复变函数论习题解答

（根据钟玉泉编《复变函数论》1979年版）

代立新

荆州师专数学科分析教研室

2，3，

说　　明

本题解是利用1983年下半年在武汉大学进修函数论选读课时的空余时间，将以前在教学中所做习题加以整理、修订而成的，它是钟玉泉编《复变函数论》书中全部习题的解答。

在整理修订期间，个别题目曾请教过钟玉泉付教授和武汉大学数学系肖修治付教授、钟寿国老师，都得到了热情的指导。在此表示衷心感谢。

本题解原想只作我校教学参考，在武汉大学同窗进修的兄弟院校老师的积极建议和支持下，方才问世，仅供教学参考和进修教师，函授学员学习该门课程时参考。

题解铅印出版得到了学校领导、教材科、数学科、师训科、印刷厂和全校部分教职工的热情支持，特别是印刷厂的广大干部和工人为争取时间，压缩版面作出了艰巨的努力。我校数学科吴光润老师、荆州地区教师进修学院柯云老师在铅印出版中做了不少工作，在此一并表示衷心感谢。

由于水平有限，错误难免，恳请读者批评指正。

编　　者　1984年5月

目　录

第一章　复数与复变函数

1．验证：

（1）　$(\sqrt{2}-i)-i(1-i\sqrt{2})=-2i$

（2）　$\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}=-\dfrac{2}{5}$；

（3）　$\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\dfrac{1}{2}i$

（4）　$(1-i)^4=-4$

证　（1）　$(\sqrt{2}-i)-i(1-i\sqrt{2})=\sqrt{2}-i-i$

$+i^2\sqrt{2}=\sqrt{2}-2i-\sqrt{2}=-2i$

（2）　$\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\dfrac{(2-i)i}{5i^2}$

$=\dfrac{-5+10i}{25}+\dfrac{2i+1}{-5}=-\dfrac{2}{5}$

（3）　$\dfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\dfrac{5}{(1-3i)(3-i)}$

$=\dfrac{5}{-10i}=\dfrac{i}{2}$

（4）　$(1-i)^4=(-2i)^2=-4$

2． 求下列复数的实部、虚部、模与主幅角

（1）　$\dfrac{1-2i}{3-4i}-\dfrac{2-i}{5i}$

（2）　$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n$，　$n=2，3，4.$

（3）$\sqrt{1+i}$

（4）$(\sqrt{3}+i)^{-3}$

解 （1） $\because\ z=\dfrac{(1-2i)(3+4i)}{3^2+4^2}+\dfrac{(2-i)i}{5}$

$$=\frac{11-2i}{25}+\frac{10i+5}{25}=\frac{16+8i}{25}$$

$\therefore Rez=\dfrac{16}{25}$，$\mathrm{Im}z=\dfrac{8}{25}$，$|z|=\sqrt{\left(\dfrac{16}{25}\right)^2+\left(\dfrac{8}{25}\right)^2}$

$$=\frac{8\sqrt{5}}{25},$$

$$\arg z=\operatorname{arctg}\left(\frac{8}{25}\Big/\frac{16}{25}\right)=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

（2） 设 $z=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$

则 $z^n=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n=\cos\dfrac{n\pi}{3}+i\sin\dfrac{n\pi}{3}$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i; & n=2\text{ 时}\\ -1; & n=3\text{ 时}\\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i; & n=4\text{ 时}\end{cases}$$

故

$$Rez^n=\cos\frac{n\pi}{3}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & n=2\text{ 时}\\ -1, & n=3\text{ 时}\\ -\dfrac{1}{2}, & n=4\text{ 时}\end{cases}$$

$$\operatorname{Im} z^n=\sin\frac{n\pi}{3}=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=2\text{时}\\ 0, & n=3\text{时}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & n=4\text{时}\end{cases}$$

$$|z^n|=|z|^n=\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right)^n=1^n=1$$

$$(n=2,\ 3,\ 4)$$

$$\arg z^2=\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\bigg/-\frac{1}{2}\right)+\pi=\frac{2\pi}{3},$$

$$\arg z^3=\arg(-1)=\pi,$$

$$\arg z^4=\operatorname{arcrg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\bigg/-\frac{1}{2}\right)-\pi=-\frac{2\pi}{3}.$$

