TAN XING LI XUE
BIAN FEN YUAN LI

# 弹性力学
# 变分原理

熊祝华　刘子廷

湖南大学出版社

# 弹性力学变分原理

熊祝华　刘子廷

湖南大学出版社

## 内 容 提 要

本书系统而简要地介绍了弹性力学变分原理的基本理论及其应用示例。全书共分十章。前六章为弹性力学变分原理的理论概述，后四章则以梁的弯曲、直杆扭转、平面问题和薄板问题为例，说明弹性力学变分原理的应用。本书可作为有关专业的研究生、高年级本科生的教材和教学参考用书；也可作为有关教师、科技工作者的自学和参考用书。


**弹性力学变分原理**

熊祝华 刘子廷

☆

湖南大学出版社出版发行

（长沙岳麓山）

湖南省新华书店经销 江西修水县印刷厂印装

☆

787×1092 32开 12.5625印张 282千字

1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷

印数：0001--2500册

ISBN7—314—00197—9/O·5

定价：3.40元

# 前　言

本书所涉及的内容，包括弹性力学经典变分原理、能量原理、弹性力学广义变分原理、以及其他有关的弹性力学能量原理。弹性力学能量原理是弹性力学直接解法和有限元法的基础，弹性力学广义变分原理在有限元法和工程弹性力学中具有广泛的应用。

我国力学工作者在弹性力学变分原理的理论和应用研究方面做了大量的工作，获得了许多有价值的成果，已出版专著多种。因此，我们不企图将本书写成全面论述弹性力学变分原理的专门书籍，只着重于本问题的基本概念、基本理论及基本方法的阐述；力图体系清晰，重点突出，以期使读者对本问题有较深刻的了解，便于在实际中应用或进一步做研究工作。为此，本书简要而系统地介绍了弹性力学变分原理的基本理论、建立弹性力学广义变分原理的主要途径和方法，以及弹性力学变分原理的等价形式；并且只限于线性弹性问题。非线性弹性力学变分原理在附录中作了简单的介绍。

本书分两大部分。第一部分为弹性力学变分原理的理论概述，共六章，分别介绍弹性力学经典变分原理、广义变分原理、变分原理的等价形式、高阶拉氏乘子法以及泛函变分的近似计算方法等。第二部分为应用示例，共四章，以梁的弯曲、直杆扭转、平面问题及薄板问题为例，说明弹性力学变分原理在实际问题中的应用。

本书是在1985年江西省力学学会在庐山举办的弹性力学讲习班所写讲义的基础上，根据多年来我们对本科学生和研

究生的教学实践，几经修改、补充而成。因此，本书可作为有关专业的研究生及高年级本科生的教材和教学参考用书；也可以作为有关教师、科技工作者的自学和参考用书。

在本书的编写过程中，得到了江西工业大学杨德品教授的大力支持和帮助，作者在此表示感谢。由于我们缺乏经验，水平有限，书中难免有错误和不当之处，恳请专家和读者批评指正。

