



光弹性矩阵 原理和方法

肖永谦 编著
段自力



GUANGTANXING
JUZHEN
YUANLI HE FANGFA



华中理工大学
出版社

分布参数系统 最优控制过程数学理论

张学铭 著

山东科学技术出版社

一九八〇年·济南

内 容 简 介

本书别具一格地采用琼斯(Jones)矢量和琼斯矩阵的数学方法阐述光弹性。其物理概念清晰、语言简洁、直观性强，以飧读者。

全书是作者30多年来的教学和科研工作的经验积累。其中还收集了国内外光弹性方法的最新成就。书中内容包括了光弹性的光学知识、平面光弹性、三向光弹性、光弹性材料和模型的制作、光弹性贴片法、全息光弹性、散光光弹性、热光弹性、动态光弹性、光弹性在断裂力学中的应用、相似理论和误差分析理论等。书中采用的实例可供读者借鉴。本书还简练地介绍了整体光弹性原理和实例。

此书可作为理工院校机械类、水工、土建类、工程力学等专业本科生或研究生的教材；亦可供工程技术人员和实验力学工作者阅读参考。

前 言

我们编著《光弹性矩阵原理和方法》这本书，是试图用矩阵偏振光学和矩阵弹性力学来阐述光弹性学的基本原理，使它具有严密的理论体系；同时，又从应用的角度考虑，较全面地介绍光弹性实验数据分析方法和主要的实验技术。

全书共分十二章。第一章光弹性的光学基础。该章中简略地介绍了光的电磁波理论，系统地介绍了矩阵偏振光学中的琼斯(Jones)矢量和Jones矩阵。第二、三章讲述了平面光弹性；第四章光弹性材料与模型，着重介绍了国内外制造三维复杂模型的先进方法和经验。第五章三向光弹性，是本书重点之一。本章中用矩阵方法详细地导出了三向光弹性几种常用方法的方程及各项实验技术，还概括地介绍了整体光弹性的原理和应用。第六、七、八章分别阐述激光散光光弹性、全息光弹性及光弹性贴片法。第九、十章叙述了光弹性在断裂力学中的应用、动光弹性和热光弹性的概要。第十一章和第十二章为误差理论与实验数据处理和相似理论。

考虑到力学专业本科生和研究生均修过弹性力学课程，同时照顾到非力学专业师生及工程技术人员参考，把有关弹性力学基本方程的矩阵表达形式，作为附录列于书末，以备查阅。附录中还收集了常用光弹性方法计算机专用程序，以资借鉴。

本书是在作者三十多年的教学工作和科研工作经验的基础上，经反复修改编写而成。同时，还力求把国内外关于光弹性方法的新理论和新技术反映到本书中，特别是将国内各理工科院校和科研设计单位的先进经验和技術，介绍给读者。但限于作者的水平 and 经验，难免有不妥和疏漏之处，望读者批评指正。

本书第一至八章，第十一，十二两章及附录I、II由肖永谦撰

写：第九、十两章由段自力撰写。

全书承彭光履高级工程师(教授级)及张立中教授、屈大梁副教授的仔细审阅，并提出了许多宝贵意见，特表示衷心感谢。

编著者

1990年3月于武汉

目 录

绪论	(1)
----------	-------

第一章 光弹性的光学基础

§ 1-1 光的本性	(4)
§ 1-2 光波及其复振幅矢量	(6)
§ 1-3 相差、程差和光的干涉	(8)
§ 1-4 光的反射和折射	(9)
§ 1-5 双折射与折射率椭球	(11)
§ 1-6 1/4波片与各型偏振光	(16)
§ 1-7 Jones矢量	(19)
§ 1-8 Jones矩阵	(25)
§ 1-9 Jones运算	(31)
§ 1-10 偏光弹性仪的安装、使用和维护	(32)

第二章 平面光弹性矩阵原理和测试方法

§ 2-1 平面问题应力-光学定律	(38)
§ 2-2 受力模型在平面偏振光场中的光效应	(39)
§ 2-3 应力模型在圆偏振场中的光效应	(43)
§ 2-4 等色线的观测与记录	(46)
§ 2-5 非整数级条纹的测定	(48)
§ 2-6 等倾线的观测与记录	(56)
§ 2-7 主应力迹线	(60)