(3) $\because 1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right)\quad(k=0.\ 1)$$

$$=\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$\therefore\quad Re(\sqrt{1+i})_k=\pm\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8},$

$\operatorname{Im}(\sqrt{1+i})_k=\pm\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8}$

其中$k=0$时取“+”号，$k=1$时取“－”号。

$$|(\sqrt{1+i})_k| = |\pm\sqrt[4]{2}|\cdot|\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}| = \sqrt[4]{2}.$$

$$(k=0,\ 1)$$

$$\arg(\sqrt{1+i})_0 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8}}{\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8}} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

$$\arg(\sqrt{1+i})_1 = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8}}{-\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8}} - \pi = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$-\pi = -\frac{7\pi}{8}.$$

(4) $\because\ (\sqrt{3}+i)^{-3} = \dfrac{1}{(\sqrt{3}+i)^3} = \dfrac{1}{8i} = -\dfrac{i}{8}$

$\therefore\ Re(\sqrt{3}+i)^{-3} = 0,\ Im(\sqrt{3}+i)^{-3} = -\frac{1}{8},$

$|(\sqrt{3}+i)^{-3}| = |-\frac{i}{8}| = \frac{1}{8}.$

$\arg(\sqrt{3}+i)^{-3} = \arg\left(-\frac{i}{8}\right) = -\frac{\pi}{2}$（注：因本章规定主幅角$-\pi<\arg z\leq\pi$，所以，$\arg\left(-\frac{i}{8}\right) \neq \frac{3\pi}{2}$）.

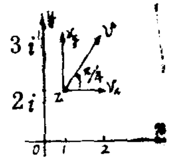
3．设流体在点$z=1+2i$的流速为$v=\dfrac{3+i}{2-i}$，求其大小和方向，並作图．

解 $\because\ v = \dfrac{3+i}{2-i} = \dfrac{(3+i)(2+i)}{5} = 1+i.$

$\therefore$ 大小为$|v| = \sqrt{2}$

方向为$\arg v = \operatorname{arctg}\dfrac{Re v}{Im v}$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$



4．设$z = \dfrac{1-\sqrt{3}\, i}{2}$，

求$|z|$及$\mathrm{Arg}z$。

解 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \Big/ \frac{1}{2}\right) + 2k\pi$$

$$= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

5．设$z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，$z_2 = \sqrt{3} - i$，试用指数形式表示$z_1 z_2$及$\dfrac{z_1}{z_2}$。

解 因$|z_1| = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}} = 1$，$\arg z_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1} = \dfrac{\pi}{4}$，

则$z_1 = e^{i\pi/4}$

$|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$，$\arg z_2 = \operatorname{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$，

则$z_2 = 2e^{-\pi i/6}$

所以 $z_1 z_2 = 2^{\,i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{\frac{\pi}{12}i}$，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}.$$

6．求下列复数z的主幅角$\arg z$．

（1） $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\,i}$．　（2） $z=(\sqrt{3}-i)^6$

解（1） $\arg z=\arg(-2)-\arg(1+\sqrt{3}\,i)=\pi-\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{2}{3}\pi$

（2） $z=2^6\left[\cos\left(-\dfrac{6\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{6\pi}{6}\right)\right]$

$=2^6\cos\pi=-2^6$，$\therefore \arg z=\pi$．

7．用指数形式证明：

（1） $i(1-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i)=2+2\sqrt{3}\,i$．

（2） $\dfrac{5i}{2+i}=1+2i$．

（3） $(-1+i)^7=-8(1+i)$．

（4） $(1+\sqrt{3}\,i)^{-10}=2^{-11}(-1+\sqrt{3}\,i)$．

证（1） $\because i=e^{i\pi/2}$，$1-\sqrt{3}\,i=2e^{i(-\pi/3)}$，

$\sqrt{3}+i=2e^{i\pi/6}$．

$\therefore i(1-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i)=e^{i\pi/2}\cdot 2e^{i(-\pi/3)}2e^{i\pi/6}$

$=4e^{i\pi/3}$

$=4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=4\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2+2\sqrt{3}\,i$

（2） $\dfrac{5i}{2+i}=\dfrac{5e^{i\pi/2}}{\sqrt{5}\,e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{1}{2}}}=\sqrt{5}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right)}$

