陈文灯教授主编 考研数学复习系列

②

数学题型集粹与同等水平测试

理工类

副主编 黄先开 贺新瑜
主编 陈文灯

2000版

世界图书出版公司

陈文灯教授主编考研**数学**复习系列 2

(2000版)

数学题型集粹与同等水平测试

理工类

主　编　陈文灯
副主编　黄先开　贺新瑜

世界图书出版公司
北京·广州·上海·西安
1999

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与同等水平测试(理工类)/陈文灯等主编. －北京:世界图书出版公司北京公司,1999.5

[陈文灯教授主编考研数学复习系列2(2000版)]

ISBN 7-5062-3720-2

Ⅰ.数…　Ⅱ.①陈…　②黄…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第06636号

书　　名: **数学题型集粹与同等水平测试(理工类)**

　　　　　[陈文灯教授主编考研数学复习系列2(2000版)]

主　　编: 陈文灯

副 主 编: 黄先开　贺新瑜

出　　版: 世界图书出版公司北京公司

印　　刷: 河北香河新华印刷有限公司

发　　行: 世界图书出版公司北京公司(北京朝阳门内大街137号,100010)

销　　售: 各地新华书店

开　　本: 787×1092　1/16　　印张:23　　字数:530千字

版　　次: 1999年5月第1版　　1999年5月第1次印刷

印　　数: 0001－10000

书　　号: ISBN 7-5062-3720-2/G·88

定　　价: 28.00元

前　　言

本书是我主编的《考研数学复习系列 数学复习指南(2000
篇。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书，将会
路，掌握各类题型的解题方法和技巧，大大提高做题的准确性和速度。

本书有以下特点：

(1)重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理，通过题型的形式予以强化，同时，指出解题的方法和技巧，尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题，按本书所指的思路、方法去分析将会迎刃而解。

(2)针对性强，覆盖面大。本书不是一般性的题解书，不搞题海战术，而是以题型为纲，通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题，总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。

(3)超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题系作者集多年的教学心得、并经几个不眠之夜思索而得的。读者通过做这些例题不仅可以将各知识点串在一起，而且可以拓展思路，遇到“从未见到”的题时，可以从容应对。

另外，本书还编写了数学(一)、数学(二)同等水平测试题各四套。这是演练题而不是考前的压题，读者复习完本书后，严格掌握在3小时内做完试题，然后测算自己的得分，以此了解自己的水平。

书后附录还给出1999年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学试卷及参考答案。

成书仓促，定有不当及错误之处，恳请广大读者、数学同仁批评指正。

陈文灯　陈文灯印

1999.5

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇*　概率论与数理统计初步

第一篇　高等数学

第一章　函数 · 极限 · 连续

§1　函　　数

一．有关函数概念的题型

题型Ⅰ　判别函数的等价性

【解题提示】 当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时，才表示同一函数，否则为不同函数．

【例 1.1】 设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to1}f(x)$，则与 $f(x)$ 等价的函数是(　　)．

(A) $y=\int_0^x(x^2-2x)\mathrm{d}x$　　(B) $y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t$

(C) $y=\int f'(x)\mathrm{d}x$　　(D) $y\overset{\bullet}{=}\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$

【解】 设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=l$，则 $f(x)=x^2+2xl$

两边取 $x\to1$ 时的极限，得 $l=1+2l\ \Rightarrow\ l=-1\ \Rightarrow\ f(x)=x^2-2x$

(A) $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同．

(B) $y=\int_0^1(x^2-2x)\mathrm{d}t=x^2-2x$

(C) $y=f(x)+C=x^2-2x+C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同．

(D) $y=\mathrm{e}^{\ln(x^2-2x)}$，定义域 $x<0$ 或 $x>2$，与 $f(x)$ 定义域不同，故(B)入选，实际做题时不必像以上那样处理，求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出(B)入选．

题型Ⅱ　利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

【解题提示】 一种是所谓“凑法”—— 将给出的表达式凑成对应符号 $f(\ \ )$ 内的中间变量的表达形式，然后用“无关特性”即可得出 $f(x)$ 的表达式．另一种方法是先作变量替换再用“无关特性”，然后通过联立方程得出 $f(x)$ 的表达式．多元函数也可以用这两方法处理．

