



初二数学

特级教师教学 优化设计

南京师范大学出版社
与人教版新教材同步

系列丛书

特级教师教学优化设计



(与人教版新教材同步)

《特级教师教学优化设计》

编委会组织编著

南京师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

特级教师教学优化设计:初二数学/《特级教师教学优化设计》编委会编著. —南京:南京师范大学出版社, 1999.7

ISBN 7-81047-325-5 / G·196

I. 特… II. 特… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 20512 号

书 名	特级教师教学优化设计:初二数学
编 著	《特级教师教学优化设计》编委会
责任编辑	杨爱玲
出版发行	南京师范大学出版社
地 址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电 话	(025)3598077(传真) 3598412(发行部) 3598297(邮购部)
E-mail	nmunips@public1.ptt.js.cn
照 排	江苏兰斯印务发展有限公司
印 刷	赣榆印刷厂
开 本	787×1092 1/16
印 张	9.75
字 数	245 千
版 次	2001 年 6 月第 2 版 2001 年 7 月第 2 次印刷
书 号	ISBN 7-81047-325-5 / G·196
定 价	10.00 元

南京师大版图书若有印装问题请与销售商调换
版权所有 侵犯必究

《特级教师教学优化设计》丛书编委会

(初中部分)

主 任 李晏墅 王政红

委 员 (按姓氏笔画排列)

万 斌 卫懋勤 王政红 王欲祥

白 莉 李晏墅 陈士杰 陈兆金

周海忠 姜爱萍 高朝俊 徐德顺

赵惠清

(初二数学)

主 编 祁建新

编写人员 祁建新 陈一君 赵雪琪 曹国建

出版说明

实施素质教育是当前教育改革的热门话题。在学科教学中,如何减轻学生的负担,提高教与学的质量,增强学生的全面素质,又是实施素质教育的关键。为了给学生提供一套能够体现当前教改精神、切实提高学习质量的读物,让学生用最少的时间获得最大的学习收益,我们在大量调查和深入开展研讨的基础上,组织一批特级教师主持编写了这套“特级教师教学优化设计”系列丛书。

随着教改的不断深入,随着新的高考方案的逐步落实,教育观念、教学内容、教学方法、测评手段都会有较大的改变。本套系列丛书的编写,力图充分吸收当前教改的成果,贯彻现代教育思想,充分注意教学过程中教师的主导作用与学生的主体作用,尤其突出对学生的学法指导。本书对学科知识的辅导,既注意围绕各科的教学大纲,对课本中的知识要点、重点、难点进行系统的梳理和讲解,并安排相应的练习;又注意适应当前教改的要求,注意向新的考试内容靠拢,突出知识学习的迁移和综合。“学习指导”、“讲解设计”、“练习设计”是本系列丛书的基本栏目。“学习指导”梳理本课的知识要点或介绍学习方法,“讲解设计”对本课中的知识重点、难点进行阐释,“练习设计”根据本课的知识点安排相应的练习。练习又按“识记与理解”、“巩固与运用”、“拓展与迁移”三个层级进行设计。在语文中,还设计了“写作与欣赏”,题目强调典型性和少而精。

数、理、化以课时为编写单位是本系列丛书的又一大特色。一般的同类书都以单元为编写单位,虽与教材同步,但与课时不同步,操作上的缺陷是显而易见的。本系列丛书吸收了许多特级教师多年教学的研究、实验成果,以课时为单位进行编写,并且每课时安排为一页两面,课时与课时之间不转页,这必将会给使用者带来很大的方便。

为了保证编校质量,本系列丛书设立了责任验题人制度。除加强正常的三审三校外,所有的题目都请专人负责验题,以确保题目以及解题过程和答案的准确性。

作为师范大学出版社,我们力图编出一套有自己特色、有较高水平和实用价值的读物。我们衷心希望本系列丛书能像我社先前开发的“向45分钟要效益”丛书一样,得到广大读者的青睐;也衷心希望读者在使用过程中提出批评意见,以便我们进一步修订,使其日臻完善,成为名牌产品。

再版前言

依据中学各科教学大纲,配合现行教材和素质教育的要求,结合当前教学改革的实际需要,我们编写了这套《特级教师教学优化设计》丛书。

初二数学分册的编写,力求做到体现和反映以下“优化”的特色:

教学进度与课时安排优化 将初二数学的教学内容按实际教学的需要拆分为62课时,习题课和阶段小结课也合理安排穿插其中,重要章节及各章节内的重难点内容,进行了合理的分散处理。这样的进度及课时安排可作为教学实施的参考。

知识内容与教法学法优化 每课时的知识内容突出重点,对概念和规律的介绍简洁明了,知识体系的梳理纲目清晰,注意前后承接过渡与迁移,覆盖相关的知识点。根据认知规律进行讲解设计,例题讲解循序渐进,先分析引导、详细解答,后提示思路与方法,放手让读者自行分析问题与解决问题。这些例题既可直接用于课堂教学的讲解举例,也可作为学生预习的主要内容。

练习内容与题量梯度优化 练习设计的内容注意到知识与能力的并重和同步提高,与社会生产、生活相结合的题较多,逐步向学科之外延伸。题型全面,新题较多,加大了主观题的份量。题量适中,难度梯度合理,有利于分类教学。每一课的“讲解设计”分为两个层次,“练习设计”分为三个层次,教学使用时有了较大的选择余地,因而普适性就大大提高。

栏目设置与编排方式优化 全书栏目设置精当,一目了然。每课时的讲解与练习各占一页,便于进度的把握与对教学效果的实时反馈;书后的参考答案可供测评时灵活使用;大开本的设计符合当前教学用书的潮流与使用习惯。

我们期望由江苏一线特、高级教师编写的这本初二教学的教学优化设计能为初中数学教学提供有益的参考。

编者

2001.6.

