# 经济运筹初步

## ——线性规划部分

作者：明安联 方行明



西南财经大学出版社

**责任编辑：傅　虹**
**封面设计：刘春明**

**经　济　运　筹　初　步**
**明安联　方行明　编**

西南财经大学出版社出版　西南财经大学出版社发行
四川省新华书店经销　成都陆军学校印刷厂印制

787×1092毫米　1/32　印张3.5　字数80千字
1989年3月第一版　1989年3月第一次印刷
印数：1—1500

书号：ISBN7—81017—082—1/F·61
定价：0.80

# 前　言

马克思说过："以最低限量的劳动取得最高限量的产品"，这是经济优化的客观标准。线性规划就是经济优化的一种重要方法，它在现代经济管理（包括生产计划、物资调运、资源分配）中，使用最早，方法最简，应用最为广泛。

线性规划问世于1939年，由苏联数学家康托诺维奇最早提出，1947年丹茨格建立了单纯形方法，使线性规划的理论与算法日臻完善。随着算法的改进和计算机的使用，目前一个包含几百个变量、几百个约束的大型线性规划问题，仅在数十秒内即可求解。

为了适应现代经济管理的需要，必须大力普及线性规划的应用。本书以普及为宗旨，以具有中学数学水平的读者为对象，介绍了线性规划的简易算法和简单的书写格式。该算法的特点是直接从解线性方程组（约束）入手，逐步达到目标函数最优值。

全书因繁就简、思路明晰、通俗易懂。本书除作为科普读物外，也可作为高等学校经济类专业的各种培训班、成人自学及函授的教材或参考书，亦适宜广大经济工作者参考。

编　者

1987年11月于成都

# 目　录

# 第一章　经济运筹——线性规划数学模型

## §1.1　线性规划数学模型的建立

在工业、农业、商业等许多经济部门中，经常会遇到这样的运筹问题：如何合理地利用有限的资源，以期获得最好的经济效益；如何有效地安排产品的生产，以使得所花费工时最少，成本最低，利润最大；等等。下面我们举几个实际例子。

**例 1**　一个家俱厂制造A型和B型两类桌子，每张桌子要经过木工装配和油工油漆两道工序完成，木工装配一张A型桌子要花1个小时，而装配一张B型桌子要花2小时，油工油漆一张A型桌子要花3小时，而油漆一张B型桌子要花1个小时。木工每天工作不得超过8个小时，而油工每天工作不得超过9个小时。做一张A型桌子获利润2元，做一张B型桌子获利润3元，假定该厂能够卖出工人所做的全部桌子，试问每天要做每种型号的桌子多少张，才能获得最大利润？

我们似乎感到问题的叙述头绪纷乱，但可借助于表格的形式来认识它们，这种表格称为已知件表。该例的已知件表如下表：

表中对于每一种型号的桌子，指明木工所花的时间和油

| 单位 产品 \ 产品 工时 \ 工序 | A型 | B型 | 每天可利用时间 | |
|---|---|---|---|---|
| 木　工 | 1 | 2 | 8 | （小时） |
| 油　工 | 3 | 1 | 9 | （小时） |
| 利　润 | 2 | 3 | | （元） |

工所花的时间，单位是小时；指明每张桌子的利润，单位是元；以及指明每天可利用的工作时间，单位是小时。

我们分别用$x_1$、$x_2$来表示每天所做A型、B型桌子的数目，那么木工和油工每天的工时分别是（$x_1+2x_2$）和（$3x_1+x_2$），但两者每天的工时分别不得超过8和9．

型桌子要花1个小时，而装配一张B型桌子要花2小时，油工油漆一张A型桌子要花3小时，而油漆一张B型桌子要花1个小时．木工每天工作不得超过8个小时，而油工每天工作不得超过9个小时．做一张A型桌子获利润2元，做一张B型桌子获利润3元，假定该厂能够卖出工人所做的全部桌子，试问每天要做每种型号的桌子多少张，才能获得最大利润？

我们似乎感到问题的叙述头绪纷乱，但可借助于表格的形式来认识它们，这种表格称为已知件表．该例的已知件表如下表：

表中对于每一种型号的桌子，指明木工所花的时间和油

| 成本(元)／每件 工件 机器 | 甲 | 乙 | 丙 | 机器加工工件限额(件) |
|---|---|---|---|---|
| Ⅰ | 2 | 1 | 3 | 149 |
| Ⅱ | 3 | 2 | 1 | 158 |
| Ⅲ | 1 | 2 | 4 | 184 |
| Ⅳ | 2 | 3 | 2 | 136 |
| 各工件总任务(件) | 250 | 156 | 200 | |