【例 1.2】 求解以下各小题中的 $f(x)$ 表达式：

(1)　$f(x+\dfrac{1}{x})=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+1}+\sin(x^2+\dfrac{1}{x^2})+2,\quad |x|>1$

(2)　$f(\sin^2x)=\cos2x+\tan^2x,\quad 0<x<1$

注：带 * 章节，数二考生不必看．

【解】 (1)$f(x+\frac{1}{x})=\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-1}+\sin\left[(x+\frac{1}{x})^2-2\right]+2$

故 $\quad f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sin(x^2-2)+2$

(2)$f(\sin^2x)=1-2\sin^2x+\frac{1}{\cos^2x}-1=1-2\sin^2x+\frac{1}{1-\sin^2x}-1$

故 $\quad f(x)=-2x+\frac{1}{1-x},\quad 0<x<1$

【例 1.3】 设 $f(x)$ 满足方程:$af(x)+bf(-\frac{1}{x})=\sin x$,其中 $|a|\neq|b|$,求 $f(x)$.

【解】 令 $t=-\frac{1}{x}$,则 $x=-\frac{1}{t}$,于是原方程变为 $\quad bf(t)+af(-\frac{1}{t})=-\sin\frac{1}{t}$

由“无关特性”得 $\quad bf(x)+af(-\frac{1}{x})=-\sin\frac{1}{x}$

解联立方程组 $\begin{cases} af(x)+bf(-\frac{1}{x})=\sin x \\ bf(x)+af(-\frac{1}{x})=-\sin\frac{1}{x} \end{cases}$

得 $\quad f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(a\sin x+b\sin\frac{1}{x})$

【例 1.4】 设 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2+\cos(xy)$,求 $f(x,y)$.

【解】 令 $u=x+y,v=\frac{y}{x}\Rightarrow x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v}$,则

$$f(u,v)=(\frac{u}{1+v})^2-(\frac{uv}{1+v})^2+\cos\frac{u^2v}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}+\cos\frac{u^2v}{(1+v)^2}$$

故 $\quad f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}+\cos\frac{x^2y}{(1+y)^2},\quad (y\neq-1)$

二. 函数的性质

题型Ⅲ 函数奇偶性的判别

【解题提示】 判别函数奇偶性的方法:(1)主要依据奇偶性的定义.有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶函数之积为偶函数;偶数个奇函数之积为偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.(2)$f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.(3)函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性:

(1) $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2) $F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$,其中 $f(x)$ 是连续函数.

(3) $F(x)=\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)f(x)$,其中 $a>0,a\neq1$,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且对任何 x,y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

【解】 (1) $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令t=-u}\int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u)\xlongequal[偶函数]{f(x)为}-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$

$\because\quad F(x)+F(-x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$

$\therefore\quad F(x)$ 为奇函数.

(2) $\quad F(x)=f(x)+\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \qquad ①$

$F(-x)=f(-x)+\int_0^{-x}\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \qquad ②$

$\because\quad f(x)$ 为奇函数 $\quad\therefore f(x)+f(-x)=0 \qquad ③$

又 $\because\quad \int_0^{-x}\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \xlongequal{令 u=-v} \int_0^x\left[\int_0^{-v} f(t)\mathrm{d}t\right](-\mathrm{d}v)=-\int_0^x\left[\int_0^{-u} f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \qquad ④$

由 ①,②,③,④ 得

$$F(x)+F(-x)=\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-u} f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=\int_0^x\left[\int_{-u}^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u=0$$

故 $\quad F(x)$ 为奇函数.

(3) $\quad$ 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$

$\because\quad g(x)+g(-x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{a^{-x}}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{a^x}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}=0$

$\therefore\quad g(x)$ 为奇函数.

又 $\because\quad f(x+y)=f(x)+f(y)$,令 $y=0$,得 $f(x)=f(x)+f(0)\ \Rightarrow\ f(0)=0$

又 $\quad$ 显然有 $0=f(0)=f[x+(-x)]=f(x)+f(-x)$

$\therefore\quad f(x)$ 为奇函数.