第三章 平面光弹性应力计算

§ 3-1 边界应力的计算	(63)
§ 3-2 应力集中系数的测定	(65)
§ 3-3 模型内部应力的计算	(66)
§ 3-4 剪应力差法	(68)
§ 3-5 图解积分法	(75)
§ 3-6 应用实例——销孔板的应力分析	(80)

§ 3-7 斜射法.....	(85)
§ 3-8 主应力和的数值解法.....	(95)
§ 3-9 关于光弹性方法的自动化.....	(100)
§ 3-10 平面问题中模型应力换算到原型.....	(102)

第四章 光弹性材料和模型

§ 4-1 概述.....	(106)
§ 4-2 制造环氧型材料的原料及配比.....	(107)
§ 4-3 铸造平板和块体光弹性材料的模具.....	(109)
§ 4-4 精密铸造立体模型的模具.....	(114)
§ 4-5 环氧树脂模型的浇铸.....	(121)
§ 4-6 关于环氧树脂模型质量的几个问题.....	(123)
§ 4-7 低弹模光弹性材料的制造.....	(125)
§ 4-8 环氧树脂材料的机械加工和粘接.....	(128)
§ 4-9 光弹性材料主要性能的测定.....	(131)
§ 4-10 聚碳酸酯材料.....	(137)

第五章 三向光弹性

§ 5-1 应力的冻结.....	(140)
§ 5-2 次主应力.....	(142)
§ 5-3 应力-光学定律.....	(144)
§ 5-4 三向模型表面应力的测定.....	(148)
§ 5-5 三向模型内部应力的测试分析.....	(156)
§ 5-6 等色条纹的细化和倍增.....	(164)
§ 5-7 模型的切片和斜射.....	(169)
§ 5-8 应用实例——三心双曲薄拱坝的应力分析.....	(173)
§ 5-9 三向光弹性混合解法.....	(180)
§ 5-10 三向光弹性数据采集和处理的自动化.....	(186)
§ 5-11 混合法的应用实例——某水电站预应力闸墩锚块三向光弹性全场应力分析.....	(194)
§ 5-12 关于整体光弹性原理.....	(199)
§ 5-13 三维模型整体特征参量的测定.....	(205)
§ 5-14 整体光弹性的应用实例.....	(210)

第六章 散光光弹性

- § 6-1 光的散射..... (221)
- § 6-2 散光应力-光学定律..... (222)
- § 6-3 应力模型在散光平面偏振场中的效应..... (224)
- § 6-4 次主应力方向的测定..... (226)
- § 6-5 散光条纹级次的测定..... (227)
- § 6-6 圆偏振光入射受力模型的散射效应..... (229)
- § 6-7 两次观测法..... (231)
- § 6-8 散光光弹仪..... (233)
- § 6-9 散光法的应用..... (234)
- § 6-10 三向模型表面应力的散光法测定..... (240)
- § 6-11 三向模型内部应力的散光测定新方法..... (242)
- § 6-12 利用双折射等效原理测定三向模型中的应力分布..... (247)
- § 6-13 散光法分析一般三维应力的实例..... (251)

第七章 全息光弹性

- § 7-1 全息摄影的基本概念..... (254)
- § 7-2 光波干涉和衍射间的关系..... (255)
- § 7-3 全息摄影原理的数学描述..... (257)
- § 7-4 全息干涉的两次曝光法..... (259)
- § 7-5 组合条纹图中等差线的消除..... (268)
- § 7-6 实时全息干涉法..... (270)
- § 7-7 图象全息法..... (272)
- § 7-8 三维全息光弹性..... (273)
- § 7-9 等和条纹级次的判读..... (275)
- § 7-10 实验设备与实验技术..... (276)

第八章 光弹性贴片法

- § 8-1 反射式光弹仪简介..... (280)
- § 8-2 光弹性贴片法的应力或应变-光学定律..... (281)
- § 8-3 等倾线参数与等色条纹的测定..... (282)
- § 8-4 应变或应力分离方法..... (284)
- § 8-5 贴片法应用于弹-塑性应变分析..... (286)

