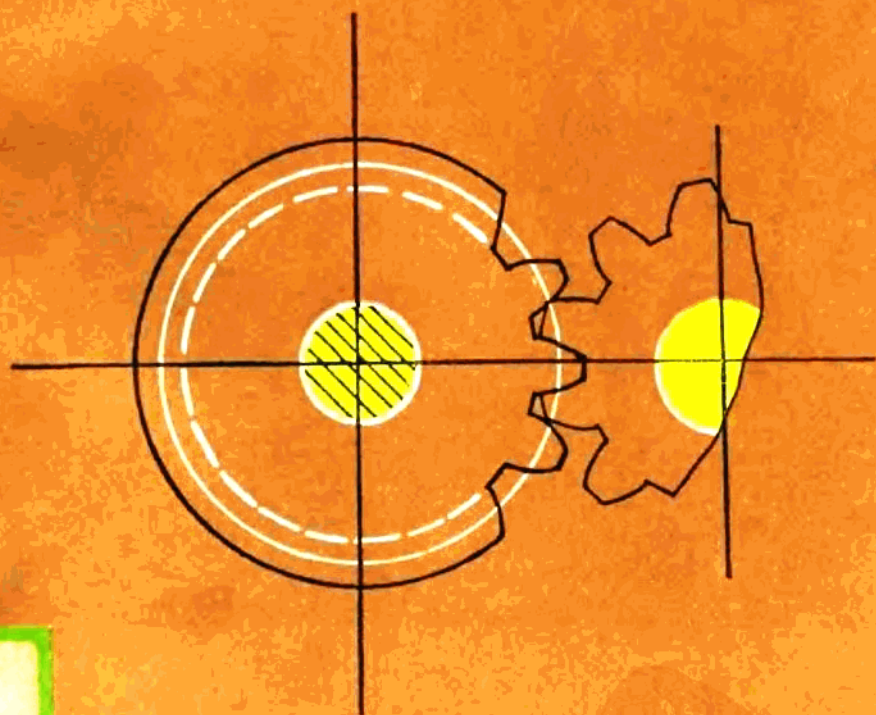


工程力学

吴普谅 程振宇 冯宸



西北大学出版社

前 言

任何工程结构或机械设备的设计都必须作力学分析,其中包括机械运动状态的分析和强度、刚度、稳定的计算,这是理论力学和材料力学两门学科的内容,我们把其中的有关内容编入此书,称为工程力学。因此,这是一门将力学规律直接应用于工程实践的技术基础课。

机械运动是指物体在空间的位置随时间而变化。以物体的机械运动为研究对象所形成的理论力学,不考虑物体受力所产生的变形,又常称为刚体力学。理论力学分为静力学、动力学两部分。静力学研究物体的相对静止状态或说是加速度为零的状态,这是一种特殊的运动形式,设计中大量的构件均处于这种状态,因此,本书着重讨论静力学。以工程应用为目的展开的讨论均以伽里略和牛顿奠定的基本定律为基础,因此它仍属古典力学范畴。

强度是指构件抵抗破坏的能力。任何构件都必须有足够的强度,如贮气罐不允许在规定的压力下破坏,钢丝绳起吊一定的重量时不致拉断,以及承受屋顶或楼板的横梁不应受载后折断等等。

刚度是指构件抵抗变形的能力。任何构件受力后都会变形。但必须把这种变形控制在一定的限度以内,否则将影响构件的正常使用。如某些机械零件的变形过大会导致啮合不良;过度弯曲的轴在运转中会产生振动;化工厂塔器内的隔板变形过大,溶液深度差别就会太大,进而将影响化学反应的正常进行,等等。

稳定是指构件保持其原有变形形式的能力。如细长的直杆受压时,压力增加到一定限度后,虽未压坏却明显弯曲而丧失了继续工作的能力。具有足够的稳定性才能保证构件正常工作。

强度、刚度和稳定是材料力学研究的中心,满足这三个条件的构件才是安全的。保证安全的要求往往导致人们选择好的材料和加大尺寸,这就需要增大投资。显然,只强调安全性是不够的,必须同时考虑经济上的合理性,因此,这些基本规律的研究在于处理好安全与经济这一对矛盾,尽可能地使设计趋向合理。

全书共分十六章:

第一章至第四章介绍静力学,讨论物体相对静止的条件。以平面力系为主展开讨论,并适当地推广到空间力系。

第五章至第十二章介绍材料力学基础,讨论材料力学的基本分析方法,几种基本变形形式及其组合等基本理论。

第十三章和第十四章介绍了工程中常常遇到的剪切实用计算和动应力计算。

工程力学是各工科专业的技术基础课,它为机械设计、土建设计以及其他专业设备的学习提供了必要的理论基础,同时也有助于其它一些工艺专业课程的学习。

本教材前言和第一至四章、十至十一章由吴曾谅编写;第五至九章、十二章、十四章由程振宇编写;第十三章由冯宸编写。教材中的插图由祁伏京、陈煦霞绘制。

目 录

前 言

第一章 静力学基础	(1)
§ 1-1 基本概念	(1)
§ 1-2 静力学公理	(2)
§ 1-3 约束与约束反力	(4)
§ 1-4 受力图	(6)
习题	(7)
第二章 汇交力系	(10)
§ 2-1 平面汇交力系平衡的几何条件	(10)
§ 2-2 平面汇交力系的平衡方程	(12)
§ 2-3 空间汇交力系的平衡方程	(15)
习题	(16)
第三章 力偶理论	(18)
§ 3-1 平面上的力对点之矩	(18)
§ 3-2 平面力偶及其性质	(20)
§ 3-3 平面力偶的合成与平衡	(23)
§ 3-4 空间力偶系 力对轴之矩	(24)
习题	(27)
第四章 一般力系	(28)
§ 4-1 力的平移定理	(28)
§ 4-2 平面力系向一点简化	(29)
§ 4-3 简化结果的分析 合力矩定理	(31)
§ 4-4 平面一般力系的平衡方程	(32)
§ 4-5 静定与静不定 物体系的平衡	(35)
§ 4-6 考虑摩擦时物体的平衡	(37)
§ 4-7 空间一般力系	(42)
§ 4-8 重心	(44)
习题	(47)
第五章 材料力学的基本概念	(51)
§ 5-1 变形固体的基本假设	(51)
§ 5-2 内力 截面法 应力	(52)
§ 5-3 杆件变形的基本形式	(53)
第六章 轴向拉伸与压缩	(55)
§ 6-1 轴向拉伸与压缩的概念	(55)
§ 6-2 轴向拉伸(压缩)时的内力和应力	(55)

§ 6-3 轴向拉伸(压缩)时的变形 虎克定律 变形能	(59)
§ 6-4 材料在拉伸时的力学性能	(61)
§ 6-5 材料在压缩时的力学性能	(64)
§ 6-6 温度对材料力学性能的影响	(65)
§ 6-7 材料的断裂韧性	(66)
§ 6-8 许用应力与安全系数	(67)
§ 6-9 拉伸与压缩时的强度条件	(68)
§ 6-10 应力集中	(70)
习题	(71)
第七章 圆杆扭转	(74)
§ 7-1 扭转的概念	(74)
§ 7-2 外力偶矩 扭矩 扭矩图	(74)
§ 7-3 薄壁圆筒扭转时的应力 剪切虎克定律	(77)
§ 7-4 圆轴扭转时的应力与变形	(78)
§ 7-5 圆轴扭转时的强度和刚度条件	(81)
习题	(84)
第八章 平面弯曲的强度计算	(86)
§ 8-1 平面弯曲的概念 梁的类型	(86)
§ 8-2 剪力和弯矩	(87)
§ 8-3 剪力图和弯矩图	(89)
§ 8-4 纯弯曲时梁的正应力	(92)
§ 8-5 惯性矩与抗弯截面模量	(95)
§ 8-6 弯曲正应力的强度条件	(98)
§ 8-7 梁的剪应力	(100)
§ 8-8 提高梁承载能力的措施	(102)
习题	(105)
第九章 梁的变形	(108)
§ 9-1 梁的挠度和转角	(108)
§ 9-2 梁的挠曲线近似微分方程	(108)
§ 9-3 用叠加法计算梁的变形	(110)
§ 9-4 简单静不定梁的分析	(113)
习题	(115)
第十章 应力状态与强度理论	(117)
§ 10-1 概述	(117)
§ 10-2 一点的应力状态	(117)
§ 10-3 二向应力状态的分析	(119)
§ 10-4 三向应力状态	(123)
§ 10-5 广义虎克定律与弹性变形比能	(124)
§ 10-6 强度理论的概念	(125)

§ 10-7 强度理论的应用·····	(127)
习题·····	(131)
第十一章 组合变形·····	(133)
§ 11-1 概述·····	(133)
§ 11-2 拉伸(压缩)与弯曲的组合·····	(133)
§ 11-3 弯曲与扭转的组合·····	(136)
习题·····	(139)
第十二章 压杆稳定·····	(141)
§ 12-1 概述·····	(141)
§ 12-2 细长压杆的临界载荷·····	(142)
§ 12-3 压杆的临界应力·····	(144)
§ 12-4 压杆的稳定计算·····	(147)
§ 12-5 提高压杆稳定性的措施·····	(149)
习题·····	(150)
第十三章 剪切实用计算·····	(152)
§ 13-1 剪切概念·····	(152)
§ 13-2 剪切和挤压的实用计算·····	(152)
§ 13-3 焊缝的强度计算·····	(155)
习题·····	(158)
第十四章 动应力计算·····	(160)
§ 14-1 概述·····	(160)
§ 14-2 等加速度运动构件的强度计算·····	(160)
§ 14-3 冲击应力·····	(162)
§ 14-4 交变应力·····	(165)
§ 14-5 振动应力·····	(168)
习题·····	(172)
附录 I 型钢表·····	(174)
附录 II 习题答案·····	(184)