$=\sqrt{5}\,e^{i\,\mathrm{arctg}2}=1+2i$

(3) $(-1+i)^7=(\sqrt{2})^7 e^{i\frac{21\pi}{4}}=8\sqrt{2}e^{i\left(4\pi+\frac{5\pi}{4}\right)}$

$$=8\sqrt{2}e^{i5\pi/4}=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$=-8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=-8(1+i).$$

(4) $(1+\sqrt{3}i)^{-10}=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^{-10}=2^{-10}\cdot e^{i\left(-4\pi+\frac{2}{3}\pi\right)}$

$$=2^{-10}e^{2\pi i/3}=2^{-10}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=2^{-11}(-1+\sqrt{3}i)$$

8．解方程$z^4+a^4=0 \quad (a>0)$．

解 $z=\sqrt[4]{-a^4}=a\sqrt[4]{-1}=a\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$．

$k=0，1，2，3$．

$k=0$ 得$z_0=a\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}(1+i)$．

$k=1$ 得$z_1=a\left(-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}(-1+i)$．

$k=2$ 得$z_2=a\left(-\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}(-1-i)$．

$k=3$ 得$z_3=a\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}(1-i)$．

9．证明$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$并说明其几何意义．

证 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_1. \qquad (1)$$

及 $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2-\overline{z_2}z_1 \qquad (2)$$

(1)+(2)得 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2})$ $=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$. 其几何意义就是平行四边形两对角线平方和等于它的各边平方和.

10. 设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件:

$$z_1+z_2+z_3=0 \text{ 及 } |z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$

求证 z_1、z_2、z_3 是一个内接于单位圆周 $|z|=1$ 的正三角形的顶点.

证法1 由 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 知三点 z_1, z_2, z_3 在单位圆周 $|z|=1$ 上, 只须证 z_1, z_1, z_3 是正三角形顶点即可.

由 $z_1+z_2+z_3=0$ 得 $|z_1+z_2|=|-z_3|=|z_3|=1$, 再由上题结论 $|z_1+z_2|+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

$$=4.$$

则 $|z_1-z_2|^2=4-|z_1+z_2|^2=4-1=3.$

$$|z_1-z_2|=\sqrt{3}.$$

同理可证 $|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$

故 z_1, z_2, z_3 是内接于单位圆周 $|z|=1$ 的正三角形的顶点.

证法2 因 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. 故三点在单位圆周 $|z|=1$ 上, 且可设 $z_1=e^{i\theta_1}$, $z_2=e^{i\theta_2}$, $z_3=e^{i\theta_3}$,

不妨令 $0\leq\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi$, 由 $z_1+z_2+z_3=0$

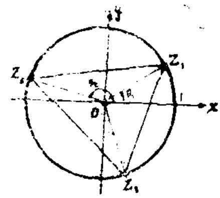
得 $z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_3\overline{z_1}=0$ 即 $e^{i(\theta_2-\theta_1)}+e^{i(\theta_3-\theta_1)}$

$$=-z_1\overline{z_1}=-1.$$

记$\theta_2-\theta_1=x$，$\theta_3-\theta_1=y>x$，则上式变为

$\cos x+i\sin x+\cos y+i\sin y=-1$

则 $\begin{cases}\cos x+\cos y=-1\\ \sin x+\sin y=0\end{cases}$



解得 $x=\theta_2-\theta_1=\dfrac{2\pi}{3}$.（$120^0$）

$y=\theta_3-\theta_1=\dfrac{4\pi}{3}$.（$240^0$）

∴ $\angle z_1 0 z_2=\angle z_2 0 z_3=\angle z_3 0 z_1=120^0$，如图。

故z_1，z_2，z_3是内接于单位园周$|z|=1$的正三角形的顶点。

证法 3 设$z_k=x_k+iy_k$ （$k=1，2，3$）

由条件 $z_1+z_2+z_3=0$得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ y_1+y_2+y_3=0\end{cases} \qquad (1)$$

由条件 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$得

$$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=1 & (2)\\ x_2^2+y_2^2=1 & (3)\\ x_3^2+y_3^2=1 & (4)\end{cases}$$

由（1）解出x_1，y_1代入（2），並运用（3）、（4）得

$$2x_2x_3+2y_2y_3=-1. \qquad (5)$$

$(5)\times(-1)+(3)+(4)$ 得 $(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=3$

即 $|z_2-z_3|=\sqrt{3}$.