故 $\quad F(x)=g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 Ⅳ　求解给定函数的周期或周期性证明

【解题提示】 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明

【例 1.6】 设 $f(x)$ 是以 $T>0$ 为周期的函数,证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】 令 $F(x)=f(ax)$,由于

$$F\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)\xlongequal[f(x)\text{ 的周期}]{\because T\text{ 是}}f(ax)=F(x)$$

故 $\quad\dfrac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】 设函数 $y=f(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形与 $x=a,x=b$ 均对称$(a\neq b)$,求证:$y=f(x)$ 是周期函数,并求其周期.

【证】 由题设有 $f(a+x)=f(a-x),f(b+x)=f(b-x)$

于是,$f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]$

$\qquad=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$

故 $f(x)$ 是周期函数,其周期 $T=2(b-a)$.

题型 Ⅴ　函数 $f(x)$ 在某区间 Ⅰ 上单调性的判别

【解题提示】 若没有言明函数 $f(x)$ 可导,则用单调性定义判别;若言明函数 $f(x)$ 可导,则利用函数的一阶导数判别.

【例1.8】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，证明 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内单调增加.

【证】 $F'(x)=-\dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{f(x)}{x-a}=-\int_a^x\dfrac{f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t+\int_a^x\dfrac{f(x)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t$

$$=\int_a^x\frac{f(x)-f(t)}{(x-a)^2}\mathrm{d}t$$

$\because$ $(x-a)^2>0$ $f(x)$ 单调上升，当 $x>t$ 时，$f(x)-f(t)\geqslant 0$

$\therefore$ $F'(x)\geqslant 0$，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

题型 Ⅵ 函数有界性的判别

【解题提示】 证明或判别函数有界性的思路：

(1) 利用有界性定义.

(2) 闭区间上连续函数的有界性.

(3) 有极限数列必有界.

(4) $x\to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域中必有界.

【例1.9】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$（$l$ 为有限数），试证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【证】 $\because$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$， $\therefore$ 对于取 $\varepsilon=\dfrac{|l|}{2}$，$\exists X>0$

当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-l|<\dfrac{|l|}{2}$

又 $|f(x)-l|>|f(x)|-|l|$ 所以 $|f(x)|-|l|<\dfrac{|l|}{2}$

即 $|f(x)|<\dfrac{3}{2}|l|$

$\because f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，由闭区间上连续函数有界性，可知 $\exists S$，使 $|f(x)|<S$，$x\in[a,X]$.

取 $M=\max\left\{S,\dfrac{3}{2}|l|\right\}$，则对 $\forall x\in[a,+\infty)$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$

即函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

【例1.10】 试证 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

【证】 令 $g(x)=\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

$\because$ $g(-x)=\displaystyle\int_0^{-x}t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\xlongequal{令u=-t}\int_0^x -u\mathrm{e}^{(-u)^2}(-\mathrm{d}u)=\int_0^x u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u$

$\therefore$ $g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}g(x)$ 也为偶函数，所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界即可.

$$\because\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t\,\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 对于取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，$\exists X>0$，当 $x\in[X,+\infty)$ 时，有

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}, \quad 即 \quad 0<f(x)<1$$

又 $f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续，于是，$\exists l>0$，使对 $\forall x\in[0,X]$，恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant l$，取 $M=\max\{1,l\}$，则 $\forall x\in[0,+\infty)$，有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$. 同理可证 $(-\infty,0]$ 的情形，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

三. 复合函数

【解题提示】 将两个或两个以上函数进行复合，通常有三种方法：代入法（适用于初等函数的复合），分析法（适用于初等函数与分段函数的复合，或两分段函数的复合），图示法（适用于两分段函数的复合）

【例 1.11】 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

【解】 $$f[f(x)]=\frac{1}{1-f^2(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}=\frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{1}{1-\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2}=\frac{f^2(x)}{f^2(x)-1}=\frac{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1-x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{x^2(2-x^2)}$$

【例 1.12】 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n次}$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

【解】 $$f_2(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=\frac{f_2(x)}{\sqrt{+2f_2^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

