



怎样绘制内力图

徐连顺 编



黑龙江科学技术出版社

责任编辑：范震威
封面设计：岳大地

怎样绘制内力图

徐连顺 编

黑龙江科学技术出版社出版

(哈尔滨市南岗区分部于28号)

绥化印刷厂印制·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米1/32·印张5 2/16·字数95千

1982年8月第一版·1982年8月第一次印刷

印数：1—10,000

书号：15217·042 定价：0.62元

前 言

内力图贯穿于整个材料力学的始终，是解决许多材料力学问题的一个关键内容。

掌握内力图并不是一件很难的事，但对初学者来说，往往感到很棘手。其主要原因之一，就是内力图虽然应用较多，但在目前的各种教科书中论述和例题都比较少，方法也比较单一。本书就是针对这个需要而编写的。

书中介绍了若干种作图的方法和步骤，并在介绍每种方法之后，列举了许多例题，以供读者在学习中参考。

书中在介绍用方程作图和用微分关系作图这部分占用的篇幅略长一些。用方程作图是个基本方法，应该熟练掌握。用微分关系作图方法较简单，速度快，不易出错，但有些人总觉得不如用方程作图好掌握。其实不然，本书就此列举了许多例题，建议读者不妨试一试。

书中力求做到语言通俗易懂，内容由浅入深。比方说，从求梁的支反力到作图与校核，凡是涉及到的问题，都一一作了说明。但由于水平所限，错误和缺点在所难免，敬请广大读者给予批评指正。

此稿曾请哈尔滨工业大学邹振祝等同志校核，并提出了不少宝贵意见。在编写过程中，还得到了有关领导和同志的热情关怀和支持，特此表示感谢！

编 者

一九八一年十月

目 录

第一章 轴力图

- § 1. 概述..... (1)
- § 2. 轴力..... (2)
- § 3. 轴力图..... (4)
- § 4. 习题详解..... (5)

第二章 扭矩图

- § 1. 扭矩..... (9)
- § 2. 扭矩图..... (11)
- § 3. 习题详解..... (11)

第三章 利用剪力方程与弯矩方程作梁的内力图

- § 1. 梁的类型..... (16)
- § 2. 支反力的计算..... (17)
- § 3. 梁的剪力和弯矩..... (19)
- § 4. 剪力方程和弯矩方程与梁的内力图... (22)
- § 5. 习题详解..... (23)

第四章 利用载荷、剪力和弯矩之间的微分 关系作梁的内力图

- § 1. 载荷、剪力和弯矩之间的关系..... (75)
- § 2. 载荷与剪力图和弯矩图的一般规律... (78)
- § 3. 习题详解..... (79)

第五章 利用叠加法作梁的内力图

- § 1. 叠加法..... (109)

§ 2. 习题详解·····	(109)
第六章 静不定梁的弯矩图	
§ 1. 静不定梁·····	(114)
§ 2. 求“多余”支反力·····	(114)
§ 3. 习题详解·····	(117)
第七章 较复杂问题的内力图	
§ 1. 具有中间铰梁的内力图·····	(125)
§ 2. 平面刚架的内力图·····	(130)
 附表 1 常见图形的面积及形心位置·····	 (143)
附表 2 等截面静定梁的支反力、 弯矩和内力图·····	 (145)
附表 3 等截面静不定梁的支反力、 弯矩和弯矩图·····	 (156)

第一章 轴 力 图

§ 1. 概 述

(a) 杆

材料力学的主要研究对象就是杆。通常我们把长度尺寸要比横向尺寸大得多的构件称之为杆，如机械零件中的螺栓，连杆和传动轴等。

我们又把通过杆横截面形心点的集合称之为轴线，若轴线为直线时则为直杆，反之为曲杆。

我们又把与杆轴线相垂直的截面称为横截面，截面相同的杆称为等截面杆，在工程上等截面的直杆是最常见的构件。

(b) 内 力

所谓内力是指物体内部一部分对另一部分作用所引起的力，这就是两部分之间的作用与反作用。物体在不受任何外力作用时内力也存在，这种内力能使固体保持一定的形状。假如构件受外力作用时将引起内力的改变；若外力增加时，内力也随着增加，我们把这种由外力而引起内力的改变称为附加内力，简称为内力。对于材料和截面尺寸都已确定的构件来讲，内力的大小不能超过一定的极限，否则构件就会被破坏。因此在研究杆件的强度时，首先应求出由外力引起的内力。