§ 8-6	光弹性贴片的增强效应及其修正	(288)
-------	----------------	-------

§ 8-7	关于光弹性贴片的灵敏度及粘贴问题	(291)
-------	------------------	-------

第九章 光弹性法在断裂力学中的应用

§ 9-1	概述	(293)
-------	----	-------

§ 9-2	光弹性法测定应力强度因子的基本原理	(293)
-------	-------------------	-------

§ 9-3	光弹性测定应力强度因子的误差分析	(309)
-------	------------------	-------

§ 9-4	光弹性测定应力强度因子的实验技术	(313)
-------	------------------	-------

第十章 热光弹性与动态光弹性

§ 10-1	热应力、温度场和热光弹性	(317)
--------	--------------	-------

§ 10-2	热负荷模拟法的基本内容	(318)
--------	-------------	-------

§ 10-3	热光弹性模型材料	(322)
--------	----------	-------

§ 10-4	热光弹性实验方法及其应用举例	(324)
--------	----------------	-------

§ 10-5	弹性动力学、应力波和动态光弹性	(326)
--------	-----------------	-------

§ 10-6	动态光弹性的基本问题	(328)
--------	------------	-------

§ 10-7	动态等色条纹的记录和数据处理	(333)
--------	----------------	-------

§ 10-8	动态光弹性在断裂力学中的应用	(338)
--------	----------------	-------

§ 10-9	多火花式动态光弹性仪(WZDD-I型)	(340)
--------	---------------------	-------

第十一章 误差分析与实验数据处理

§ 11-1	误差的基本概念	(346)
--------	---------	-------

§ 11-2	精密度、准确度和精确度	(348)
--------	-------------	-------

§ 11-3	随机误差的理论基础	(349)
--------	-----------	-------

§ 11-4	标准误差的意义与计算	(352)
--------	------------	-------

§ 11-5	概率计算与测量结果的置信度	(355)
--------	---------------	-------

§ 11-6	粗差的剔除	(359)
--------	-------	-------

§ 11-7	系统误差的发现与消除	(362)
--------	------------	-------

§ 11-8	函数误差	(365)
--------	------	-------

§ 11-9	有效数字与计算法则	(374)
--------	-----------	-------

§ 11-10	实验数据的表示方法	(375)
---------	-----------	-------

第十二章 相似理论

§ 12-1	相似的基本原理	(380)
--------	---------	-------

§ 12-2	量纲分析和 π 定理	(382)
--------	----------------	-------

§ 12-3	弹性结构的静力相似.....	(385)
§ 12-4	线弹性结构的静力相似.....	(387)
§ 12-5	利用基本方程确定相似判据.....	(389)
§ 12-6	当 $\mu_M \neq \mu_H$ 时的应变测量与相似误差.....	(392)

附录I 弹性力学的基本方程

§ I-1	应力张量.....	(396)
§ I-2	斜面上的应力、边界条件.....	(397)
§ I-3	坐标轴旋转时应力分量的变换.....	(400)
§ I-4	主应力、应力张量不变量.....	(402)
§ I-5	总应力椭球.....	(404)
§ I-6	平衡微分方程.....	(406)
§ I-7	几何方程与物理方程.....	(407)
§ I-8	按应力求解问题的基本方程.....	(409)
§ I-9	关于圣维南(Saint-Venant)原理.....	(411)

附录II 光弹性数据处理常用程序

§ II-1	二维剪应力差法源程序.....	(412)
§ II-2	三维剪应力差法源程序.....	(416)
§ II-3	用差分迭代法求解Laplace方程的源程序.....	(423)
参考文献.....		(429)

绪 论

光弹性方法,是以模型实验为主的一种应力分析方法。光弹性模型是由具有光学灵敏性的透明材料制成。通过偏振光,测定受载模型暂时双折射效应引起的干涉条纹,算出模型中的应力;再根据模型相似原理,把模型应力换算到原型结构或零件上。显然,光弹性应力分析方法有如下特点:

1) 可全场而直观地研究结构、零件的应力状态。“应力”本来就是一个看不见、摸不着的抽象概念;但用光弹性方法研究时,可从全场的干涉条纹图,一目了然地看到整个结构应力场的全貌。

2) 可方便而准确地测定结构、零件的应力集中区域和应力集中系数。

3) 可迅速而准确地测定零件的边界应力或表面应力。

4) 可求出三维结构内部任意部位或断面的应力分布。

5) 可较方便地按强度条件对结构、零件进行优化设计。因此,它是提高产品质量的重要手段之一。

光弹性方法的局限性,主要是复杂模型的制作较困难,某些情况下模型相似律不能完全满足等。

光弹性学的发展过程较长。早在1815年前后,布鲁斯特(D. Brewster)已发现光弹性物理现象。此后,约在1841~1853年间,纽曼(Franz Ernst Neumann)和麦克斯韦(James C. Maxwell)各自提出了应力-光学定律,证明了光学各向异性介质中任一点的主应力与该点的主折射率成正比。1854年前后, M.G. Wertheim 用实验证实了麦克斯韦的应力-光学定律,奠定了光弹性方法的物理基础。但是,直到本世纪初,赛璐珞等透明工业塑料问世后,光弹性方法才开始应用于工程实际。1931年,柯克尔与菲隆(E.