目 录

代数部分

第八章 因式分解

- 01 提公因式法…………… (1)
- 02 运用公式法…………… (3)
- 03 分组分解法…………… (5)
- 04 因式分解综合训练…………… (7)
- 05 单元测试…………… (9)

第九章 分 式

- 06 分式…………… (11)
- 07 分式的基本性质…………… (13)
- 08 分式的乘除法…………… (15)
- 09 分式的加减法…………… (17)
- 10 含字母系数的一元一次方程 …… (19)
- 11 探究性活动…………… (21)
- 12 可化为一元一次方程的分式方程及其应用…………… (23)
- 13 单元测试…………… (25)

第十章 数的开方

- 14 平方根…………… (27)
- 15 立方根…………… (29)
- 16 用计算器求数的 n 次方根 …… (31)
- 17 实数…………… (33)
- 18 单元测试…………… (35)

第十一章 二次根式

- 19 二次根式…………… (37)
- 20 二次根式的乘法…………… (39)
- 21 二次根式的除法…………… (41)
- 22 最简二次根式…………… (43)
- 23 二次根式的加减…………… (45)
- 24 二次根式的混合运算…………… (47)
- 25 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的化简…………… (49)
- 26 单元测试…………… (51)

几何部分

第三章 三角形

- 27 关于三角形的一些概念…………… (53)

- 28 三角形三条边的关系…………… (55)
- 29 三角形的内角和…………… (57)
- 30 全等三角形…………… (59)
- 31 全等三角形的判定(一)…………… (61)
- 32 全等三角形的判定(二)…………… (63)
- 33 全等三角形的判定(三)…………… (65)
- 34 角的平分线…………… (67)
- 35 单元测试…………… (69)
- 36 尺规作图…………… (71)
- 37 等腰三角形的性质…………… (73)
- 38 等腰三角形的判定…………… (75)
- 39 线段的垂直平分线、轴对称和轴对称图形…………… (77)
- 40 勾股定理…………… (79)
- 41 勾股定理的逆定理…………… (81)
- 42 单元测试…………… (83)

第四章 四边形

- 43 四边形及多边形的内角和…………… (85)
- 44 平行四边形及其性质…………… (87)
- 45 平行四边形的判定…………… (89)
- 46 矩形、菱形…………… (91)
- 47 正方形…………… (93)
- 48 中心对称和中心对称图形…………… (95)
- 49 梯形…………… (97)
- 50 平行线等分线段定理…………… (99)
- 51 三角形、梯形的中位线…………… (101)
- 52 单元测试…………… (103)

第五章 相似形

- 53 比例线段…………… (104)
- 54 平行线分线段成比例定理…………… (106)
- 55 相似三角形…………… (108)
- 56 相似三角形的判定…………… (110)
- 57 相似三角形的性质…………… (112)
- 58 相似三角形的判定和性质练习…………… (114)
- 59 相似多边形…………… (116)
- 60 单元测试…………… (118)
- 61 第一学期期末检测试卷…………… (121)
- 62 第二学期期末检测试卷…………… (124)

- 参考答案…………… (128)

01 提公因式法

【概念与规律】

1. 把一个多项式化成几个整式的积的形式,叫做把这个多项式因式分解,也叫做把这个多项式分解因式.

2. 如果多项式的各项有公因式(公共的因式),可以把这个公因式提到括号前,将多项式写成因式乘积的形式,这种分解因式的方法叫做提公因式法.

3. 提取公因式时,需对各项的系数和字母分别加以考虑.

(1)系数——要提出各项系数的最大公因数;

(2)字母——要提出各项都含有相同字母的最低次幂.

【讲解设计】·重点与难点

例1 把 $8x^3y^2 - 24x^2y^3$ 因式分解.

分析 提取公因式时,括号内的多项式的各项间不能再有公因式.

解 $8x^3y^2 - 24x^2y^3 = 8x^2y^2(x - 3y)$.

例2 把 $9a^3 + 6a^2 + 3a$ 因式分解.

分析 多项式的某项恰好是公因式,提取公因式后,括号内的多项式中不要漏掉“1”.

解 $9a^3 + 6a^2 + 3a$
 $= 3a(3a^2 + 2a + 1)$.

例3 把 $-5a^2b + 10ab^2x$ 因式分解.

分析 多项式的首项若是“-”,必须把“-”号提出,使括号内的多项式首项为正.在提出“-”号时,括号内的多项式的各项都必须改变符号.

解 $-5a^2b + 10ab^2x$
 $= -5ab(a - 2bx)$.

例4 把 $a(a-b) + b(b-a)$ 因式分解.

分析 (1)提取的公因式也可以是某个多项式,这时应注意下列各式的应用:

$$(b-a) = -(a-b),$$

$$(b-a)^2 = (a-b)^2,$$

$$(b-a)^3 = -(a-b)^3,$$

$$(b-a)^4 = (a-b)^4,$$

.....

$$(b-a)^{2n+1} = -(a-b)^{2n+1},$$

$$(b-a)^{2n} = (a-b)^{2n}.$$

(n 为正整数)

(2)相同的因式要写成幂的形式.

解 $a(a-b) + b(b-a)$

$$= a(a-b) - b(a-b)$$

$$= (a-b)(a-b)$$

$$= (a-b)^2.$$

【讲解设计】·思路与方法

例5 写出多项式 $6x(a+b)^2 - 9x^2 \cdot (a+b)$ 中的各项的公因式.