第一章 静力学基础

静力学将讨论力系的简化及物体在力系作用下处于平衡的条件。它是工程问题的力学分析基础。

这一章将从有关的基本概念和公理入手,进而讨论力学分析时简化工程问题的方法。

§ 1-1 基本概念

静力学中要遇到三个基本概念,它们是:力、刚体、平衡。

一、力 力是物体间的相互作用。这种作用使物体的运动状态和形状发生变化。

最初人们在提、掷、推、举某一物体时,感受到人对物体使力的作用,后来进一步认识到物体与物体间存在着相互作用,例如两球相碰,各自改变着对方的运动状态(方向、速度),以手推车,手施力于车,使车的运动状态发生变化(由静到动,由慢到快,或反之),同时手受到车的反作用力,肌肉感到紧张。牛顿定律指出,物体运动状态发生变化就必然是力作用的结果。力的这种改变物体运动状态的效应,称外效应。手拉弹簧使弹簧伸长,车通过桥梁使桥面板受压弯曲,这时弹簧和桥面板虽保持静止,运动状态没有变化。但是形状发生了变化,力的这种改变物体形状的效应称为内效应。

实践表明,力对物体的效应决定于三个要素:大小、方向、作用点。

力的大小表示这种相互作用的强弱程度。通过力的外效应来度量。在国际单位制中,力的单位是牛顿(N)或千牛顿(kN), $1\text{kN}=10^3\text{N}$ 。工程单位制中力的单位是公斤(kg), $1\text{kg}=9.8\text{N}$ 。本书均采用国际单位制。

力的方向,表示这种作用是有方向性的,不同的方向其效应不同。因此力是一个矢量,可以用带箭头的有向线段AB来表示,如图1-1,按一定比例尺确定AB的长度表示力的大小,线段的方位加箭头表示方向。

力的作用点是指力的作用位置。大小、方向完全相同的力,由于作用点的不同会有不同的效应。

应该指出,作用点是力的作用位置的抽象化。物体间的相互作用往往不是集中在一个点上,而是分布在一定的面积上或一定的体积内,例如物体的自重和惯性力作用于物体内部每一质点上,常用单位是牛/米³,记为 N/m^3 ;容器内受的气压或水压是作用于容器内部表面上,常用单位是牛/米²(N/m^2);还有些力是沿构件轴线作用的,常用单位是牛/米(N/m)。这些力称为分布力。分布力又分为均布力和非均布力。分布力的大小通常称为集度。当力作用于很小的面积或很短的线段上,就可将该力看作是作用于一点的集中力,这个点便是力的作用点。火车车轮对钢轨的压力和钢索起吊重物时钢索的拉力等都可认为是集中力,集中力的单位为牛(N)或千牛(kN)。以后将指出分布力可以用等效的集中力代替,如重力可以用作用于重心的集中力代替。因此,作用点可以概括各作用力的作用位置。

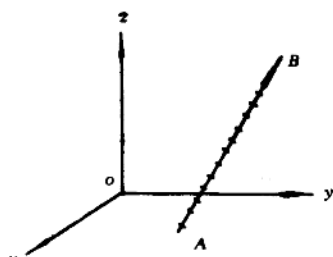


图 1-1

为切实表示力的效应，表示力的矢量应绘在作用点上，或者说力是定位矢量。过作用点沿力的方向的直线称为力的作用线。

作用于物体的一群力称为力系。

二、刚体 刚体是指在不产生变形的物体。不变形包含着大小、形状均不改变的意思，通常可以用“刚体内任意两点的距离不变”来描述它。

事实上，物体受力总是要变形的。若变形很小，不影响所研究问题的实质就可以忽略，把它抽象化为理想的模型——刚体，以减少问题的复杂程度。这种抽象与简化是科学研究所必须的。

在静力学中，我们只研究力的外效应。分析物体的运动状态，很小的变形完全可以忽略，因此，总可以把物体看作刚体。但在后面讨论材料力学时，将研究力的内效应，变形即使很小也不允许忽略，这时物体不再是刚体，而是弹性物体了。