(c) 截面法

为了表示内力，我们假想地将一个物体用一平面截成两个部分，取任一部分为研究对象，并在截面上用内力代替另一部分对该部分的作用，然后建立平衡方程求出内力，此即所谓的截面法。截面法是材料力学中常用的一个基本方法，必须熟练地掌握。

§ 2. 轴 力

(a) 轴向拉伸与压缩

设有一等截面的直杆，若外力作用线通过轴线或外力的合力作用线通过轴线时，使之杆件产生轴向伸长或缩短的变形，称为简单拉伸或压缩变形。

若外力指向相背，如图 1—1 a 则为轴向拉伸；反之如图 1—1 b 则为轴向压缩。

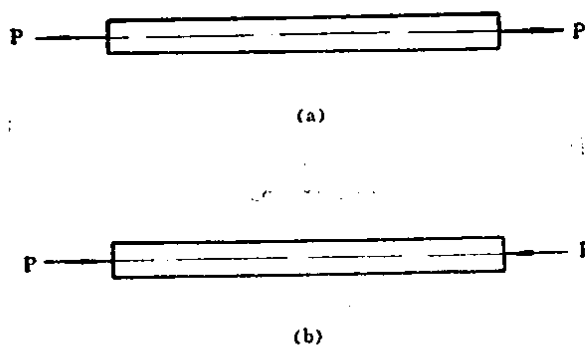


图 1—1

(b) 轴 力

为了说明轴力，我们取图 1—2 a 所示的拉杆为研究对象。

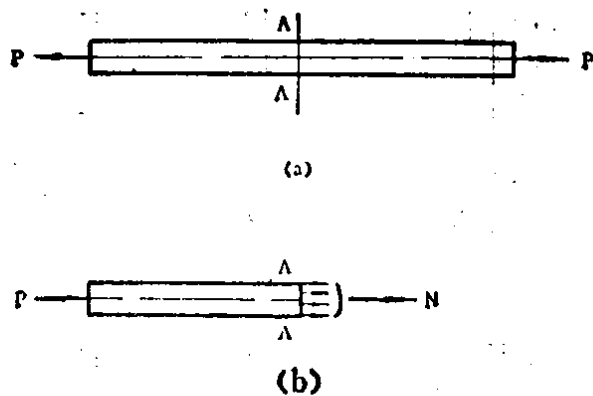


图 1—2

欲求横截面 A—A 上的轴力，可用截面法。

我们沿横截面 A—A 处假想地截开，取左、右任一段（如图 1—2 b 所示左段）来研究，因为杆处于平衡状态，故左段也应保持平衡。由此可见杆的 A—A 截面上必有内力存在，也就是右段对左段杆的作用力，根据材料均匀连续的假设，内力在截面上是连续分布的。我们把这分布力的合力用 N 表示，（如图 1—2 b 所示）。因外力 P 与内力 N 为共线力系，对于左段可建立平衡方程：

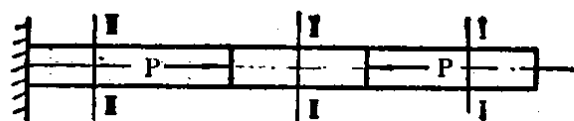
$$\sum X = 0 \quad N - P = 0$$

$$\text{得} \quad N = P$$

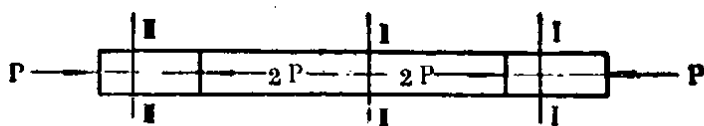
内力 N 的作用线与杆的轴线相重合，它只能使杆件产生轴向拉伸（或轴向压缩）变形。内力 N 即称为轴力。也就是在杆件截面一边所有外力沿轴线的投影的代数和。轴力的正负规定是依其所引起的变形而定的，即产生拉伸变形的内力为正，产生压缩变形的内力为负。

举例说明如下：

〔例 1—1〕有一构件受力如图 1—3 所示，试求 I—I，II—II 和 III—III 截面上的轴力。



(a)



(b)