G.Coker and N.G.Filon)发表“A Treatise on Photo-elasticity”一书,把光弹性发展成为一门系统的工程应用学科——光测弹性力学。此后,美国的弗罗赫特(M.M.Frocht)于1941~1948年,先后发表“光测弹性力学”一书第I、II卷,为光弹性力学发展成精确定量的应力分析方法做出了重要贡献。

本世纪50年代初,环氧树脂塑料问世,这是一种灵敏度较高,可铸成大块体的新型光弹性材料。这促使三向光弹性理论和实验技术进一步发展成熟,在各工程领域得到更广泛的应用。

60年代初激光器的出现,给光弹性技术的发展带来新的活力。激光为人们提供了光强度大、相干性和准直性都很好的新光源,激光使全息光弹性和激光散光光弹性等新方法得到迅速发展。目前,各国学者正研究开拓这些新方法的应用领域。

计算机技术的迅速发展和广泛应用,对光弹性方法既是强大的挑战,亦使它产生重大的技术变革。所谓挑战,是有较多的力学问题可用计算方法求解。于是,有人就认为,用计算机分析结构、零件的应力,总比光弹性实验方法更快、更精确。事实上,计算机处理的是数学模型。在把原型变为数学模型的过程中,必须做某些人为的假设,比如离散化,位移分布模式等。这类假设,一点也不少于用光弹性方法中把原型变为物理模型过程中所做的假设。况且,物理模型与数学模型本质上是不同的。对于某些力学问题,数学模型可能更接近原型;但对某些较复杂的力学问题,则物理模型往往更接近原型。实践表明,对工程问题的力学分析,计算与实验研究的方法不能互相取代,只能是互相补充和验证,才可能得到较正确的结果。

光弹性方法结合计算机的技术变革,主要体现在实验仪器的自动化或实验数据的自动采集和处理,以及实验分析与数值求解相结合的杂交法的发展。对于以上两方面,本书中介绍了目前国内外较流行且简便易行的几种实验数据自动采集和处理的方法,以及杂交方法。

第一章 临界力

§ 1. 平衡的三种形式

物体的平衡可能是稳定的、不稳定的和随遇的。如果物体从一个位置稍许偏移后仍能回复到原来位置,这种平衡状态称为稳定平衡。如果物体稍许偏移后即继续离开而不再回到原来位置,则称为不稳定平衡。如果物体偏移后就在新位置上保持平衡,则称为随遇平衡。

一个放在碗形曲面内的重球是稳定平衡的例子,放在凸起(倒置)的碗形曲面顶点的球属于不稳定平衡,而同一球放在水平面上便是随遇平衡(图 1)。

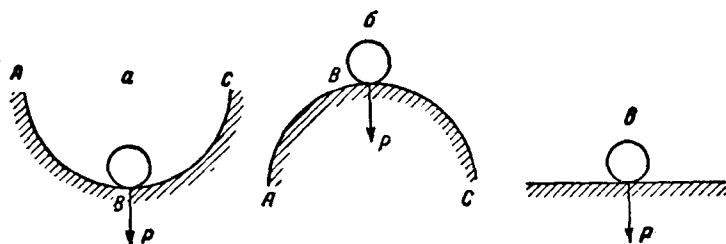


图 1

平衡的性质可随着从平衡位置偏移的方向而异。例如,用一圆柱形代替常用的碗形,使圆柱的母线成水平,曲线 ABC 为铅直平面与此圆柱形的截面(图 1-a)。当球从其平衡位置沿母线方向偏移时则成随遇平衡,而沿所有其余方向偏移时都是稳定平衡。至于图 1-b 所示情形,沿着水平母线的偏移也是随遇平衡,而沿所有其余方向的偏移都是不稳定平衡。

设取一鞍状曲面(双曲抛物面),将球置于曲面的中点。这里平衡的性质也随着不同的偏移方向而异。在一个方向,平衡是稳定的,而在其余的方向,则是不稳定的。我们补充说明,在工程结构中只容许稳定的平衡情况,沿所有各方向的偏移都应该保持稳定。象随遇平衡的情形,在工程问题中并不认为是平衡的。