比较以上两式可知 $\quad f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ （由数学归纳法可证.）

于是 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin[f_n(x)]=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}=\dfrac{x}{|x|}$

【例 1.13】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\ x & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ x^2-1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)} & \varphi(x)<1\\ \varphi(x) & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$$

1) 当 $\varphi(x)<1$ 时

或 $x<0,\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases} \Rightarrow \quad x<-1$

或 $x\geqslant 0,\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases} \Rightarrow \quad 0\leqslant x<\sqrt{2}$

2) 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时

或 $x<0,\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases} \Rightarrow \quad -1\leqslant x<0$

或 $x \geqslant 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geqslant 1$，即 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x \geqslant \sqrt{2}$

综上所述，有 $\quad f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x+2 & 0 < x \leqslant -1 \\ e^{x^2} - 1 & 0 \leqslant x < \sqrt{2} \\ x^2 - 1 & x \geqslant \sqrt{2} \end{cases}$

【例 1.14】 设 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + |x|), \varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

【解】 图示法的解题程序：1° 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图象；2° 将 $y = f(u)$ 的分界点在 x_0u 坐标面上画出（这是若干条平行于 x 轴的直线）；3° 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间；4° 将 3° 所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|] \qquad ①$$

作出 $u = \varphi(x)$ 的图像，图 1.1 所示，以及 $f(u) = \dfrac{1}{2}(u + |u|)$ 的分界点 $u = 0$ （$x - u$ 平面上的 x 轴）

当 $x < 0$ 时 $\quad u = x, (u < 0)$

当 $x \geqslant 0$ 时 $\quad u = x^2, (u \geqslant 0)$

将以上所得结果代入 ① 式，得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geqslant 0 \end{cases}$

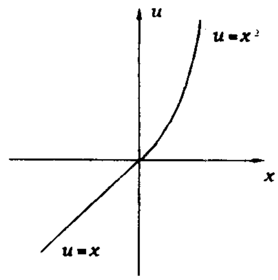

图 1.1

§ 2 极　　限

一． 数列的极限

题型 I　已知数列的前几项数值及通项的表达式，求数列的极限

【解题提示】 或者利用单调有界数列必有极限定理求解（求解程序：① 判断极限的存在性 $\begin{cases} \text{单调性} \\ \text{有界性} \end{cases}$，方法可用数学归纳法或不等式的放缩法；② 先令 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$，然后通过解关于 l 的方程，求得 l 的值，从而得极限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$）. 或者利用数列极限的定义求解（先令 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$，然后在通项的两边取极限得出 l 的数值，再证 $\lim\limits_{x_n}$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量）.

【例 1.15】 设 $x_1 = 2, x_2 = 2 + \dfrac{1}{x_1}, \cdots, x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$，求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

【解】 令 $\quad \lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$，在 $x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \to \infty$ 时的极限

$\Rightarrow l = 2 + \dfrac{1}{l} \quad \Rightarrow \quad l^2 - 2l - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad l = 1 \pm \sqrt{2}$

$\because$ 由题设可知 $x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n} > 2 \quad \therefore \quad l = 1 + \sqrt{2}$

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在：

$$|x_n - l| = \left|(2+\frac{1}{x_{n-1}}) - (2+\frac{1}{l})\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|x_{n-1}-l|}{lx_{n-1}}(\because x_{n-1} = 2+\frac{1}{x_{n-2}} > 2,$$

$$l = 2+\frac{1}{l} > 2) < \frac{|x_{n-1}-l|}{4} < \frac{|x_{n-2}-l|}{4}\Big/4 = \frac{|x_{n-2}-l|}{4^2} < \frac{|x_{n-3}-l|}{4^3} < \cdots < \frac{|x_1-l|}{4^{n-1}}$$

$$= \frac{|2-(1+\sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1-\sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}}$$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}} = 0 \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}(x_n - l) = 0$$

故 $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}+1$

【例 1.16】 设 $x_1 = 1, x_2 = 1+\dfrac{x_1}{1+x_1}, \cdots, x_n = 1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【解】 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$，在 $x_n = 1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限，

$$\Rightarrow l = 1+\frac{l}{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$ 由题设可知 $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