表中底行各数表示各工件应完成的任务，最后一列数表示各台机器只能加工工件的限制数。问：如何安排生产计划，才能既保证完成任务，又能使总加工成本最小。

设机器Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ加工甲、乙、丙三种工件的数量依次为：$x_1$，$x_2$，$x_3$；$x_4$，$x_5$，$x_6$；$x_7$，$x_8$，$x_9$；$x_{10}$，$x_{11}$，$x_{12}$。则由题意可得如下线性规划数学模型，使总成本 $(2x_1+x_2+3x_3+3x_4+2x_5+x_6+x_7+2x_8+4x_9+2x_{10}+3x_{11}+2x_{12})$ 为最小，并满足

$$
\begin{cases}
x_1+x_2+x_3 \leqslant 149 \\
x_4+x_5+x_6 \leqslant 158 \\
x_7+x_8+x_9 \leqslant 184 \\
x_{10}+x_{11}+x_{12} \leqslant 136 \\
x_1+x_4+x_7+x_{10} \geqslant 250 \\
x_2+x_5+x_8+x_{11} \geqslant 156 \\
x_3+x_6+x_9+x_{12} \geqslant 200 \\
x_1, x_2, \cdots, x_{12} \geqslant 0
\end{cases}
$$

由上可见，线性规划问题的数学模型有不同的形式，但

它必须具有三大要素：

（1）一组变量（$x_1$，$x_2$，…，$x_n$），它表示某一个方案；

（2）这组变量所应满足的一组限制性条件，可以用一组线性等式或线性不等式来表示；

（3）一个目标函数，这个函数是变量的线性函数，按研究的问题不同，可能要求目标值最大，也可能要求目标值最小。

因此，线性规划数学模型的一般形式为：

$$\min(\max)\ S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1}$$

$$S.t\ \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_n \quad (2) \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \quad (3) \end{cases}$$

线性函数（1）称为目标函数，符号min和max分别表示目标函数取最小值和最大值；（2）和（3）称为约束条件，用符号S.t表示。其中（2）称为前约束条件，（3）称为后约束条件。

现实问题往往是错综复杂的。一个线性规划模型的约束条件和变量一般很多，因此，在建立模型时，宜按下列步骤进行：

第一，分析条件。最好把相关的条件列成表格，这样就可以把诸多复杂的关系有条不紊地表示出来。

第二，确定变量。应根据问题的要求而设未知变量。

第三，列出约束条件。注意把所有的约束条件都找出来，关系号“≥”、“≤”和“=”不能用错。

第四，写出目标函数。注意问题是求最大，还是求最小。

## §1.2 线性规划问题的标准型

由上节知，线性规划问题可[illegible]的形式。为了便于以后讨论，我们规定线性规划[illegible]形式(标准型)为：

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1}$$

$$S.t \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases} \tag{2}$$

其缩写形式为

$$\min S = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{3}$$

$$S.t \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i=1,\ 2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1,\ 2,\cdots,n) \end{cases} \tag{4}$$

如果$b_i \geqslant 0$，则称为非负标准型。

用向量描述，则为

$$\min S = CX \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} P_jx_j = b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

其中$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad P_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

用矩阵描述，则为

$$\min S=CX \tag{8}$$

$$\begin{cases} AX=b \\ X\geqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

其中$A=(P_1 \quad P_2\cdots P_n)$是系数矩阵。

当系数矩阵A的秩$R(A)=m$，即A的秩刚好等于前约束方程个数时，则称该标准型为满秩标准型。

对于非标准型线性规划问题，一律化为标准型处理。

1° 当问题为极大时，即求

$\max S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

则改为

$\min S'=-(c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n)$

其中$S=-S'$；

2° 当前约束条件有不等式，如

$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n\leqslant b_k \quad (k=1,2,\cdots m)$

则加入松弛变量$x_{n+1}\geqslant 0$，改为

$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n+x_{n+1}=b_k$；

如果有

$a_{t1}x_1+a_{t2}x_2+\cdots+a_{tn}x_n\geqslant b_t \quad (t=1,2,\cdots,m)$

则引入松弛变量$x_{n+2}\geqslant 0$，而改为

$a_{t1}x_1+a_{t2}x_2+\cdots+a_{tn}x_n-x_{n+2}=b_t$。

显然，松弛变量在目标函数中系数为0。

3° 当$b_i<0$（$i=1,2,\cdots,m$）时，则在第i个方程两边同乘以-1。

4° 当第j个变量$x_j$无非负限制时，则引入两个非负变量$x'_j\geqslant 0$，$x''_j\geqslant 0$，令$x_j=x'_j-x''_j$代入目标函数与约束条件中即可。