提示 多项式中把 $(a+b)$ 看成是一个字母时,不能丢掉另一个相同的字母及系数.

例6 把 $a(a-b)^2 + (b-a)^3$ 因式分解.

提示 (1)首先把 $(b-a)^3$ 改写成 $-(a-b)^3$;

(2)因式分解后各个因式要进行化简;

(3)因式分解的结果,单项式要写在多项式的前面.

例7 把 $(b+c)x + (c+a)x + (a+b)x$ 因式分解.

提示 提取公因式后,括号内的因式要进行化简,有公因式的还需要提出公因式,每个因式必须分解到不能分解为止.

例8 用简便方法计算 $3.14 \times 18 + 3.14 \times 93 - 3.14 \times 11$.

提示 提出公因数 3.14.

例9 解方程:

$$(x-2001)^2 - (2001-x)(2002-x) = 1.$$

提示 提出公因式 $(x-2001)$,把它化成一元一次方程.

【练习设计】·识记与理解

1. 下列各题中从左边到右边的变形,哪些是因式分解? 哪些不是?

$$(1) x^2 + 2x - 3 = x(x+2) - 3 \quad (\quad);$$

$$(2) 6a^2b - 3ab^2 = 3ab(2a - b) \quad (\quad);$$

$$(3) -2m(m+n) = -2m^2 - 2mn \quad (\quad);$$

$$(4) x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2 \quad (\quad);$$

$$(5) (2a+3)(2a-3) = 4a^2 - 9 \quad (\quad);$$

$$(6) ma + mb + na + nb = m(a+b) + n(a+b) \quad (\quad).$$

2. $ab + 5ab^2 - 2b^2$ 的公因式为_____.

3. $a^2 + ab$ 与 $a^2 - ab$ 的公因式为_____.

4. 分解因式_____ = $m(a+b+c)$.

5. 分解因式: $\pi R^2 + \pi r^2 = \underline{\hspace{2cm}} (R^2 + r^2)$.

6. 分解因式: $-mx^2 + m^2x + mx = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 把 $-12m^3 + 8m^2 - 4m$ 分解因式, 结果是().

$$(A) -4m(3m^2 - 2m)$$

$$(B) -4m(3m^2 + 2m - 1)$$

$$(C) -2m(6m^2 - 4m + 2)$$

$$(D) -4m(3m^2 - 2m + 1)$$

【练习设计】·巩固与掌握

8. 在括号内填上适当的多项式.

$$(1) ab^2 - \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2}a(\quad);$$

$$(2) x(y-1) - (\quad) = (y-1)(x+1);$$

$$(3) -3a^2b^2 - 6ab + 9ab^2 = -3ab(\quad);$$

$$(4) x(a-b) + y(b-a) = (a-b) \cdot (\quad);$$

$$(5) 16a^{m+2}b + 12a^{m+1}b^2 - 8a^mb^3 = (\quad) \cdot (\quad).$$

9. 将 $3a(x-y) - 9b(y-x)$ 用提公因式法分解因式, 应提出的公因式是().

$$(A) 3a - 9b \quad (B) 3(x-y)$$

$$(C) x-y \quad (D) 3a+9b$$

10. 把下列各式分解因式:

$$(1) -3am + 18an;$$

$$(2) 25x^4 - 75x^5;$$

$$(3) -2x^{2n} - 4x^n;$$

$$(4) 3a^2b^3c + 4a^5b^2 + 6a^3;$$

$$(5) 12x^{2n+1}y^{m+2} - 20x^{n+1}y^{2m+3};$$

$$(6) a(x+m) - ab(m+x);$$

$$(7) -b(a+b)^2 + b^2(a+b);$$

$$(8) (x-3)(3x-2) + 7(3-x);$$

$$(9) (m+n)(n-m) - n(m+n)(m-n);$$

$$(10) a(a+b-c) - b(c-a-b) - c(b-c+a);$$

$$(11) -27x^2(3x-y)^2 - 9y(y-3x);$$

$$(12) 3(a-b)^4 - (b-a)^3.$$

11. 把下列各式分解因式:

$$(1) 2(a+b)^2 + a+b;$$

$$(2) 2m(x-y) - 5(y-x)^2;$$

$$(3) 2x(2x-y)^2 - y(y-2x)^2;$$

$$(4) 45(x-y)^3 - 30y(x-y)^2;$$

$$(5) x(x-y)^2 + xy(x-y);$$

$$(6) 9x^2(m-n) - y^2(n-m);$$

$$(7) x^3y^2(x-2y)^3 - x^2y^4(2y-x)^2;$$

$$(8) (x-2) + (1-x)(2-x);$$

$$(9) -a^mb^{2m-1} + a^{m+1}b^{2m};$$

$$(10) 3ax^{m+1} - 5ax^m + 3ax^{m-1}.$$

$$12. \text{计算 } 13.7 \times \frac{17}{31} + 19.8 \times \frac{17}{31} - 2.5 \times \frac{17}{31}.$$

13. 已知: $a+b=5$, $ab=3$, 求 $a^3b^2 + a^2b^3$ 的值.

14. 已知公式 $V = IR_1 + IR_2 + IR_3$, 当 $I = 2.5$, $R_1 = 14$, $R_2 = 17.3$, $R_3 = 12.7$ 时, 利用因式分解求 V 的值.

【练习设计】·拓展与迁移

15. 解方程:

$$(5x-3)(5x+6) + (3-5x)(5x+7) = 0.$$

16. 把 $x(a-1)^n - y(1-a)^n$ 分解因式 (n 为正整数).