本书的第二章、第六章由熊慧而执笔。

熊祝华　刘子廷

一九八七年六月

# 目　　录


**第一章　弹性力学的基本方程和有关的基本定理**…（ 1 ）

§1—1　弹性力学的变量……………………………（ 1 ）

§1—2　弹性力学平衡方程…………………………（ 2 ）

§1—3　弹性力学几何方程…………………………（ 5 ）

§1—4　弹性力学本构方程…………………………（ 7 ）

§1—5　三类变量的约束……………………………（ 11 ）

§1—6　恒等式…………………………………………（ 12 ）

§1—7　力和位移的逆步原理………………………（ 17 ）

§1—8　功的互等定理………………………………（ 27 ）

附录　应变协调方程及应力函数…………………（ 36 ）

**第二章　弹性力学经典变分原理**……………………（ 46 ）

§2—1　虚位移原理　最小势能原理………………（ 46 ）

§2—2　虚力原理　最小余能原理…………………（ 51 ）

§2—3　自然条件和约束条件………………………（ 56 ）

§2—4　弹性力学变分原理和数学变分问题………（ 59 ）

**第三章　弹性力学广义变分原理**……………………（ 61 ）

§3—1　什么是广义变分原理………………………（ 61 ）

§3—2　本构方程在力学变分原理中的地位………（ 62 ）

§3—3　广义变分原理　拉氏乘子法………………（ 64 ）

§3—4　消元法和换元法……………………………（ 77 ）

**第四章　弹性力学变分原理的等价形式**……………（ 83 ）

§4—1　弹性力学变分原理的等价性………………（ 83 ）

§4—2　不动变换法（等价变量变换法）…………（ 85 ）

§4—3　加零变换法…………………………………（ 87 ）

§4—4　加权残数法…………………………………（ 88 ）

§4—5 线性组合法……………………………………………（99）
第五章 高阶拉氏乘子法…………………………………………（103）
§5—1 拉氏乘子法失效的例……………………………（103）
§5—2 高阶拉氏乘子法……………………………………（107）
附录 （一）有限变形的变分原理……………………………（115）
（二）加权余量意义下的变分格式……………………（135）
第六章 泛函变分的近似计算法……………………………（147）
§6—1 立兹法…………………………………………………（148）
§6—2 伽辽金法………………………………………………（153）
§6—3 康托洛维奇法………………………………………（160）
§6—4 屈列弗兹法……………………………………………（162）
第七章 梁的弯曲问题…………………………………………（170）
§7—1 梁的基本方程与变形能……………………………（170）
§7—2 梁的虚功原理…………………………………………（174）
§7—3 梁的虚位移原理 最小势能原理………………（176）
§7—4 基于最小势能原理的立兹法……………………（179）
§7—5 基于最小势能原理的有限元法…………………（193）
§7—6 梁的虚力原理及其应用……………………………（202）
§7—7 超静定梁的虚内力方程与最小余能原理……（209）
§7—8 Hellinger—Reissner（H—R）变分原理的应用……………………………………………………（219）
第八章 等直杆的扭转问题…………………………………（222）
§8—1 扭转问题的基本方程………………………………（222）
§8—2 扭转问题的总余能泛函……………………………（227）
§8—3 立兹法求解扭转问题………………………………（229）
§8—4 屈列弗兹法求解抗扭刚度的上限………………（236）
§8—5 康托洛维奇法求解扭转问题……………………（246）
§8—6 扭转问题的有限元法………………………………（257）

**第九章　弹性力学平面问题**……………………（265）
§9—1　弹性力学平面问题的基本方程…………………（265）
§9—2　应变能和应变余能……………………………（271）
§9—3　虚功原理……………………………………（275）
§9—4　虚位移原理　最小势能原理……………………（277）
§9—5　基于最小势能原理的近似解法…………………（279）
§9—6　基于最小势能原理的有限元法…………………（293）
§9—7　虚应力原理　最小余能原理……………………（308）
§9—8　基于最小余能原理的近似解法…………………（310）
**第十章　薄板弯曲问题**……………………………（319）
§10—1　薄板小挠度弯曲问题的基本方程………………（319）
§10—2　薄板弯曲的应变能与应变余能…………………（327）
§10—3　薄板的虚功原理……………………………（331）
§10—4　薄板的虚位移原理　最小势能原理……………（333）
§10—5　薄板弯曲问题的立兹法和伽辽金法……………（336）
§10—6　薄板弯曲问题的康托洛维奇法…………………（350）
§10—7　基于最小势能原理的薄板弯曲问题的有限元法……………………………………………（359）
§10—8　薄板的虚力原理　最小余能原理………………（367）
§10—9　薄板的二类变量广义变分原理…………………（374）
§10—10　薄板的三类变量广义变分原理………………（382）
**参考文献**　…………………………………………（391）