图 1—3

解：先用截面法将指定各截面分段截开，然后建立平衡方程即可算得：

(i) I—I 截面之轴力 $N_1 = 0$

II—II 截面之轴力 $N_2 = P_{\text{压}}$

III—III 截面之轴力 $N_3 = 0$

(ii) I—I 截面之轴力 $N_1 = P_{\text{压}}$

II—II 截面之轴力 $N_2 = P_{\text{拉}}$

III—III 截面之轴力 $N_3 = P_{\text{压}}$

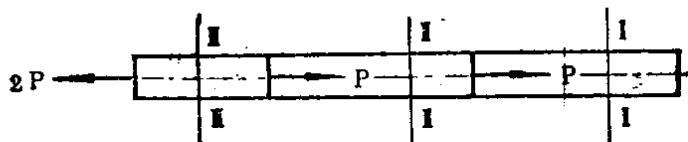
注：在列轴力平衡方程时，尽量取其外力较少的截面一边，这样在计算时比较方便。

§ 3. 轴力图

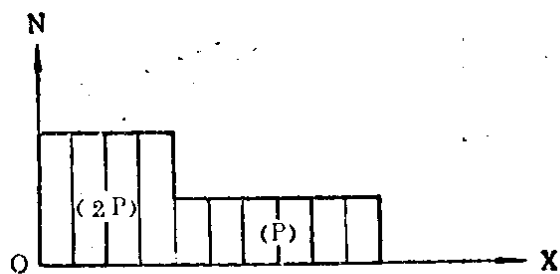
在杆件的强度计算中，为了找出最大应力所在截面，我们必须了解轴力沿轴线的变化规律。为此需要画出轴力沿杆长变化的规律图，即为轴力图。

轴力图的横坐标代表横截面的位置,用 x 表示;纵坐标代表作用在该截面上轴力的大小,用 N 表示,现举例说明如下:

〔题 1—2〕 试作图 1—4 a 所示杆件的轴力图。



(a)



(b)

图 1—4

解:先用截面法将外力之间分段截开,然后算出各段轴力的大小,即:

$$\text{I—I 截面 } N_1 = 0$$

$$\text{II—II 截面 } N_2 = P$$

$$\text{III—III 截面 } N_3 = 2P$$

也就是说,相应各段内不同位置的截面,轴力并不变化,于是可绘出轴力图如图 1—4 b 所示。

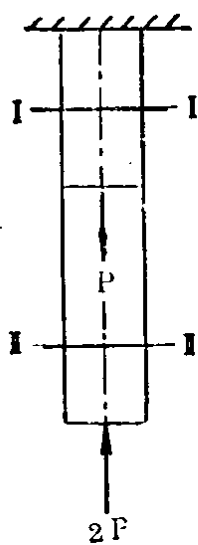
由图可见,最大轴力发生在 III—III 截面内,其值为 $2P$ 。

§ 4. 习题详解

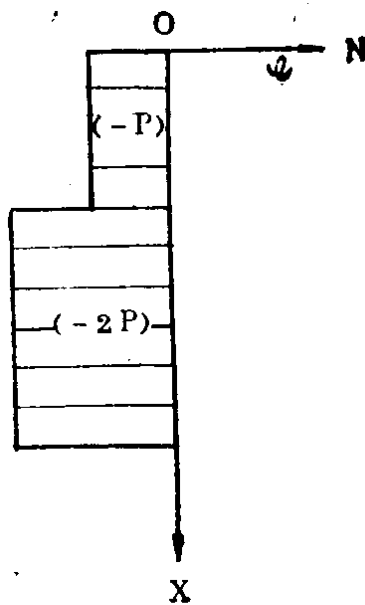
〔题 1—1〕 试绘图 1—5 a、b 所示杆件的轴力图。

解: (i) 用截面法分段算得:

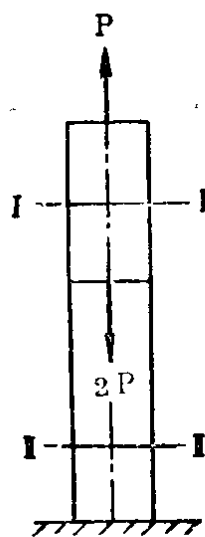
I—I 截面之轴力 $N_1 = 2P - P = P_{\text{压}}$



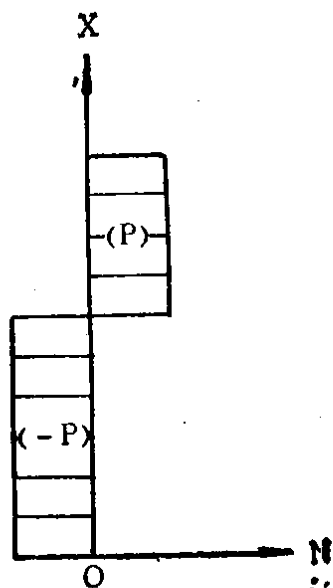
(a)