02 运用公式法

【概念与规律】

1. 把乘法公式反过来,就可以用来把某些多项式分解因式,这种分解因式的方法叫做运用公式法.

2. 因式分解公式:

(1)平方差公式:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

(2)完全平方公式:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

3. 运用公式分解多项式时,特别要注意多项式的项数.当多项式只有两项时,考虑用平方差公式;当多项式有三项时,考虑用完全平方公式.另外还应注意公式中的字母既能代表单项式,还能代表多项式.

【讲解设计】·重点与难点

例1 把 $4a^2 - (b - c)^2$ 分解因式.

分析 首先把多项式变形,使其改写成 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ 的形式,然后再用平方差公式.

$$\begin{aligned}\text{解 } 4a^2 - (b - c)^2 \\&= (2a)^2 - (b - c)^2 \\&= [2a + (b - c)][2a - (b - c)] \\&= (2a + b - c)(2a - b + c).\end{aligned}$$

例2 把 $16(x + y)^2 - 24(x + y) + 9$ 分解因式.

分析 多项式是一项,第一项是 $4(x + y)$ 的平方,第三项是 3 的平方,第二项是 $-24(x + y)$,恰好是 $4(x + y)$ 与 3 的积的 2 倍的相反数,可用完全平方公式.

$$\begin{aligned}\text{解 } 16(x + y)^2 - 24(x + y) + 9 \\&= [4(x + y)]^2 - 2 \times 4(x + y) \times 3 + 3^2 \\&= [4(x + y) - 3]^2 \\&= (4x + 4y - 3)^2.\end{aligned}$$

例3 把 $3a^3 + 12a^2b + 12ab^2$ 分解因式.

分析 这个多项式首先可以提公因式,括号

内的多项式还可以用完全平方公式继续分解.

$$\begin{aligned}\text{解 } 3a^3 + 12a^2b + 12ab^2 \\&= 3a(a^2 + 4ab + 4b^2) \\&= 3a(a + 2b)^2.\end{aligned}$$

例4 把 $x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$ 分解因式.

分析 这个多项式首先可以运用完全平方公式分解因式,括号内的多项式还可以用平方差公式继续分解.

$$\begin{aligned}\text{解 } x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 \\&= (x^2 - 4y^2)^2 \\&= [(x + 2y)(x - 2y)]^2 \\&= (x + 2y)^2(x - 2y)^2.\end{aligned}$$

例5 下列多项式中,能用公式法进行因式分解的多项式是().

- (A) $x^2 + 4$ (B) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
(C) $x^2 - xy$ (D) $x^2 + 2x + 4$

分析 平方差公式的特征:等式的左边是两数的平方差;完全平方公式的特征:等式的左边是三项式,且三项中必有 $a^2 + b^2$,第三项是 $\pm 2ab$.

解 选(B).

【讲解设计】·思路与方法

例6 把 $-x^3 + xy^2$ 分解因式的结果是().

- (A) $-x(x^2 + y^2)$
(B) $-x(x + y)(x - y)$
(C) $-x(y - x)(y + x)$
(D) $-x(x^2 - y^2)$

提示 先提取公因式,再把括号内的多项式用平方差公式进行分解.分解因式必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

例7 把 $(x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1$ 分解因式.

提示 先用完全平方公式进行因式分解,对括号内的多项式再次运用完全平方公式.

例8 把 $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$ 分解因式.

提示 首先用平方差公式,再对多项式因式用完全平方公式分解.

【练习设计】·识记与理解

1. 利用公式填空.

(1) $\frac{1}{49}x^2 - \frac{16}{25}y^2 = (\quad)(\quad)$;

(2) $4m^2 + 4mn + n^2 = (\quad)^2$;

(3) $a^2 - 6a + 9 = (\quad)^2$;

(4) $16x^2 - 81 = (4x + 9)(\quad)$;

(5) $9x^2 + (\quad) + 16y^2 = (3x + 4y)^2$

(6) $25a^2 + (\quad) + b^2 = (\quad)^2$.

2. 多项式 $x^4 - y^4, x^4 + 2x^2y^2 + y^4, x^3y + xy^3$ 的公因式是_____.

3. 将 $-m^4 + m^2n^2$ 因式分解的结果是
().

(A) $(-m^2 + mn)(-m^2 - mn)$

(B) $-m^2(m^2 + n^2)$

(C) $-m^2(m + n)(m - n)$

(D) $-m^2(n + m)(n - m)$

4. 下列多项式中不能分解因式的是
().

(A) $-a^2 + 2ab - b^2$ (B) $-x^2 + y^2$

(C) $m^2 + m + \frac{1}{4}$ (D) $x^2 + y^2$

【练习设计】·巩固与掌握

5. 分解因式: $16a^2 - (2a - 3b)^2 =$

6. 分解因式: $4a^2 + 12ab + 9b^2 =$

7. 分解因式: $4a^2 - 12ab + 9b^2 =$

8. 分解因式: $48(x + y + z)^2 - 75(x - y - z)^2 =$

9. 分解因式: $(x^2 - x)^2 + \frac{1}{2}(x^2 - x)^2 + \frac{1}{16} =$

10. 分解因式: $(a^2 + ab)^2 - (3ab + 4b^2)^2 =$

11. 如果多项式 $x^2 + mx + 25$ 是一个完全平方, 那么 $m =$

12. 将 $x^2(x - y)^2 - y^2(y - x)^2$ 因式分解

的结果是().