以下证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在：

$$|x_n - l| = \left|\left(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) - \left(1+\frac{l}{1+l}\right)\right|$$

$$= \frac{|x_{n-1}-l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|} < \frac{|x_{n-1}-l|}{2(1+l)} < \cdots < \frac{|x_1-l|}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} = 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}(x_n - l) = 0$$

故 $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【另解】 由题设可知 $x_n > 0 \quad (n = 1,2,\cdots)$

$x_2 - x_1 = (1+\dfrac{x_1}{1+x_1}) - 1 = \dfrac{x_1}{1+x_1} > 0.$ 于是，$x_2 > x_1$

设 $x_n > x_{n-1}$

则 $x_{n+1} - x_n = (1+\dfrac{x_n}{x_n+1}) - (1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}) = \dfrac{x_n}{1+x_n} - \dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$

$$= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} > 0$$

故 $\{x_n\}$ 单调增加.

$\because x_n = 1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(\because x_{n-1} > 0) < 2 \quad \therefore \{x_n\}$ 有界.

故 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设其为 l，于是

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})$，即 $l = 1+\dfrac{l}{1+l} \quad\Rightarrow\quad l = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，由题设可知 l 非负.

故 $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【例 1.17】 设 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{a}{x_n})$，其中 $a > 0, x_0 > 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

【证】 $\because x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geqslant\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$, $\therefore\{x_n\}$ 有界

又 $\because \frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^2})\leqslant\frac{1}{2}(1+\frac{a}{(\sqrt{a})^2})=1$, $\therefore\{x_n\}$ 单减

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在， 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$， 则由

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，可得 $l=\frac{1}{2}(l+\frac{a}{l})\Rightarrow l=\sqrt{a}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$

注：单调数列的极限既可用极限定义法，又可用单调有界数列必有极限的定理去求解．若数列不单调则只能用极限的定义法．

题型 Ⅱ 求解 $n\to\infty$ 时，n 项和的极限

【解题提示】 方法有：(1) 特殊级数求和法．(2) 利用幂级数求和法．(3) 利用定积分定义求极限．(4) 利用夹逼定理．

若数列的每一项可提出一个因子$\frac{1}{n}$，剩余的可用一个通式表示，则用定积分定义求解数列的极限；若数列的各项虽可提出一个因子$\frac{1}{n}$，而剩余的不能用一个通式表示，但其各项是按递增或递减排列的，则用夹逼定理求极限．

【例 1.18】 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{1/n}}{n+1}+\frac{2^{2/n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{n/n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

【解】 (1) 因为每一项中提出$\frac{1}{n}$后，剩余各项不能用一个通项表示出来．因此不能用定积分定义求解．

$$1<\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\to 1\quad(n\to\infty)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}\right)=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

(3) $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\leqslant\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(2^{\frac{1}{n}})^i\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\ln 2}$$

【例 1.19】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}$.

【解】 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}$

$\because \quad \dfrac{i^2}{n^2}\leqslant\dfrac{i^2+1}{n^2}\leqslant\dfrac{(i+1)^2}{n^2}$

$\therefore \quad \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$

又 $\because \quad \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{1+\dfrac{(n+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{(i+1)^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+(n+1)^2}=\arctan x\Big|_0^1+0=\dfrac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$, 故 原极限 $=\dfrac{\pi}{4}$

题型 Ⅲ 求 $n\to\infty$ 时，n 项乘积的极限

【解题提示】 解法有：(1) 分子，分母同乘以一个因子，使之出现连锁反应；(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式，在整个相乘过程中间项相消，从而化简为易求极限形式；(3) 利用夹逼定理；(4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

【例 1.20】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\dfrac{1^2}{n^2})(1+\dfrac{2^2}{n^2})(1+\dfrac{3^2}{n^2})\cdots(1+\dfrac{n^2}{n^2})\right]^{\frac{1}{n}}$.