同理可得 $|z_1-z_3|=|z_1-z_2|=\sqrt{3}$

$\therefore z_1$, z_2, z_3是正三角形的顶点，又因z_1, z_2, z_3在单位园周$|z|=1$上，故z_1, z_2, z_3是内接于单位园周$|z|=1$的正三角形的顶点。

11. 试证三点$a+bi$、0、$\frac{1}{-a+bi}$共直线；四点$a+bi$、$\frac{1}{-a+bi}$、-1、$+1$共园居（$b\neq0$）。

证 ①证法 1　令$z_1=a+bi$,$z_2=1/-a+bi$, $z_3=0$

因 $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\dfrac{a+bi-0}{1/-a+bi-0}=-z_1\overline{z_1}=\lambda$（实数）.

即满足三点共线的充要条件，故$a+bi$、0、$\frac{1}{-a+bi}$ 共线。

证法 2：

由于 $\dfrac{1}{-a+bi}=-\dfrac{1}{a-bi}=\left(-\dfrac{1}{a^2+b^2}\right)(a+bi)$

因此 $\operatorname{Arg}\dfrac{1}{-a+bi}=\pi+\operatorname{Arg}(a+bi)$

故三点$a+bi$、0、$\frac{1}{-a+bi}$共线。

证 ②证法 1　令$z_1=a+bi$, $z_2=1/-a+bi$, $z_3=-1$,

$z_4=1$.

由于$b\neq0$，显然题设四点不共线，

又因 $\dfrac{z_1-z_4}{z_1-z_2}:\dfrac{z_3-z_4}{z_3-z_2}=\dfrac{a+bi-1}{a+bi+\frac{1}{a-bi}}:\dfrac{-1-1}{-1+\frac{1}{a-bi}}$

$$=\frac{a+bi-1}{a^2+b^2+1}\times\frac{a-bi-1}{2}=\frac{(a-1)^2+b^2}{2(a^2+b^2+1)}\text{（实数）}.$$

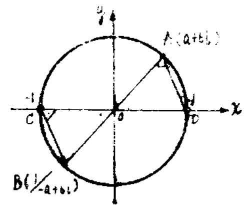
即满足四点共园周的充要条件，故题设四点共园周。

证法 2：以A，B，C，D分别表示$a+bi$，$\frac{1}{-a+bi}$，-1，1，如图。①中已证A，0，B三点共线，则$\angle AoD=\angle CoB$。

又 $\overline{oA}=\sqrt{a^2+b^2}$，

$$\overline{oB}=\left|\frac{1}{-a+bi}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



则$\frac{\overline{oB}}{\overline{oD}}=\frac{\overline{oC}}{\overline{oA}}$，

得$\triangle AoD\sim\triangle CoB$。

$\angle BAD=\angle BCD$，故A，B，C，D四点共园周。

12．下列关系表示的z点的轨迹的图形是什么？它是不是区域？

（1） $|z-z_1|=|z-z_2|$，$(z_1\neq z_2)$

（2） $|z|\leq|z-4|$ （3） $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|<1$

（4） $0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$ 且 $2\leq Re z\leq 3$

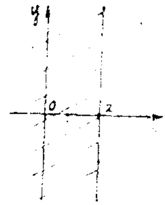
（5） $|z|>2$ 且 $|z-3|>1$

（6） $Im z>1$ 且 $|z|<2$

（7） $|z|<2$ 且 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$

（8） $\left|z-\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}$ 且 $\left|z-\frac{3}{2}i\right|>\frac{1}{2}$