(A) $(x - y)^2(x^2 + y^2)$

(B) $(x - y)^2(x - y)(x + y)$

(C) $(x - y)^2(x^2 - y^2)$

(D) $(x - y)^3(x + y)$

13. 在下列各式中, 分解结果是 $3(x + 2y) \cdot (x - 2y)$ 的是().

(A) $3x^2 - 12y^2$

(B) $3x^2 - 4y^2$

(C) $3x^2 - 6y^2$

(D) $9x^2 - 36y^2$

14. 用公式法分解下列因式:

(1) $\frac{4}{9}m^2 - 1$;

(2) $a^2(a + 2b)^2 - 9(x + y)^2$;

(3) $(9a + 4b)^2 - (3a - b)^2$;

(4) $m - m^5$;

(5) $25x^4 + 10x^2 + 1$;

(6) $a^2b^2 + 4 - 4ab$;

(7) $-49a + 28a^2 - 4a^3$;

(8) $(a + 2b)^2 - 6a(a + 2b) + 9a^2$;

(9) $a^2(2a - b) + b^2(b - 2a)$.

15. 把下列各式分解因式:

(1) $0.01a^2 - 1$;

(2) $-4x^4 + 64x^2y^2$;

(3) $x^4y^4 - 81$;

(4) $25x^2 - 30x + 9$;

(5) $-16x^2 - 56xy^2 - 49y^4$;

(6) $16x^4y^4 - 8x^2y^2 + 1$;

(7) $64m^2n^2 - (m^2 + 16n^2)^2$;

(8) $x^{3n+2} + 2x^{2n+1} + x^n$;

(9) $9(a + 1)^2(a - 1)^2 - 6(a^2 - 1)(b^2 - 1) + (b + 1)^2(b - 1)^2$.

【练习设计】·拓展与迁移

16. 若 $x^2 + mx + n$ 是一个完全平方, 则 n 为().

(A) $\frac{m^2}{2}$ (B) $2m^2$ (C) $4m^2$ (D) $\frac{m^2}{4}$

17. 不论整数 n 的值怎样, 可整除 $n^3 - n$ 的最大数是().

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

03 分组分解法

【概念与规律】

1. 多项式的某些项通过适当的结合成为一组,利用分组来分解一个多项式的因式,这种方法叫分组分解法.

2. 四项式的分组方法:

(1)如果是等项分组,则每组有两项,分组是否成功,则看两组之间是否有公因式;

(2)如果是不等项分组,则其中一组为三项,另一组为一项.分组是否成功,则应看两组之间是否符合平方差公式.

3. 若多项式为 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型的二次三项式,其特点为:①二次项系数为1;②常数项是两个数之积;③一次项系数是常数项的两个因数之和.则有 $x^2 + (p+q)x + pq = (x+p)(x+q)$.

4. 若多项式为两项时,如不能提公因式,也不能运用平方差公式,则常用配方法进行因式分解.

【讲解设计】·重点与难点

例1 把 $mx + nx + my + ny$ 因式分解.

分析 多项式共有四项,因系数相等,所以可以按字母 x 、 y 分组;也可按字母 m 、 n 分组,即按一、二两项与三、四两项组合;也可以按一、三两项与二、四两项组合.

$$\begin{aligned}\text{解法一} \quad mx + nx + my + ny \\&= (mx + nx) + (my + ny) \\&= x(m + n) + y(m + n) \\&= (m + n)(x + y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法二} \quad mx + nx + my + ny \\&= (mx + my) + (nx + ny) \\&= m(x + y) + n(x + y) \\&= (x + y)(m + n).\end{aligned}$$

例2 把 $16x^2 - 8x - y^2 + 2y$ 分解因式.

分析 多项式的系数不成比例,但 $16x^2 - y^2$ 这两项可用平方差公式分解,所以,可以把 $16x^2$ 与 $-y^2$ 分在一组,另两项分在一组.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad 16x^2 - 8x - y^2 + 2y \\&= (16x^2 - y^2) - (8x - 2y) \\&= (4x + y)(4x - y) - 2(4x - y) \\&= (4x - y)(4x + y - 2).\end{aligned}$$

例3 把 $16x^2 - 9y^2 - 32x + 16$ 因式分解.

分析 先把一、三、四项分在一组,利用完全平方公式分解,再与第二项运用平方差公式分解.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad 16x^2 - 9y^2 - 32x + 16 \\&= (16x^2 - 32x + 16) - 9y^2 \\&= (4x - 4)^2 - (3y)^2 \\&= (4x - 4 + 3y)(4x - 4 - 3y).\end{aligned}$$

例4 把 $x^2 - 6x + 8$ 分解因式.

分析 二次三项式的二次项系数为1.常数项8可分解成 $8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = (-1) \times (-8) = (-2) \times (-4)$,常数项的分解不是惟一的.因一次项系数为-6,所以把8分成 $(-2) \times (-4)$,它就是一个 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \because 8 = (-2) \times (-4) \text{ 且 } (-2) + (-4) = -6 \\ \therefore x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4).\end{aligned}$$

【讲解设计】·思路与方法

例5 把 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ 因式分解.

提示 多项式共有四项,系数之间存在比例关系: $1:2 = (-4):(-8)$,所以,可以把一、二两项,三、四两项分组;也可以把一、三两项,二、四两项分组.

例6 把 $(m+n)^2 - (m+n) - 30$ 因式分解.

提示 把该多项式看成关于 $(m+n)$ 的二次三项式,它是 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子.

例7 把 $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 2) - 6$ 分解因式.

提示 设 $x^2 + 2x = a$,则多项式就成为 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子,其中一个因式还是 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子,可以继续因式分解.