# 第一章　弹性力学的基本方程和有关基本定理

研究力学问题，总要涉及两类基本的力学量，一类是几何或运动学的量，如位移、速度、应变、应变率等；另一类是动力学的量，如力（体积力和表面力）、应力等。要建立力学理论，无论是线性理论或非线性理论，总要研究三方面的问题，即（1）各运动学变量之间的关系，这是关于物体变形规律的描述，通常称为**几何方程**；（2）各动力学变量之间的关系，这是关于平衡或运动状态的描述，通常称为**平衡方程**或**动力学方程**；（3）运动学变量和动力学变量之间的关系，这是关于物质（材料）**力学特性**的描述，通常称为**本构方程**。上述三类关系式构成力学的**基本方程**。本书只讨论线性弹性物体，所以可不涉及有关热力学的变量。作为准备知识，本章将简要介绍弹性力学的基本方程和有关的基本定理，而且只在笛卡尔坐标系内讨论问题。

## §1—1　弹性力学的变量

弹性力学是研究弹性体在外部因素作用下，在其内所引起的力学响应的学科。弹性体的力学响应（此处只限于讨论**静力问题**和**线性问题**）可用三类量来表征，即应力、应变和位移。应力属于动力学的量，应变和位移属于几何或运动学的量。在下面，我们用$\sigma_{ij}$表示应力分量，$u_i$表示位移分量，$e_{ij}$表示应变分量（$i,j=1,2,3$），这是张量记法。它们也可用矩阵（列阵）表示：

$$\sigma = [\,\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\,]^T \tag{1-1}$$

$$\mathbf{e} = [\,e_x \quad e_y \quad e_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}\,]^T \tag{1-2}$$

$$u = [\,u \quad v \quad w\,]^T \tag{1-3}$$

今后用$f_i$表示体力分量，$\hat{p}_i$表示给定的面力分量，$\hat{u}_i$表示给定的位移分量；同时也可写成：

$$\mathbf{f} = [\,f_x \quad f_y \quad f_z\,]^T \tag{1-4}$$

$$\hat{\mathbf{P}} = [\,\hat{p}_x \quad \hat{p}_y \quad \hat{p}_z\,]^T \tag{1-5}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = [\,\hat{u} \quad \hat{v} \quad \hat{w}\,]^T \tag{1-6}$$

在本书中同时使用张量写法和矩阵写法。

实际上，应力、应变和位移都是场量，即它们都是位置坐标的函数。今后为简单计，同时也便于同弹性力学变分原理的叫法一致，我们称$\sigma$，e，$u$为三类变量。而$\mathbf{f}$和$\hat{\mathbf{p}}$则是给定的量。

弹性力学的**三类变量**要满足三类基本方程，即**平衡方程**，**几何方程**和**本构方程**。设弹性体所占区域为$\tau$，其表面为$S$，现在推导弹性力学的平衡方程和几何方程。

## §1—2 弹性力学平衡方程

在变形体内截出任一部分，其体积为$\Omega$，表面为$\phi$，则在表面$\phi$上将受到物体内相邻部分的作用，这种作用可用力来表示。在截出部分的表面的任一点处，截取一微小面积包括此点，其面积为$\Delta S$；设该点处表面$\phi$的外法线为$n$、当$\Delta S$足够小时，假定作用在此面元上的力能合成一个合力$\Delta \mathbf{p}_n$。当$\Delta S$向给定点缩小，则定义下列极限值为该点处$n$方向的**应力矢**，记为$\mathbf{p}_n$

$$\boldsymbol{p}_n = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}_n}{\Delta s} \tag{1-7}$$

设在笛卡尔坐标系内，沿坐标面截取一六面单元体，以$\boldsymbol{e}_i$表示坐标轴正方向的单位矢，于是，六面体有三个面元的外法线与$\boldsymbol{e}_i$方向一致，并用$\boldsymbol{p}_i$表示该面元的应力矢，如图 1-1 所示。将$\boldsymbol{p}_i$沿三个坐标方向分解，并用$\sigma_{ij}$表示$\boldsymbol{p}$的三个分量，$\sigma_{ij}$称为**应力分量**。在图 1-1 中只标出了$\boldsymbol{p}_i$的三个分量。一般规定，当$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_i$时，应力分量以指向坐标正向者为正，图1-1中所示$\boldsymbol{p}_i$的三个应力分量都是正的。反之，当$\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{e}_i$时（对立面），应力分量以指向坐标轴的负向为正。按此规定，在一点处，应力矢有下列关系：

