步而轉移为状态 ω_j 的概率 $p_{ij}^{(n)}$，趋近于一个与初始状态无关的确定的极限：

$$\lim p_{ij}^{(n)}=\widetilde{p}_j.$$

我們称表示式

$$E(\xi)=\sum\xi(\omega_j)\widetilde{p}_j$$

为随机变量 ξ 的数学期望．

对于某些問題，特别是对于在边界上具有完全反射的随机游动問題(第七章)，結果正是按上述含义所理解的数学期望．

以上研究表明，蒙特卡罗法可以用来解决与 Марков 过程有关的且其解的精确度要求不高的問題．許多这样的問題在本书中都有叙述．

这些問題可以分为两类(象任何分类一样，这种分法在很大程度上是有条件的)：能以簡单的分析公式表达的問題，以及用随机过程的术語表达的問題．

第一种类型問題的困难主要在于形成与概率理論相当的模拟．第二种类型問題的困难在于从原来的概率过程轉换为便于在計算机上实现的近似的 Марков 鏈，这 Марков 鏈的状态数不应过分多(由于机器的存儲量的限制)，同时轉移到特殊状态的平均时間不宜太长(由于机器速度的限制)．

以下是第一种类型問題的例子：解綫性方程組，解椭圓型方程的边界問題，解具有边界条件的抛物型方程的 Cauchy 問題，求椭圓型微分算子的特征值，計算多重积分．

第二种类型問題的例子是：中子的散射問題，原子反应堆的計算問題，排队問題的研究，在輸入端具有随机影响的控制系統研究的問題，各种自学系統的模拟問題(这种問題在应用到具有复杂技

巧的生物系統的模型中已經予以解决).

应当指出，蒙特卡罗法的应用領域今后将会大大地扩充. 例如,本书中所叙述的随机游动問題,在原則上只能应用到抛物型或椭圓型綫性微分方程問題上. 然而对这种模型的研究不仅使我們能得到这类方程求解的方法，而且能够得到解的存在性以及解的性质. 自然,十分希望出現与方程有关的更普遍的概率模型,特别是关于描述連續介质的非綫性方程(如气体动力学方程,磁动力学方程等等). 除此而外,由于用微分方程的古典方法不能恰当地描述物理現象，这就使得連續介质(特别是流体动力学)的微分方程的研究遇到一系列的困难. 因此,可以預料,关于描述連續介质的这样的直接概率方法将会有所发展，利用这种方法能对問題进行定性的研究，同时又能建立与过程十分近似的 Марков 鏈，这种 Марков 鏈在現有的或将有的計算机上都是容易实現的.

特别是，用来描述量子力学和統計物理問題的所謂連續积分方法,其进一步的发展有可能就是这类直接描述的方法.

正如下面所指出的,計算机上模拟 Марков 鏈,必須在机器里面运用所謂随机数进行計算. 第一章研究了各种产生随机数的方法,然而所述很不完备，其目的仅在于指出經常采用的基本方法. 特别是书中沒有論及近年来基于数論方法而产生伪随机数的有效办法. 我們认为,蒙特卡罗法的基本內容,在于使实际計算問題轉化为便于在計算机上实現的 Марков 鏈的一整套方法和技巧. 从这一点来看，只要找到一些可能从相当一般的算法过渡到近似的 Марков 鏈的有效的普遍方法，那么就可以认为，已找到了蒙特卡罗法的完整形式.

第一章 在电子数字計算机上产生随机数

§1 問題的提出

与蒙特卡罗法的应用相联系的是模拟随机过程，为此就需要随机数.

实現一次随机过程模拟所需的随机数的数量，变动范圍是很大的. 簡单的問題估計要几千个，而对于复杂的問題，可能达到数十万个以上.

用蒙特卡罗法計算問題，絕大部分的运算工作都是用随机数进行运算的. 所以，只要有簡便經济的方法产生随机数，就可以大致断定能够应用蒙特卡罗法. 这样讲，是絲毫不带夸張的.

我們概略地討論一下产生随机数的最通用的几种方法.

作为生成各种随机元素的随机数总体，应該这样来挑选，使取得这种随机数所耗費的机器計算时間尽可能地小，同时，又能保証以后进行变换的簡便性.

通常认为，在区間$(0,1)$中均匀分布的随机数总体能滿足这些要求.

下面第二章中将表明，利用均匀分布的随机数，可以产生具有任意分布律的随机变量，也可以产生具有任意指定概率的随机事件.

現在温习一下均匀分布的基本性质.