【练习设计】·识记与理解

1. $ax + ay - bx - by = (ax + ay) - (bx + by)$ 有公因式_____.

2. $ax + ay - bx - by = (ax - bx) + (ay - by)$ 有公因式_____.

3. 在下列多项式: $a^2 - 4b^2 - a + 2b$, $a^2b^2 - 4ab + 4 - c^2$, $4a^2 - 9b^2 + 24bc - 16c^2$, $a^2 - 4b^2 + 4b - 1$, $16a^2 - 16b^2 + 8a + 1$ 中用分组分解法分解时, 能够分成三项一组和一项一组的多项式有().

- (A) 5 个 (B) 4 个
(C) 3 个 (D) 2 个

4. 关于 x 的二次三项式 $x^2 + mx + 6$ 能分解成两个整系数的一次因式的积, 则 m 的值是().

- (A) $\pm 1, \pm 6$ (B) $\pm 1, \pm 7$
(C) $\pm 5, \pm 6$ (D) $\pm 5, \pm 7$

5. 先填空, 后分析, 最后填写结论.

填 空	分 析			
$x^2 + (p+q)x + pq$ $= (x+p)(x+q)$	常数项 (pq)	一次项系 数($p+q$)	两个因数	
			p	q
① $x^2 + 5x + 6$ $= (x+2)(x+3)$	正数	正数	正数	正数
② $x^2 - 5x + 6$ $= () ()$				
③ $x^2 + x - 6$ $= () ()$				
④ $x^2 - x - 6$ $= () ()$				

结论 (1) 若常数项是正数时, 应分解成两个_____号因数, 它们的符号与_____项系数符号相同;

(2) 若常数项是负数时, 应分解成两个_____号因数, 其中绝对值较大的因数与_____项系数的符号相同.

【练习设计】·巩固与掌握

6. 用分组分解法把 $ab - c + b - ac$ 分解因式, 分组的方法有().

- (A) 4 种 (B) 3 种 (C) 2 种 (D) 1 种

7. 用分组分解法分解多项式 $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ 时, 分组正确的是().

- (A) $(a^2 - c^2) + (2bc - b^2)$
(B) $(a^2 - b^2 - c^2) + 2bc$
(C) $(a^2 - b^2) - (c^2 - 2bc)$
(D) $a^2 + (2bc - b^2 - c^2)$

8. 若 $(x+3)(x-5)$ 是二次三项式 $x^2 + kx + m$ 的因式, 那么 $k =$ _____, $m =$ _____.

9. 代数式 $x^4 - 16$, $x^2 + xy - 2x - 2y$, $x^2 - 7x + 10$ 的公因式是_____.

10. 把下列各式分解因式:

- (1) $x(m+n) + m + n$;
(2) $2ax + 3bx + 4ay + 6by$;
(3) $ab - bc + ac - b^2$;
(4) $2ax + 3am - 10bx - 15bm$;
(5) $ab + 3bc + 2a^2 + 6ac$;
(6) $4a^2 - 14ax + 49bx - 14ab$.

11. 把下列各式分解因式:

- (1) $4a^2 - b^2 + 6a - 3b$;
(2) $a^4 - a^3 + 2a^2 - 16$;
(3) $9a^2 - 6a + 2b - b^2$;
(4) $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$;
(5) $a^4 - x^2 + 4ax - 4a^2$;
(6) $16 - x^{2n} - 100y^2 + 20x^ny$.

12. 把下列各式分解因式:

- (1) $x^2 - 5x - 14$;
(2) $m^2 + 7m - 18$;
(3) $x^2 + 3xy - 10y^2$;
(4) $x^2y^2 + 16xy + 48$;
(5) $x^4 - 15x^2 - 16$;
(6) $y^4 - 13y^2 + 36$.

【练习设计】·拓展与迁移

13. 把下列各式分解因式:

- (1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 3$;
(2) $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) - 3$;
(3) $4x^4 + 1$.

14. 若 $(x^2 + y^2 + 3)(x^2 + y^2 - 2) - 6 = 0$, 则 $x^2 + y^2 =$ _____.

04 因式分解综合训练

【概念与规律】

因式分解的一般步骤是:

1. 如果多项式的各项有公因式,那么首先提取多项式的公因式.

2. 如果各项没有公因式,可按其项数确定分解方法.

(1)多项式是两项时:

①两项为异号时,考虑用平方差公式分解因式;

②两项为同号时,考虑用配方法分解因式.

(2)多项式是三项时,考虑用完全平方式或 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子分解因式.

(3)多项式是四项式或四项以上的,考虑用分组分解法.

3. 因式分解必须分解到每一个因式都不能再分解为止.

【讲解设计】·重点与难点

例1 已知下列三个代数式:

$$\textcircled{1} (2x+1)^2 - 3(x-1)^2 - 10x + 1;$$

$$\textcircled{2} (mx+ny)^2 + (nx-my)^2;$$

$$\textcircled{3} (a^2+2a)^2 - 2(a^2+2a) - 3.$$

则在有理数范围内().

(A)只有①不能分解因式

(B)只有①②不能分解因式

(C)①②③都不能分解因式

(D)①②③都能分解因式

分析 ①式展开为 $x^2 - 1$,可用平方差公式分解因式;②式展开为 $m^2x^2 + n^2y^2 + n^2x^2 + m^2y^2$,可用分组分解法分解;③式是 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子,可分解因式.

解 选(D).

例2 把 $(a^2+2a)(a^2+2a-11)+24$ 分解因式.