**例** 化下面线性规划问题为非负标准型：

$$\max S=x_1-7x_2$$

$$\begin{cases}12x_1-9x_2+x_3\leqslant -7\\ 9x_1+6x_2\leqslant 4\\ x_1,\ x_3\geqslant 0\end{cases}$$

**解** 把前约束第一个式子两边乘以－1得：

$$\max S=x_1-7x_2$$

$$\begin{cases}-12x_1+9x_2-x_3\geqslant 7\\ 9x_1+6x_2\leqslant 4\\ x_1,\ x_3\geqslant 0\end{cases}\tag{10}$$

引入$x_4\geqslant 0$，$x_5\geqslant 0$，$S'=-S$，(10)式变为：

$$\min S'=-x_1+7x_2$$

$$\begin{cases}-12x_1+9x_2-x_3-x_4=7\\ 9x_1+6x_2+x_5=4\\ x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_5\geqslant 0\end{cases}\tag{11}$$

再引入$x_2'\geqslant 0$，$x_2''\geqslant 0$，且令$x_2=x_2'-x_2''$，（11）式变为

$$\min S'=-x_1+7x_2'-7x_2''$$

$$\begin{cases}-12x_1+9x_2'-9x_2''-x_3-x_4=7\\ 9x_1+6x_2'-6x_2''+x_5=4\\ x_1,x_2',x_2'',x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}\tag{12}$$

此时，原问题已变为非负标准型了。

## 习　题　一

1．有两个矿A、B，每年产矿石分别为65万吨和80万吨，供应4个工厂。这4个工厂需用矿石分别为38万吨、47万吨、26万吨和34万吨。A矿离这4个工厂的距离分别为300公里、250公里、180公里和220公里，B矿离这4个工厂的距离分别是150公里、200公里、270公里和110公里。问这两个矿如何供应矿石，才能使运输力最小？

2．把上题A矿的产量由65万吨改为74万吨，则如何供应矿石，才能使运输力最小？

3．在第一题中把B矿的产量由80万吨改为75万吨，则如何供应矿石，才能使运输力最小？

（以上三题为运输问题；第1题属于产销平衡，第2题属于产大于销，第3题属于销大于产。）

4．某厂有3种机床$A_1$、$A_2$和$A_3$，生产某种产品的两种零件$B_1$和$B_2$。产品所需要的这两种零件数目之比是3:2。机床$A_1$每日生产零件$B_1$、$B_2$分别是25和18个，机床$A_2$分别生产30和45个，机床$A_3$分别生产16和50个。问如何组织生产，才能使总产量最大？（生产组织问题）

5．某化工厂生产A、B两种产品。生产每吨A产品需煤10吨，石灰石6吨和盐酸2.5吨；生产每吨B产品需煤15吨，石灰石18吨和盐酸2吨。生产一吨A、B产品可分别获得利润5000元和8200元。该厂现有煤、石灰石和盐酸分别为750吨、530吨和95吨。问如何制定生产方案，才能使在现有条件下获得利润最多？（计划问题）

6．某工地需要3种长度不同的钢管料：2.5米、3.6米和7.8米。这3种管料的需要量分别是95根、130根、67根。原材料长为12米（数量充分多）。请选择一种截料方案，使既满足需要，而用的原材料根数又最少。（下料问题）

7．用3种原料$B_1$、$B_2$、$B_3$制造具有4种成份$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$的产品。各原料单价，单位产品需各成份最低数，以及各种原料所含成份的数量如下表所示，问应如何配料，才能使产品成本最低。（配料问题）

| 每单位原料含各成份数量 \ 原料 / 原料所含成份 | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | 每单位产品需各成份数量 |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 5 | 8 | 55 |
| $A_2$ | 7 | 0 | 4 | 62 |
| $A_3$ | 1 | 8 | 12 | 110 |
| $A_4$ | 0 | 9 | 15 | 97 |
| 原料单价 | 7 | 5 | 6 | |

8．某养鸡专业户养鸡1千只，用动物饲料和谷物饲料混合喂养，每天每只鸡平均吃混合饲料1斤，其中动物饲料占的比例不得少于1／5。动物饲料每斤0.10元，谷物饲料每斤0.08元，饲料公司每周只保证供应谷物饲料5000斤，问饲料应怎样混合，才能使成本最低？

9．化下列线性规划的一般形式为标准形式：

（1）$\min S=(2x_1+5x_2)$

$$\begin{cases} 3x_1+8x_2\leqslant 15 \\ 2x_1-5x_2\leqslant 7 \\ x_1-3x_2=-27 \\ x_1\ ,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