我們說連續随机变量η在区間(a, b)内有均匀分布，如果其密度函数等于

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{当 } a\leqslant y<b, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases} \tag{1.1}$$

随机变量 η 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0 & (y<a),\\ \dfrac{y-a}{b-a} & (a\leqslant y<b),\\ 1 & (y\geqslant b).\end{cases} \tag{1.2}$$

数学期望 $M(\eta)$ 及均方差 σ_η 分别为

$$E[\eta]=\frac{a+b}{2},\quad \sigma_\eta=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{1.3}$$

經常碰到的情况是在区間(0, 1)内均匀分布:

$$f(y)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$F(y)=\begin{cases}0 & (y<0),\\ y & (0\leqslant y<1),\\ 1 & (y\geqslant 1).\end{cases} \tag{1.4}$$

其数学期望及均方差分别为

$$E[\eta^*]=\frac{1}{2},\quad \sigma_\eta^*=\frac{1}{2\sqrt{3}}. \tag{1.5}$$

考虑只取下面两个值的离散随机变量 z_i:

$$z_i=\begin{cases}1, & \text{概率为 } \dfrac{1}{2},\\ 0, & \text{概率为 } \dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

如象抛擲錢币,出現正面取 $z_i=1$, 出現反面則取 $z_i=0$.

假設有无穷序列 $z_1, z_2, \cdots$, 将这个由 0 与 1 組成的序列当作二进位符号来表示一个数 ξ, 那么 ξ 等于

$$\xi=z_1\cdot 2^{-1}+z_2\cdot 2^{-2}+\cdots+z_n\cdot 2^{-n}+\cdots,$$

这里的 ξ 便是随机数, 其值域为 $0\leqslant\xi\leqslant 1$. ξ 落在区間 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 中的概率为 $\dfrac{1}{2}$, 落在区間 $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 中的概率为 $\dfrac{1}{4}$; 落在区間 $\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$

中的概率为 $\frac{1}{8}$，一般，落在任一形如 $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ 的区間中的概率等于它的长度 $\frac{1}{2^n}$.

因此 ξ 就成为均匀分布的随机变量，于是我們得到了产生均匀分布随机变量的方法，其办法是取独立随机变量的无穷序列 $\{z_i\}$，同时用来作为某一数 ξ 的二进位符号.

严格地讲，計算机上根本得不到均匀分布的随机变量可能值的序列，因为数字計算机能提供的二进位数，其位数总是有限的.

假定設計計算机，它的特征是用 k 位二进位符号来表示数. 不同的数可以写在机器的 k 个单位里，总共能写出不同的数 2^k 个. 这样就能用只包含 2^k 个数的离散总体，来代替均匀分布的連續随机数的总体，这里 2^k 个数中出現其中任意一个的概率都相等.

这样得到的分布就叫做准均匀分布.

用 k 个二进位符号表示的数的总体为 $(0, 1, 2, \cdots, 2^k-1)$，从这个总体容易找到在区間 $(0, 1)$ 中准均匀分布的离散随机变量可能出现的数值 x_i，

$$x_i = \frac{i}{2^k-1}\text{❶} \quad (i=0, 1, 2, \cdots, 2^k-1). \tag{1.6}$$

---

❶ 在二进制計算机上，这种表示式要經过一个很費时的除法来实現. x_i 的一个比較容易实現而且自然的表示式是

$$x_i = \frac{i}{2^k} \quad (i=0, 1, 2, \cdots, 2^k-1), \tag{1.6'}$$

于是 $E[\xi]$ 和 $D[\xi]$ 亦有相应的修改：

$$E[\xi] = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{2^k-1}\frac{i}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}, \tag{1.9'}$$

$$D[\xi] = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{2^k-1}\left[\frac{i}{2^k} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{12}\,\frac{4^k-1}{4^k},$$

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{4^k-1}}{2^k}, \tag{1.11'}$$

可能出現数值 x_i 的概率显然为

$$p=\frac{1}{2^k}. \tag{1.7}$$

我們求出随机变量 ξ 的均方差和数学期望，

$$E[\xi]=\sum_{i=0}^{2^k-1}\frac{i}{2^k-1}\cdot\frac{1}{2^k}.$$

因

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}, \tag{1.8}$$

故有

$$E[\xi]=\frac{1}{2}. \tag{1.9}$$

为了求随机变量 ξ 的方差

$$D[\xi]=\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{2^k-1}\left[\frac{i}{2^k-1}-\frac{1}{2}\right]^2,$$

除(1.7)式以外，还要利用等式

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{1.10}$$

最后有

$$D[\xi]=\frac{1}{12}\,\frac{2^k+1}{2^k-1},$$

即

$$\sigma_\xi=\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2^k+1}{2^k-1}}. \tag{1.11}$$

容易看到，当 $k\to\infty$ 时，准均匀分布总体的均方差 σ_ξ 漸近地等于 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 因此，当 k 充分大时，σ_ξ 与 σ_η 之間的差别可以忽

(續上頁)

而 $\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}$ 与 k 之間的关系表(精确到小数点后四位)应改为

k	2	3	5	10	15
$\frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta}$	0.9682	0.9922	0.9995	0.9999	1.0000

——校者