分析 把多项式看成关于 a^2+2a 的二次三项式,它就是 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子.

$$\text{解 } (a^2+2a)(a^2+2a-11)+24$$

$$\begin{aligned}&= (a^2+2a)^2 - 11(a^2+2a) + 24 \\&= (a^2+2a-3)(a^2+2a-8) \\&= (a+3)(a-1)(a+4)(a-2).\end{aligned}$$

例3 把 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+16$ 分解因式.

分析 由乘法公式可知,对于两个一次二项式的积 $(x+a_1)(x+b_1)$ 与 $(x+a_2)(x+b_2)$,若有 $a_1+b_1=a_2+b_2$,则积里的二次项系数和一次项系数均相同.本题只要把 $(x+1) \cdot (x+7)$ 与 $(x+3)(x+5)$ 分别展开,可化为例2的形式.

$$\begin{aligned}\text{解 } &(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+16 \\&= [(x+1)(x+7)] \cdot [(x+3)(x+5)] + 16 \\&= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+16 \\&= (x^2+8x)^2 + 22(x^2+8x) + 121 \\&= (x^2+8x+11)^2.\end{aligned}$$

【讲解设计】·思路与方法

例4 如果关于 x 的二次三项式 $x^2 - 4x + m$ 可分解成两个整系数的一次因式的乘积,那么().

(A) m 的值只有一个: $m=4$

(B) m 的值有两个: $m=3, 4$

(C) m 的值只有三个: $m=3, 4, -5$

(D) 关于 m 的值,上述结论都不正确

提示 举一个特例 $x^2 - 4x - 12 = (x+2) \cdot (x-6)$ 来说明.

例5 把 $a^2 - 2ab + b^2 - 6a + 6b + 5$ 分解因式.

提示 用分组分解法.二次项为一组,一次项为一组,常数项为一组,化成 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子.

【练习设计】·识记与理解

1. 已知 $x^2 - 7x + k = (x + m)(x + n)$ 中 m, n, k 都是整数, 则有:

(1) 当 $k = 12$ 时, $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 当 $m = -12$ 时, $n = \underline{\hspace{2cm}}$, $k = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 当 $n = -1$ 时, $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 因式分解得 $(x - y - 3)(x - y + 5)$ 的多项式是().

(A) $-x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 2y + 15$

(B) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y + 15$

(C) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y + 15$

(D) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 15$

3. 先把下列各式分解因式, 然后指出每题的公因式.

(1) $x^2 + x - 12, x^2 - 6x + 9, x^2 - 9$;

(2) $x^2 + 2x + ax + 2a, x^3 - 4x, x^2 - 5x - 14$.

4. 与多项式 $x^2 - 5x + 4$ 有一个相同因式的多项式是().

(A) $x^2 - 5x + 6$ (B) $x^2 + 5x + 6$

(C) $x^2 - 5x - 6$ (D) $x^2 + 5x - 6$

5. 若二次三项式 $x^2 + bx + c = (x + c_1) \cdot (x + c_2)$, 则当 $b < 0, c > 0$ 时, c_1, c_2 的符号为().

(A) $c_1 > 0, c_2 > 0$

(B) $c_1 < 0, c_2 < 0$

(C) $c_1 > 0, c_2 < 0$

(D) c_1, c_2 同号

【练习设计】·巩固与掌握

6. 在下列各式中的空格处填上适当的数:

(1) $y^2 + \underline{\hspace{1cm}}y + 5 = (y + 5)(y + \underline{\hspace{1cm}})$;

(2) $m^2 - \underline{\hspace{1cm}}m - 21 = (m - 7)(m + \underline{\hspace{1cm}})$;

(3) $x^2 + 4x - \underline{\hspace{1cm}} = (x - 3)(x + \underline{\hspace{1cm}})$;

(4) $x^2 - 7x - \underline{\hspace{1cm}} = (x - \underline{\hspace{1cm}})(x - 1)$;

(5) 当 $m = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, $x^2 + 2(m - 3)x + 25$ 是完全平方式;

(6) 当 $k = \underline{\hspace{1cm}}$ 时, 多项式 $y^2 + 7y - k$ 有一个因式是 $(y + 2)$.

7. 将 $m^2 - 16n^2$ 分解因式, 结果为().

(A) $(m + 16n)(m - 16n)$

(B) $(m + 4)(m - 4)$

(C) $(m - 4n)^2$

(D) $(m + 4n)(m - 4n)$

8. 若 $x^2 - mx + 36$ 能分解成整数系数的一次因式之积, 则整数 m 的取值个数是().

(A) 3 个

(B) 6 个

(C) 9 个

(D) 10 个

9. 把下列各式分解因式:

(1) $x^3 - 5x^2 - 24x$;

(2) $\frac{2}{27}a^2 - \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}$;

(3) $-(m - n)^2 - 4x(n - m)^2(x - 1)$;

(4) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$;

(5) $x^4 + 13x^2 + 36$;

(6) $x^2(x - 5) + 11x(5 - x) + 30(x - 5)$;

(7) $(x^2 + 2x + 3)^2 - 13(x^2 + 2x + 3) + 22$;

(8) $x^{n+1} + 3x^n + 2x^{n-1}$;

(9) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 3) - 15$;

(10) $3x^2 - 12 - 8a + 2ax^2$;

(11) $4 - 16y^2 - 20ay^2 + 5a$;

(12) $x^2 + a^2 - 2ax - b^2$;

(13) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) - 9$;

(14) $(x - 1)(x + 1)(x + 2)x - 8$.

【练习设计】·拓展与迁移

10. 已知 $-2x - 5 - x^2 + 4y - y^2 = 0$, 求 y^x 的值.