§ 2. 稳定的分析准则

大家知道,按照在平衡状态下的虚位移原理,当物体自其平衡位置作无限小的偏移时,所有作用在物体上的力所作的功等于零:

$$\delta A = \sum (\bar{X}\delta x + \bar{Y}\delta y + \bar{Z}\delta z) = 0. \quad (1)$$

我们进一步来研究从平衡位置作有限小偏移时的功 ΔA 。可以证明:假使 ΔA 是

第一章 光弹性的光学基础

§ 1-1 光的本性

人们对光的认识经历了漫长的、逐渐深化的过程。首先从光的影子现象，初步认识到光的直线传播特性。如早在公元450年，我国《墨经》中就有“景倒，在午有端”的记载。这是说自人发出的光交针孔而成光束，“足蔽下光成景于上，首蔽上光成景于下”，故得倒像。

在1665—1690年间，牛顿和惠更斯(C. Huygens)先后创立光的弹性微粒流说和波动说。

从17至18世纪，微粒说依赖牛顿的权威，颇为流行。到19世纪，由于托马斯·杨(Thomas Young)和非涅耳(A. J. Fresnel)的工作，使光的波动说逐渐完善并战胜了光的微粒说。这时期光的波动说已能成功地解释光的直线传播，光的反射、折射和干涉、衍射等现象。但是，在说明光的横波特性时，仍离不开以太介质的假设。

1860—1892年间，麦克斯韦(C. Maxwell)的电磁场理论和赫芝(Hertz)的相应实验，证明了光是电磁波。把光学现象和电磁现象联系起来，说明了光是物质的一种复杂的运动形式。电磁波的横波特性，使光波的横波特性自然地得到证实，使光的波动说摆脱以太的假设而进一步完善。这把人们对光的本性的认识，向前推进了一大步，但仍不能解释光压、光电效应等现象。

直至1905年，爱因斯坦(Albert Einstein)据辐射量子论中辐射能只与频率有关的假定，提出了光子的概念。认为光能集中在被称为光子或光量子的微粒上，且只与频率有关。从而成功地解

释了光电效应的规律。

近代物理学对光的本质认识是：光和实物一样，是物质的一种形式。它同时具有波和微粒(光量子)的性质。这就是自然辩证法矛盾的对立统一律关于光的性质上的表现。

光弹性中遇到的各种光学现象，如折射、偏振、干涉、衍射等，均表现出光的波动性。所以，我们将只涉及光的电磁理论。

按电磁波理论，光的颜色是由光波的频率所确定。各种波长的光波在真空中的传播速度是相同的，故光的颜色也可按光在真空中的波长来区分。可见光的波长范围为 $4000 \sim 7800 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-8}$ 厘米)。白光是各色光的混合。

据电磁场理论，电磁波中的电场矢量 $\vec{E}$ 和磁场矢量 $\vec{H}$ 可用一对同步正交的正弦或余弦波来表示，如图1-1。它们的振动均垂直于波的传播方向，故光波是横波，后面将从理论上证明这一点。据实验，光的效应大多是电场矢量 $\vec{E}$ 产生的。故研究光波时，只考虑电场矢量 $\vec{E}$ ，并称之为光矢量。

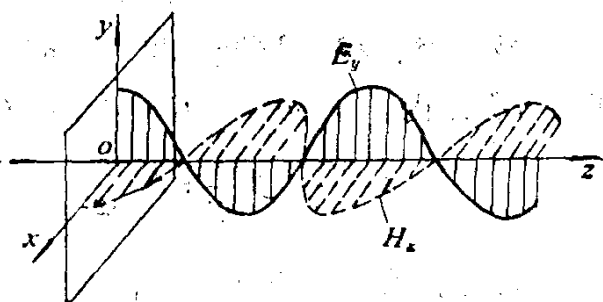
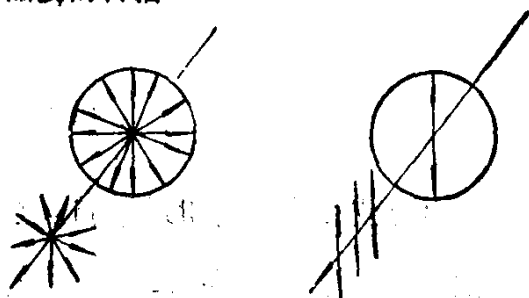