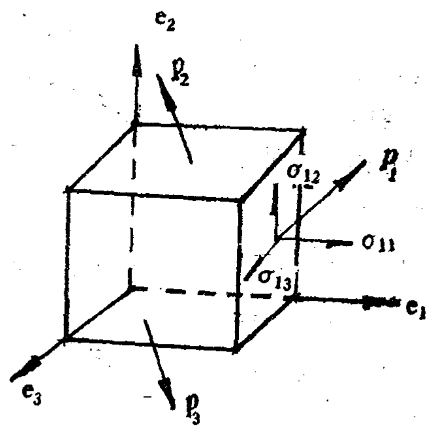


图 1-1

$$\boldsymbol{p}_i = -\boldsymbol{p}_{-i} \tag{1-8}$$

$$\boldsymbol{p}_i = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{1-9}$$

如果在变形体内任一点处截取一四面单元体，其中三个面与坐标面平行，另一个面的外法线为$\boldsymbol{n}$(图1-2)，则当单元体趋于一点时，体积力属于高阶微量。单元体的平衡要求：

$\boldsymbol{p}_n + n\ \boldsymbol{p}_- = 0$

或者

$$\boldsymbol{p}_n = n_i \boldsymbol{p}_i \qquad (1\text{-}10)$$

将式(1-9)代入上式，可得

$$\boldsymbol{p}_n = \sigma_{ij} n_i \mathbf{e}_j \qquad (1\text{-}11)$$

其中$n_i$是$\boldsymbol{n}$的方向余弦，$n_i = \cos(\boldsymbol{n}, \mathbf{e}_i)$。

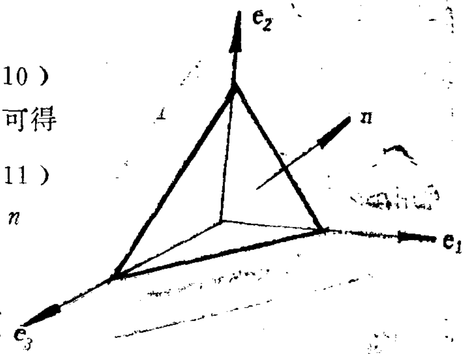

图 1-2

当四面体的斜面正好是物体的表面时，则$\boldsymbol{p}_n$不是应力矢，而是物体表面给定的表面力$\hat{\boldsymbol{p}}$，于是式(1-11)变为

$$\sigma_{ij} n_i = \hat{p}_j \qquad (1\text{-}12)$$

现在，设物体处于平衡状态，从物体内截出任一部分$\Omega$，其表面为$\varphi$，则此部分亦应平衡，即作用在此部分上的力的主矢和主矩均应为零。主矢为零可表示如下：

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{f} dv + \int_{\varphi} \boldsymbol{p}_n ds = 0 \qquad (a)$$

其中$\boldsymbol{f}$为体积力，而

$$\int_{\varphi} \boldsymbol{p}_n ds = \int_{\varphi} \boldsymbol{p}_i n_i ds = \int_{\Omega} \boldsymbol{p}_{i,i} dv \qquad (b)$$

此处应用了**格林公式**，其中$(\ )_{,i}$表示$\partial(\ )/\partial x_i$。将式$(b)$代回式$(a)$，并注意到$\Omega$可以是任意大小，由此可得

$$\boldsymbol{p}_{i,i} + \boldsymbol{f} = 0 \quad (在\tau内) \qquad (1\text{-}13)$$

将式(1-9)代入上式，得到投影式如下

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0 \qquad (\text{在}\tau\text{内}) \tag{1-14}$$

上式就是弹性力学平衡方程。截出部分主矩为零的条件将导致剪应力互等定律*

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{1-15}$$

于是平衡方程又可写成

$$\sigma_{ji,j}+f_i=0 \qquad (\text{在}\tau\text{内}) \tag{1-16}$$

或者用矩阵表示

$$\boldsymbol{E}(\partial)\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=0 \tag{1-17}$$