(c)



(b)



(d)

图 1—5

I—I 截面之轴力 $N_2 = 2P_{\text{压}}$

于是可绘出 (a) 杆的轴力图如图 1—5 c 所示。由图可见其最大轴力为 $2P$ ，并位于杆的下部。

(ii) 用截面法分段算得：

I—I 截面之轴力 $N_1 = P_{\text{拉}}$

II—II 截面之轴力 $N_2 = P_{\text{压}}$

于是可绘出 (b) 杆的轴力图如图 1—5 d 所示。

〔题 1—2〕 图 1—6 a 所示杆件考虑自重，其截面积为 F ，容重为 r_0 ，试绘该杆的轴力图。

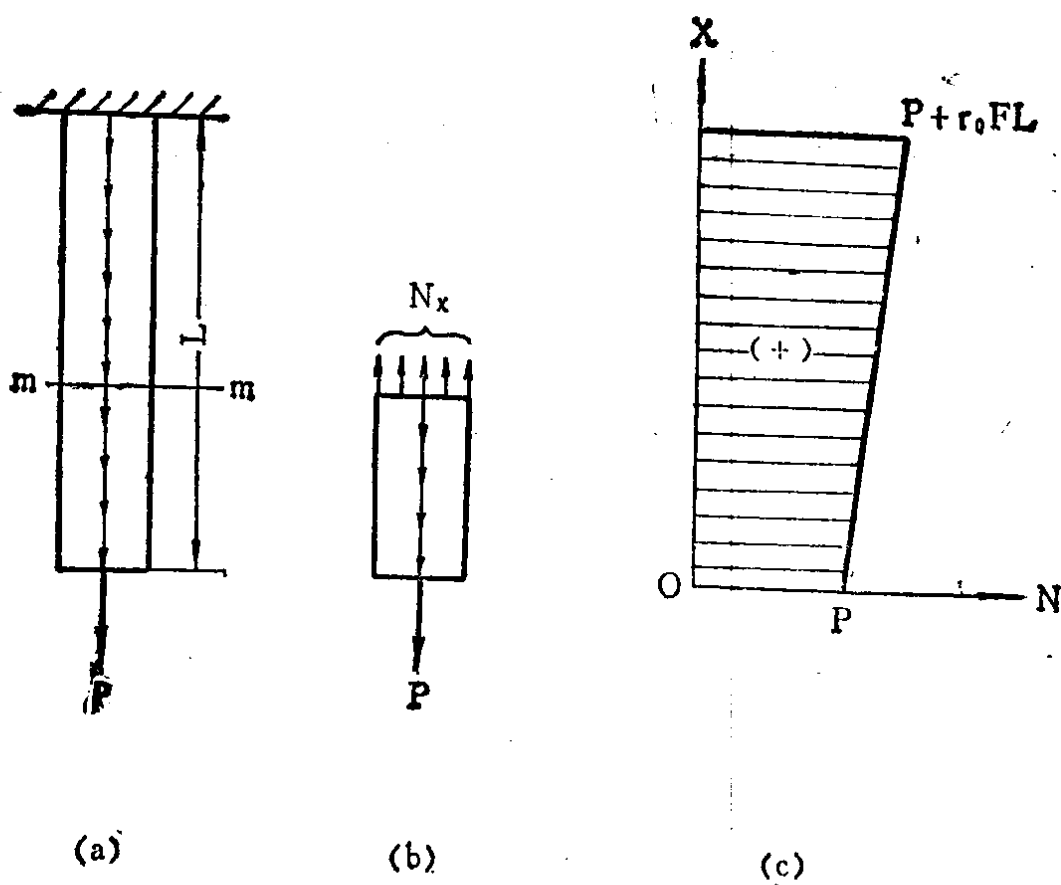


图 1—6

解： 在研究此杆时，应先考虑自重，当杆的上端固定

时，自重对杆的作用，即是沿杆的全长受有均布的轴向载荷，如图1—6a所示。

已知杆的截面积为 F ，长度为 L ，材料的单位体积重为 r_0 ，由自重引起的单位长度上的截荷即为：

$$N_0 = F r_0$$

若从 $m-m$ 处把杆截开，保留下一部分，如图1—6b所示。并用 N_x 代替上部分对下部分的作用，此时轴力即为：

$$N_x = P + F r_0 x$$

若当 $x = 0$ 时， $N = P$

若当 $x = L$ 时， $N = P + r_0 F L$

由此可知，此杆横截面上的轴力是沿杆长按直线规律变化的，于是便可绘出轴力图，如图1—6c所示。

第二章 扭 矩 图

§ 1. 扭 矩

扭转变形是构件的基本变形之一。在日常生活中我们所用的螺丝刀、钻头以及机器中的传动轴等，均属于发生扭转变形的构件。在这一类构件中只有等截面（实心或空心）圆杆的扭转问题能用材料力学的方法来解决。其它非圆截面的等截面直杆及变截面杆的扭转问题，需要用弹性力学或实验的方法来解决。

圆杆受扭时，在很多情况下，它所受的外力偶矩需经换算之后才知道。例如，已知圆轴传递的功率 N (KW)，或马力(HP)，轴的转速为 n 转/分(r.p.m)，则圆轴(杆)所受的外力偶矩，可用下式求得：