11. 已知 a, b, c 为三角形的三边, 求证: $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc > 0$.

05 单元测试

一、填空题(本题共 26 分,每空 2 分)

1. 分解因式: $-3a^3b + 9ab^2 - 6ab = \underline{\hspace{2cm}}(a^2 - 3b + 2)$.

2. $b(2a - 1) + (\underline{\hspace{2cm}}) = (2a - 1)(b - 1)$.

3. $1 - \underline{\hspace{2cm}} = (1 + \frac{1}{2}ab)(1 - \frac{1}{2}ab)$.

4. $4a^2b^2 + 2ab + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$.

5. $a^2 - 2ax + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2$.

6. 若 $x^2 + mx + n = (x + 3)(x - 6)$, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 当 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $9a^2 - ka + 16$ 是完全平方式.

8. $3mx + 6ny + 3my + 6nx$
 $= 3(\underline{\hspace{2cm}})$
 $= 3(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$.

二、选择题(每题只有 1 个选项符合题意,每题 2 分,共 20 分)

9. 下列各等式属于分解因式的是().

(A) $6a^2b = 2a^2 \cdot 3b$

(B) $mx + nxy - xy = mx + xy(n - 1)$

(C) $a^m - a^{m-1} = a^{m-1}(a - 1)$

(D) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

10. 多项式 $-6x^3y^2 - 3x^2y^2 + 12x^2y^3$ 分解因式时应提取的公因式为().

(A) $3xy$

(B) $-3x^2y$

(C) $3xy^2$

(D) $-3x^2y^2$

11. 下列各式中是完全平方式的是().

① $4a^2 + 1$; ② $a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2$; ③ $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$; ④ $\frac{4}{9}p^2q^2 - \frac{2}{3}pq + 1$; ⑤ $a^4 - 2a^3b + a^2b^2$; ⑥ $x^4 +$

$2x^2 + \frac{1}{x^2}$; ⑦ $-64x^2 + 16xy - y^2$; ⑧ $(x - y)^2 - 5(x - y) + 9$; ⑨ $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$.

(A) ②④⑦

(B) ②③⑤⑥

(C) ③④⑥⑦

(D) ②③⑤⑦⑨

12. 若 $25x^2 - 20xy + (ny)^2$ 是完全平方式, 则 n 的值是().

(A) 2

(B) -2

(C) ± 4

(D) ± 2

13. 下列多项式中, 不能用完全平方公式分解因式的是().

(A) $a^2 - 4ab + 4b^2$

(B) $-a^2 + 4ab - 4b^2$

(C) $a^2 - 4ab - 4b^2$

(D) $a^2 + 4b^2 + 4ab$

14. 用分组分解法把 $x^2 - 4y^2 + 4y - 1$ 分解因式, 正确的分组为().

(A) $(x^2 - 4y^2) + (4y - 1)$

(B) $x^2 - (4y^2 - 4y + 1)$

(C) $(x^2 - 1) - (4y^2 - 4y)$

(D) $(x^2 + 4y - 1) - 4y^2$

15. 若 $x^2 + px + q = (x - a)(x - b)$, 则 $a + b, ab$ 为().

(A) $a + b = -p, ab = q$

(B) $a + b = p, ab = -q$

(C) $a + b = p, ab = q$

(D) $a + b = -p, ab = -q$

16. 在下列二次三项式中,不是 $x^2 + (p+q)x + pq$ 型式子的是().

(A) $x^2 + 10x + 21$ (B) $x^2 + 9x + 100$

(C) $x^2 - 13x - 14$ (D) $x^2 + 9x - 52$

17. 下列多项式中,能用分组分解法分解因式的是().

(A) $5a^2 + 7a + 5ax - 7x$ (B) $5a^2 - 7a - 5ax + 7x$

(C) $5a^2 - 7a - 5ax - 7x$ (D) $5a^2 + 7a - 5ax + 7x$

18. 如果改动 $9a^2 + 12ab + b^2$ 中某一项,使它变成完全平方式,则改动的办法是().

(A) 只能改动第一项 (B) 只能改动第二项

(C) 只能改动第三项 (D) 可以改动三项中的任意一项

三、利用因式分解计算(本题 6 分,每题 3 分)

19. $0.16 \times 35^2 - \frac{4}{25} \times 15^2$;

20. $\frac{1}{2} \times 6.3^2 + 6.3 \times 3.7 + \frac{1}{2} \times 3.7^2$.

四、把下列各多项式分解因式(每题 3 分,共 30 分)

21. (1) $-8x^2 + 2x^2y^2$;

(2) $x(x+y)(x-y) - y(y-x)^2$;

(3) $4(m+n)^2 - 9(m-n)^2$;

(4) $a^3 + 3a^2 - 9a - 27$;

(5) $a^2 + 2bc - b^2 - c^2$;

(6) $(x^2 + 16y^2)^2 - 64x^2y^2$;

(7) $x^4 + 3x^2 - 28$;

(8) $ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)$;

(9) $(x^2 - 5x)(x^2 - 5x - 2) - 24$;

(10) $x^4 + 4$.

五、22. 已知: $a^2 - ab - 6b^2 = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$, 求 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 的值.(满分 4 分)

六、23. 已知: $a + b = 1, ab = -12$,

求: (1) $a^2b + ab^2$ 的值;

(2) $a^2 + b^2$ 的值.(满分 5 分)

七、24. 求 $x^2 - xy - 2y^2 = 7$ 的整数解.(满分 5 分)

八、25. 求证: 四个连续整数的积与 1 的和是一个完全平方数.(满分 4 分)