其中$\boldsymbol{E}(\partial)$为**微分算子矩阵**

$$\boldsymbol{E}(\partial)=\begin{pmatrix} \partial_x & 0 & 0 & 0 & \partial_z & \partial_y \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_z & \partial_y & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1-18}$$

$$\partial_x=\frac{\partial}{\partial x},\quad \partial_y=\frac{\partial}{\partial y},\quad \partial_z=\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-19}$$

## §1—3 弹性力学几何方程

设$\boldsymbol{u}$是变形体内质点的位移矢，定义

$$\boldsymbol{\delta}_i=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}=u_{j,i}\mathbf{e}_j \tag{1-20}$$

（对照$\boldsymbol{p}_i=\sigma_{ij}\mathbf{e}_j=\sigma_{ji}\mathbf{e}_j$）

$\sigma_i$称为$x_i$坐标轴向的**位移梯度矢**。在方向$n$的位移梯度矢则为

$$\boldsymbol{\delta}_n=\frac{d\mathbf{u}}{ds}=\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}\,\frac{dx_i}{ds}=\boldsymbol{\delta}_i n_i=u_{j,i}n_i\mathbf{e}_j \tag{1-21}$$

---

* 可参阅一般弹性力学或塑性力学教材或参考书如〔10〕、〔11〕

（对照$\mathbf{p}_n=\mathbf{p}_i n_i=\sigma_{ij} n_j \mathbf{e}_i$）

$ds$为$n$方向线元的长度，$dx_i/ds=n_i$，$n_i$为$n$的方向余弦。

设$n$方向长为$ds$的线元，变形后长度为$ds'$（图1-3)方向为$n'$，由图可见

$$ds'\mathbf{n}'=ds\mathbf{n}+ds\delta_n$$

于是线元的应变为

$$\varepsilon_n=\frac{ds'-ds}{ds}$$

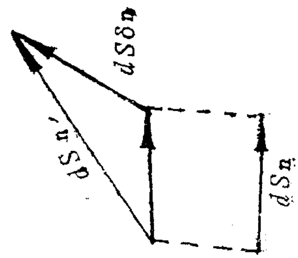


图 1-3

在小变形情况下，可令$ds'$在$n$方向的投影近似等于$ds'$，于是应变的近似式为

$$\varepsilon_n=\frac{ds'\mathbf{n}'\cdot\mathbf{n}-ds}{ds}=\frac{(ds\mathbf{n}+\delta_n ds)\mathbf{n}-ds}{ds}$$

$$=\delta_n\mathbf{n}=u_{i,j}n_i n_j \qquad (1\text{-}22)$$

将$u_{i,j}$分解为对称部分和反对称部分（如同将矩阵分解为对称矩阵和反对称矩阵那样），得到

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \quad （对称部分） \qquad (1\text{-}23)$$

$$w_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i}) \quad （反对称部分） \qquad (1\text{-}24)$$

其中$e_{ij}$就是小变形下的**应变张量**的分量。可以证明，式(1-22)可写成

$$\varepsilon_n=e_{ij}n_i n_j \qquad (1\text{-}25)$$

$e_{ij}$和工程应变分量的关系为

$$\left.\begin{array}{lll} e_{11}=e_x, & e_{22}=e_y, & e_{33}=e_z \\ e_{23}=\frac{1}{2}\gamma_{yz}, & e_{31}=\frac{1}{2}\gamma_{zx}, & e_{12}=\frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{array}\right\} \qquad (1\text{-}26)$$

式(1-23)可写成矩阵形式

$$e = E(\partial)^T u \tag{1-27}$$

将式(1-18)代入上式，可直接证明它是对的。

## §1—4 弹性力学本构方程

弹性力学本构方程有两种写法，一是**虎克定律**（线弹性），另一是**能量表示法**（不限于线弹性）。第一种写法具有如下的形式

$$\sigma = a\,e \tag{1-28}$$

其中 $a$ 是弹性矩阵（刚度矩阵）。其逆转式为

$$e = a^{-1}\sigma \tag{1-29}$$

其中各向同性材料的弹性矩阵 $a$ 及其逆 $a^{-1}$ 为

$$a = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & & 0 & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & & & \\ \hline & & & \mu & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & \mu & 0 \\ & & & 0 & 0 & \mu \end{array}\right) \tag{1-30a}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{E}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\gamma & -\gamma & & & \\ -\gamma & 1 & -\gamma & & 0 & \\ -\gamma & -\gamma & 1 & & & \\ \hline & & & 2(1+\gamma) & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 2(1+\gamma) & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2(1+\gamma) \end{array}\right) \tag{1-30b}$$