【解】 (1) $\because \dfrac{k^3-1}{k^3+1}=\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$

又 $\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{k+1}=\dfrac{2}{n(n+1)}$, $\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\dfrac{n^2+n+1}{3}$

$\therefore$ 原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n(n+1)}\cdot\dfrac{n^2+n+1}{3}=\dfrac{2}{3}$

(2) $\because$

$$\left.\begin{array}{l}1\cdot 3<2^2\\ 3\cdot 5<4^2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ (2n-1)(2n+1)<(2n)^2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow 1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots 2n<2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2\\ \Rightarrow 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1}<2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Rightarrow 0<\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\end{array}$$

又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$

故 由夹逼定理,原极限 $=0$

(3) 取对数得$\dfrac{1}{n}\left[\ln(1+\dfrac{1^2}{n^2})+\ln(1+\dfrac{2^2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\dfrac{n^2}{n^2})\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\dfrac{i^2}{n^2})\cdot\dfrac{1}{n}$

两边取 $n\to\infty$ 时的极限,得

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i^2}{n^2})\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=\ln2-2\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x=\ln2+\frac{\pi-4}{2}$$

故原极限 $=\mathrm{e}^{\ln2+(\pi-4)/2}=\mathrm{e}^{\ln2}\cdot\mathrm{e}^{(\pi-4)/2}=2\mathrm{e}^{(\pi-4)/2}$

题型Ⅳ 通项为积分形式的数列的极限

【解题提示】 注意:一般地$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_a^b[\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)]\mathrm{d}x$,求解$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 的方法:(1) 利用不等式放缩法对 $I_n=\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 进行估值,再用夹逼定理求极限.(2) 利用积分中值定理求极限.

【例 1.21】 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^1\dfrac{\cos2t}{4t^2}\mathrm{d}t$

【解】 (1) $\because$ 在$[0,1]$上,$x^n\geqslant0$,且$\dfrac{1}{1+x}$连续

$$\therefore\quad 0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}$$

其中 $0\leqslant\xi\leqslant1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$ 其中 $\varepsilon>0$ 为任意正数

而 $0<\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x=\sin^n\xi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\mathrm{d}x=(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon)\sin^n\xi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\sin^n\xi$

其中 $0<\xi<\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$,由于 $0<\sin\xi<1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2}\sin^n\xi=0$

又 $0<\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}-\xi}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon)=\varepsilon$,$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$

(3) $\because$ $\cos2t=1-\dfrac{1}{2!}(2t)^2+o(t^2)$,$\therefore 1-2t^2\leqslant\cos2t\leqslant1$,于是

$$\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1-2t^2}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{\cos2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\frac{1}{4t^2}\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow$ $-\dfrac{3}{4}+\dfrac{n}{4}+\dfrac{1}{2n}\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^1\dfrac{\cos2t}{4t^2}\mathrm{d}t\ \dfrac{\cos2t}{4t^2}\leqslant-\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{4}$,两边同乘以$\dfrac{1}{n}$,得

$$\therefore -\frac{3}{4n}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2n^2}\leqslant\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t\leqslant-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4}$$

$\because$ $$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{4},\ \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}$$

题型 V　利用子序列的极限与函数的极限等值定理，求数列极限

【解题提示】 将序列中的自然数 n 换成连续变量 x，求出形式相同的函数的极限，即得数列的极限.

【例 1.22】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

【解】 (1) $\because$ $$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt[x]{x}-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}(\ln x-1)}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-1}{x^{\frac{1}{2}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}\cdot e^0=2\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

$\therefore$ $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)=0$$

(2) $\because$ $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)\right]^{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(x\sin\frac{1}{x}-1\right)\xlongequal{\text{令 } u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}\sin u-1}{u^2}=\lim_{n\to0^+}\frac{\sin u-u}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{\cos u-1}{3u^2}=\lim_{u\to0^+}\frac{-\sin u}{6u}=-\frac{1}{6}$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{-\frac{1}{6}}$，　故　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{-\frac{1}{6}}$

二．　函数的极限

题型 I　$\frac{0}{0}$ 型未定式的定值法

【解题提示】 求解 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法：

(1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子，然后用连续函数的性质求极限；

(2) 利用等价无穷小和台劳公式求极限；

(3) 利用洛毕达法则求极限（这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法）；