当 N 的单位为千瓦时，

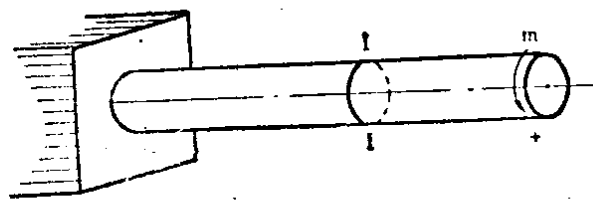
$$M = 97400 \frac{N}{n} \text{ (kg} \cdot \text{cm)} \quad (2-1)$$

当 N 为马力时，

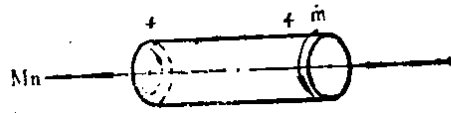
$$M = 71600 \frac{N}{n} \text{ (kg} \cdot \text{cm)} \quad (2-2)$$

这样在确定了外力之后，即可计算扭转时横截面上的内力，现取一圆截面直杆，如图2—1a所示。

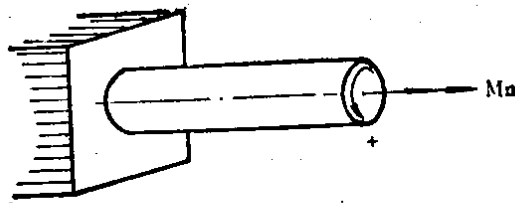
若在右端施加一外力偶矩 m ，则在固定端处对圆杆也作



(a)



(b)



(c)

图 2—1

用一个约束反力偶 m ，使杆处于平衡状态。为了求出内力，运用截面法在任意横截面 I—I 处将杆假想地截开，并取其右段为研究对象，截面上的力偶矩 M_n ，代表其左段对右段的作用，如图 2—1 b 所示。今考虑右段的平衡，由平衡方程式：

$$\sum m_x = 0 \quad M_n - m = 0$$

得： $M_n = m$

即 M_n 就是杆件横截面上的内力偶矩，也称为扭矩。

如果取其横截面的左段杆为研究对象，杆件的两部分在

I—I 截面所受的扭矩大小相等而转向相反。如图2—1c所示。

为了便于计算，并使同一截面两侧大小相等，转向相反的扭矩正负号一致，在材料力学中规定：

按右手螺旋法则，将扭矩用矢量表示。当矢量的方向离开截面时扭矩为正，指向截面时扭矩为负。

图2—1b、c所示的扭矩 M_x ，显然为正号。

§ 2. 扭矩图

有时在一根轴上作用着两个以上的外力偶矩，为了便于确定危险截面的位置，用一根与杆轴线平行的直线为横坐标表示截面的位置，以 x 表示；纵坐标表示相对应截面上的扭矩值，以 M_x 表示。我们把这种反映各横截面的扭矩值，随截面位置而变化情况的图形称为扭矩图。