图1-1 电磁波的传播

各种光源发出的光波，一般是在垂直于传播方向的平面内的各个方向振动。这种光称为自然光。自然光在穿过某些透明介质，或以某特定角在某些介质面上反射之后，光波被限制在某一确定方向振动，而其余方向的振动被



a) 自然光 b) 线偏振光

图1-2 自然光与线偏振光

大大削弱甚至完全吸收。这种只在一个方向振动的光波，称为线偏振光或平面偏振光，见图1-2。一般说，光矢量的振动方向有一定规律的，称为偏振光。

§ 1-2 光波及其复振幅矢量⁽¹⁾⁽²⁾

众所周知，在不存在自由电荷和传导电流($\rho=0, j=0$)的介质中，描述电磁波传播的微分形式的麦克斯韦方程组为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

其中各量均采用国际单位制。前四个方程是场的方程，后两个为物质方程。式中 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 分别为电场矢量和磁场矢量，简称电矢量和磁矢量； $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{B}$ 分别为电位移和磁感应强度； ϵ 为介质的介电系数； μ 为导磁系数，它们表征介质的电磁特性。并通过物质方程把四个场矢量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{H}$ 联系起来，故必须把物质方程也列入麦克斯韦方程组内。 ∇ 为哈密尔顿算子，在直角坐标系中

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

由式(1-1)可导得波传播方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \mathbf{H} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中 v 为波在介质中的传播速度， $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ 。电磁波在真空中的传播速度 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3 \times 10^8$ 米/秒。 ϵ_0 、 μ_0 分别为真空中的介电系数和导磁系数， $\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12}$ C²/N·m²(库²/牛顿·米²)， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N·s²/C²。对于非磁性物质， $\mu = \mu_0$ 。

由于电矢量产生光效应，下面，我们只讨论电场矢量。

对于沿 z 传播的平面单色波，方程(1-2)的通解为

$$\mathbf{E} = f_1(z - vt) + f_2(z + vt). \quad (1-3)$$

方程(1-3)是时间和空间的周期函数，因而方程(1-2)的特解可取为以下形式

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= A \cos(kz \pm \omega t + \alpha_0) \\ &= A \cos\left[2\pi\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \alpha_0\right], \\ \mathbf{E} &= A \sin(kz \pm \omega t + \alpha_0) \quad \text{等等。} \end{aligned}$$

我们取波函数为

$$\mathbf{E} = A \sin(\omega t - kz + \alpha_0) \quad (1-4)$$

的形式。以上各式中 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 常称为波数； λ 为波长，是波函数的空间周期； $\nu = \frac{1}{T}$ 为波频率，其中 T 为振动周期； $\omega = 2\pi\nu$ 称为角频率或角速度； $v = \frac{\omega}{k}$ 为波的传播速度。 A 为振幅， α_0 为初位相。

单色平面波的传播如图1-3。

为减免繁琐的三角运算，常把波函数表为复数形式

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, z) &\doteq A \exp[i(\omega t - kz + \alpha_0)] \\ &= \mathbf{E}(z) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (1-5)$$

$$\text{其中 } \mathbf{E}(z) = A \exp[i(-kz + \alpha_0)] = A e^{i\varphi}, \quad (1-6)$$

式中 $\varphi = -kz + \alpha_0$ 称为空间位相。 $\mathbf{E}(z)$ 称为复振幅矢量或简称复

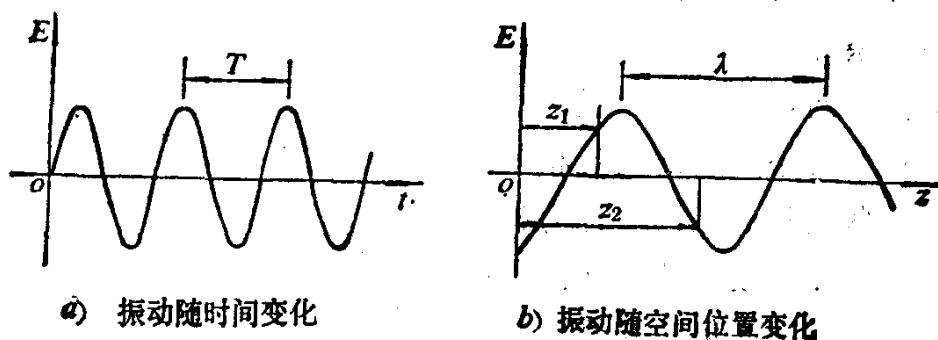


图1-3 平面单色波的传播