$E$ 为**杨氏模量**，$\nu$为**泊桑系数**。$\mu=G$为**剪切弹性模量**，$\gamma=E\nu/(1+\nu)(1-2\nu)$，$\lambda$、$\mu$称**为拉梅**$(Lame)$**常数**。

第二种写法有下列等价形式

$$\frac{\partial A(\mathbf{e})}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij} \tag{1-31a}$$

$$\frac{\partial B(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij} \tag{1-31b}$$

$$A(\mathbf{e})+B(\sigma)-\sigma^T\mathbf{e}=0 \tag{1-31c}$$

其中$A(\mathbf{e})$是用应变表示的**应变比能**

$$A(\mathbf{e})=\int_0^e \sigma_{ij}de_{ij} \tag{1-32a}$$

$B(\sigma)$是用应力表示的**比余能**

$$B(\sigma)=\int_0^\sigma e_{ij}d\sigma_{ij} \tag{1-32b}$$

显然，$\mathrm{A}(\mathbf{e})$和$B(\boldsymbol{\sigma})$的具体函数形式决定于本构方程$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{e})$或$\mathbf{e}=\mathbf{e}(\boldsymbol{\sigma})$。如果材料是线弹性的，则有

$$A(\mathbf{e})=B(\sigma)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{e} \tag{1-32c}$$

可以证明，式(1-31)的三种形式是等价的。实际上，设式(1-31$c$)成立，则有

$$dA(\mathbf{e})+dB(\boldsymbol{\sigma})-d(\sigma_{ij}e_{ij})=0 \tag{1-33}$$

$$dA(\mathbf{e})=\frac{\partial A(\mathbf{e})}{\partial e_{ij}}de_{ij}$$

$$dB(\boldsymbol{\sigma})=\frac{\partial B(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij}$$

于是，式(1-33)可写成

$$\left(\frac{\partial A(e)}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)de_{ij}+\left(\frac{\partial B(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}-e_{ij}\right)d\sigma_{ij}=0$$

由于$d\sigma_{ij}$和$de_{ij}$是独立变化的，由此可得式(1-31$a,b$)，证明它们是等价的。

或者，由定义式(1-32)，可以直接导出式(1-31)；既然式(1-31)的三式都可由同一的定义导出，因此它们是彼此等价的。

平衡方程和几何方程是适用于连续介质的普遍方程，称为**普适方程**，它们与物体的具体性质无关。本构方程则不然，它是反映物质（材料）的力学特性的。建立的本构方程是力学中基本的研究课题之一。实际的物质是复杂而多样化的，其力学特性不独与物质自身的性质有关，也与环境有关，与加力方式有关。弹性物质的本构方程是最为简单的，而且被实践证明是符合实际情况的。关于建立本构方程的一般理论和原理，可参改连续介质力学的教材和专门书籍，例如〔10〕。

弹性力学的三类变量，除了在区域$\tau$内要满足上述三类基本方程外。还要满足两类**边界条件**（参阅式1-12及1-15）

$$\sigma_{ij}n_j=\hat{p}_i \qquad (\text{在}S_T\text{上}) \qquad (1\text{-}34a)$$

或

$$E(n)\sigma=\hat{p} \qquad (\text{在}S_T\text{上}) \qquad (1\text{-}34b)$$

$$u_i=\hat{u}_i \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \qquad (1\text{-}35a)$$

或

$$u=\hat{u} \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \qquad (1\text{-}35b)$$

此处$S_T$为给定外力的边界，$S_u$为给定位移的边界；$n_j$为边界