(2)　$\max S=7x_1-8x_2$

$$\begin{cases} 13x_1+17x_2\geqslant 7 \\ 5x_1+7x_2\leqslant -3 \\ x_1,\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max S=x_1-2x_2+\frac{3}{2}x_3$

$$\begin{cases} 12x_1-9x_2+3x_3\geqslant 8 \\ 7x_1+9x_3\leqslant -9 \\ x_1+x_2+x_3\geqslant 10 \\ x_1,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

(4)　$\max S=2x_1-5x_2$

$$\begin{cases} 25x_1+37x_2-45x_3-22x_4\leqslant 15 \\ 3x_1-x_2+9x_3\geqslant -6 \\ x_1+x_2\leqslant 31 \\ x_1,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

# 第二章　线性规划问题的解法

设线性规划问题为

$$\min(\max) S = CX \qquad (1)$$

$$S.t\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2)$$

我们把满足约束条件（2）的一组变量值：$(x_1\ \ x_2 \cdots x\ )=X'$称为线性规划问题的可行解，所有可行解的全体称为可行解集；把既满足约束条件(2)，并且使目标函数取得最小值(或最大值)的一组变量值：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)=X'$称为最优解，所有最优解的全体称为最优解集。常记最优解为$X^*$，求取$X^*$，即称为求解线性规划问题。

## §2.1　两个变量的线性规划问题的图解法

两个变量的线性规划问题较简单，可以用图解法求解，既直观，又可通过图解法，总结出求解多个变量的线性规划问题的一般原理。下面我们仅以例说明这种方法。

**例 1**　$\max S = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 5 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 9 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

**解** 把$x_1$，$x_2$看成坐标平面上点的坐标，$x_1$作为横坐标，$x_2$作为纵坐标，那么满足所有约束条件中每一个不等式的点集就构成一个半平面。因为约束条件是由5个带等号的不等式组成，所以满足约束条件的点集是5个半平面的交集，即图 2－1中凸多边形OABCD。因此，凸多边形OABCD上每一点的坐标都是线性规划问题的一个可行解．而凸多边形上点的全体构成这一线性规划问题的全部可行解。即可行解集。

下面我们在可行解集中找最优解。即在凸多边形OABCD中寻找使目标函数最大的点。为此，让S取定两个确定值，例如S＝1与S＝2，作出直线$l_1$：$x_1+3x_2=1$及直线$l_2$：$2x_1+3x_2=2$。显然，这两条直线平行，并且任一点上所有点的目标函数值都相等。我们称这样的直线为等值线。按$l_1$到$l_2$的方向（即S增大的方向）平行移动等值线，

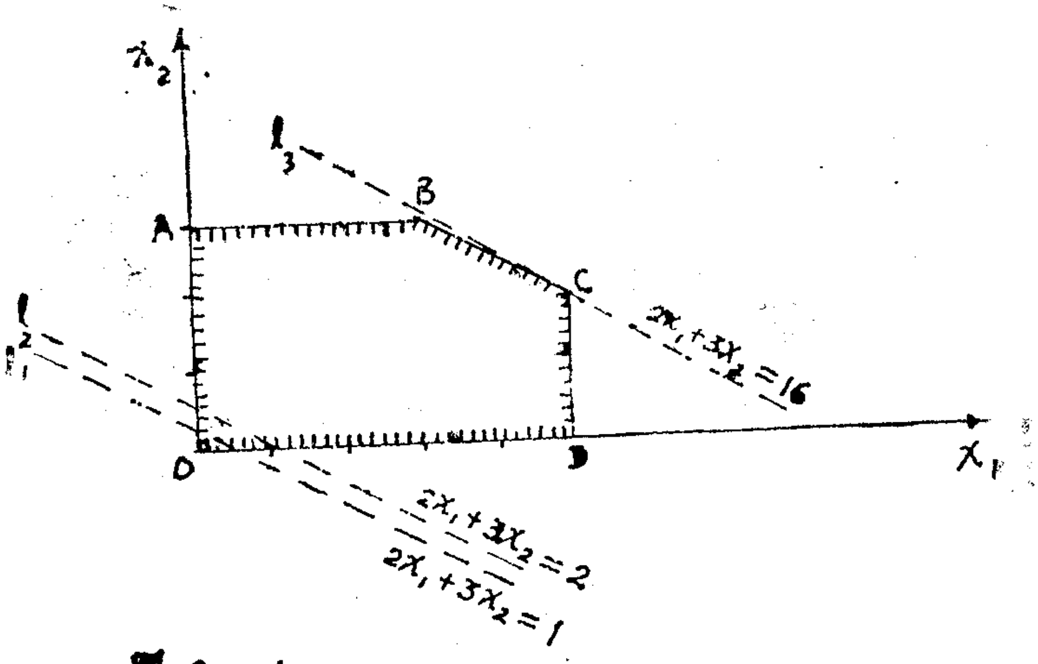


图 2－1