解 （1）表示z点的轨迹是z_1与z_2两点连线的中垂线。不是区域。



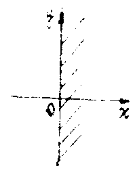
(2)令$z=x+iy$，

由$|x+iy|\leq|(x-4)+iy|$

即$x^2+y^2\leq(x-4)^2+y^2$

得$x\leq2$

故z点的轨迹是以直线$x=2$为右界的左半平面（包括直线$x=2$）。不是区域。

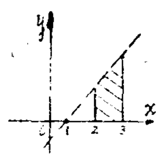


（3）令$z=x+iy$，

由$|z-1|<|z+1|$

得$(x-1)^2<(x+1)^2$，即$x>0$

故z点的轨迹是以虚轴为左界的右半平面（不包括虚轴）。是区域。



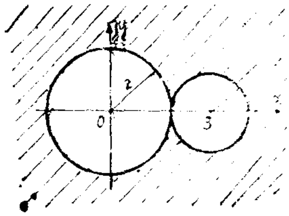
（4）由$\begin{cases}0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}\\2\leq Re z\leqslant3\end{cases}$

得$\begin{cases}0<\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-1}<\dfrac{\pi}{4}\\2\leqslant x\leqslant3\end{cases}$

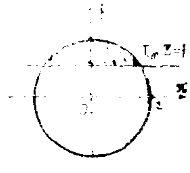
即$\begin{cases}0<y<x-1\\2\leqslant x\leqslant3\end{cases}$

如图中阴影所示的梯形（不包括上、下边界）。不是区域。

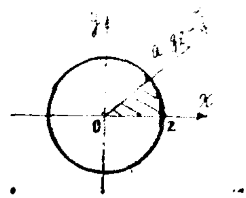
（5） z点的轨迹的图形是以原点为园心，2为半径及以$z=3$为园心，1为半径的两闭园的外部，如下图所示的阴影部分。是区域。



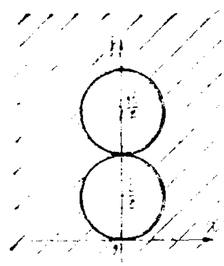
（6） z点的轨迹的图形是位于直线$\mathrm{Im}\,z=1$的上方（不包括直线$\mathrm{Im}\,z=1$）且在以原点为圆心，2为半径的圆内部分(不包括圆弧)．是区域．



（7） z点的轨迹的图形是如右图阴影部分所示的扇形（不包括边界）．是区域．



（8） z点的轨迹的图形是两个闭圆外部，如下图所示阴影部分，是区域．



13、证明复平面上的直线方程可以写成

$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=C$（$\alpha\neq0$是复常数，$C$是实常数）

证 设直线方程$ax+by=c$（a，b，c为实常数，且a，b不同时为0），因$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$代入上式得$a\frac{z+\bar{z}}{2}+b\frac{z-\bar{z}}{2i}=C$。即$\frac{a-bi}{2}z+\frac{a+bi}{2}\bar{z}=C$，令$\alpha=\frac{a+bi}{2}$，$\bar{\alpha}=\frac{a-bi}{2}$得$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=C$。

反之，设有方程$\bar{\alpha}z+\alpha\bar{z}=C$（$\alpha\neq 0$复常数，$C$为实常数），将$z=x+iy$代入上式得

$\bar{\alpha}(x+iy)+\alpha(x-iy)=C$或$(\bar{\alpha}+\alpha)x+(i\bar{\alpha}-i\alpha)y=C$

令$a=\bar{\alpha}+\alpha$，$b=i\bar{\alpha}-i\alpha$（均为实常数）。则有$ax+by=C$（因$\alpha\neq 0$，$\therefore a$，b不全为0），此为直线一般方程。

14. 证明复平面上的园周可以写成

$$Az\bar{z}+\beta\bar{z}+\bar{\beta}z+C=0$$

其中A，C为实数，$A\neq 0$，β为复数，且$|\beta|^2>AC$

证法1 设园的方程为

$$A(x^2+y^2)+Bx+Dy+C=0 \quad ①$$

其中$A\neq 0$，且A，B，C，D为实常数，当$B^2+D^2>4AC$时，方程①表示实园。

将 $x^2+y^2=|z|^2=z\bar{z}$，$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$ $y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$。

代入①得 $Az\bar{z}+\frac{1}{2}(B-Di)z+\frac{1}{2}(B+Di)\bar{z}+C=0$，即

$Az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+C=0$，其中$A$，$C$为实常数，$A\neq 0$，$\beta=\frac{1}{2}(B+Di)$且$|\beta|^2=\frac{1}{4}(B^2+D^2)>\frac{1}{4}\cdot 4AC=AC$。