§ 3. 习题详解

〔题2—1〕 有一传动轴如图2—2a所示，其转速为每分钟200转，从主动轮1输入功率为20KW，通过从动轮2、3分别输出的功率为15KW，5KW，试绘出轴的扭矩图。

解： 首先根据公式2—1算出各轮上的力偶矩：

$$m_1 = 97400 \times \frac{20}{200} = 9740 \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$$

$$m_2 = 97400 \times \frac{15}{200} = 7305 \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$$

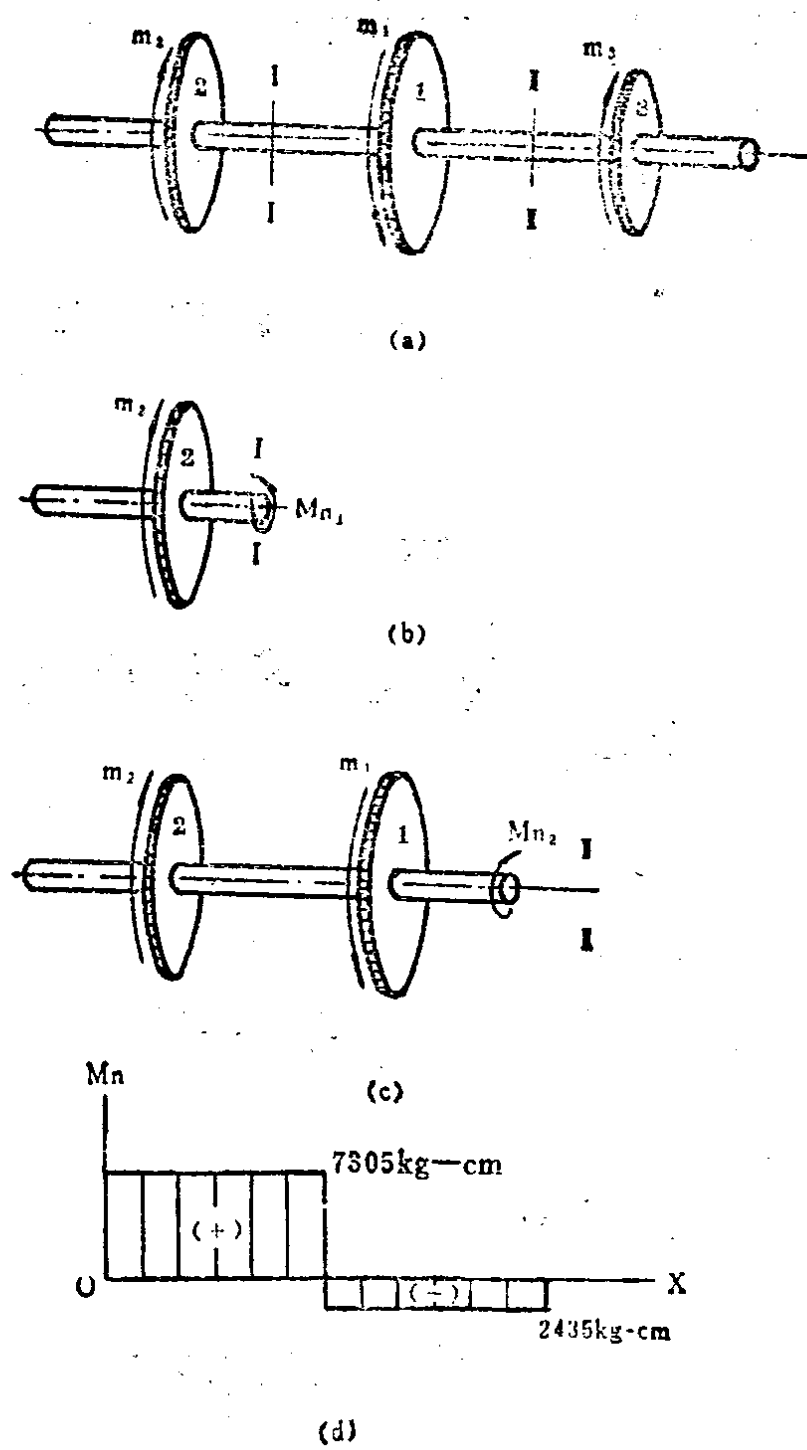


图 2—2

$$m_3 = 97400 \times \frac{5}{200} = 2435 \text{ (kg} \cdot \text{cm)}$$

然后利用截面法分别求出各段扭矩如下：