三、平衡 平衡是指物体在选定的坐标系中保持相对静止或作等速直线运动的现象。

工程上通常采用与地球相连的坐标系。

我们都知道运动是绝对的，平衡是相对的、有条件的。也就是说，在特定的力系作用下，物体才能保持平衡，这种力系称为平衡力系。

两个力系对同一刚体产生的外效应相同，则此两力系互为等效力系。若一力的外效应与某个力系的外效应相同，则称这个力为该力系的合力。

§ 1-2 静力学公理

力的性质可以由几个静力学公理所概括。

公理一 二力平衡原理 作用于刚体的两个力为平衡力系的充分必要条件是：这两个力大小相等，方向相反，作用于同一直线上，即两力等值、反向、共线。

应当指出，这个原理只适用于刚体。对于变形体，这些条件只是必要的，但不充分。如二人各持绳的一端相反使力，尽管大小相同，方向相反且作用于同一直线上，但并不平衡，如图 1-2(a)。

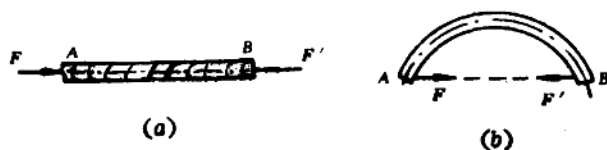


图 1-2

工程中不少构件只承受两个力而保持平衡，这种构件称为二力构件，如图 1-2(b)。无论构件形状怎样，作用于构件的二力平衡必定符合本原理给出的条件。

公理二 加减平衡力系原理 在一个力系上添加或去掉一个平衡力系，并不改变原力系对刚体的效应。

这个公理对力系的简化起重要作用，以下各章将反复运用。

推论 力的可传性 作用于刚体的任何力矢，作用点可以沿作用线移动，而不会改变它

对刚体的效应。

证：设力 F 作用于刚体的 A 点，如图 1-3(a)，依据公理二，可以在力 F 作用线上的一点 B 处添加平衡力系 F_1 、 F_2 ，并令 $F_1 = F = F_2$ ，如图 1-3(b)。则不难看出 F 与 F_2 也是一对平衡力，仍依据公理二，可以去掉这一对平衡力，仍保持原力系的效应，如图 1-3(c)。比较(a)与(c)，就证明力 F 由 A 点移至 B 点，其外效应不变。

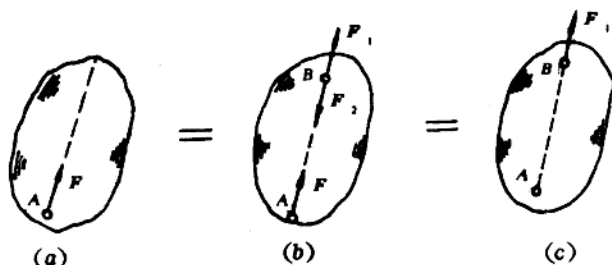


图 1-3

这就是说，作用于刚体的力矢可沿其作用线滑动，是滑动矢量。

公理三 力的平行四边形法则 作用于物体上同一点的两个力其合力的大小和方向由原两力矢为边的平行四边形的对角线矢量所决定，如图 1-4。

力是矢量，矢量的加法规则对力矢也是适用的。普通物理实验已验证了公理三的正确性。

推论 平面内三个不平行的力若平衡必汇交于一点。

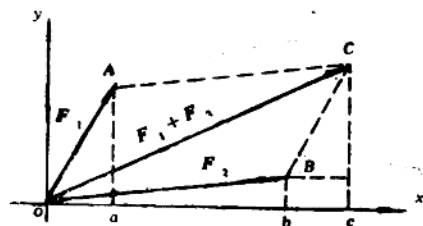


图 1-4

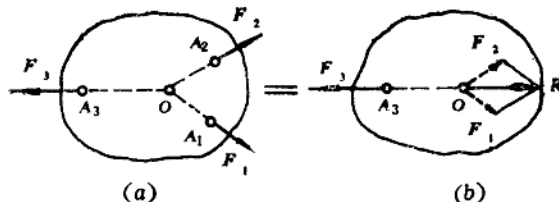


图 1-5

证：如图 1-5(a) 设 F_1 作用于 A_1 点， F_2 作用于 A_2 点， F_3 作用于 A_3 点。按力的可传性和公理三求 F_1 和 F_2 的合力，则合力 R 必作用于 O 点，即 F_1 、 F_2 作用线的交点。合力 R 代替 F_1 和 F_2 ，则物体上只有两个力 R 、 F_3 ，如图 1-5(b)。依据公理一、二力平衡的条件可推得 F_3 与 R 必共线，即 F_3 也通过 O 点。因此 O 点就是三个力的交点。

公理四 作用与反作用定律 任意两个物体间的相互作用力总是大小相等、方向相反、作用线相重，分别作用在两个物体上。简言之两物体间的相互作用力是：等值、反向、共线、异体。这就是牛顿第三定律，它说明力总是成对出现的，物体间的相互作用力必须同时存在，同时消失。这一定律对物体的受力分析有重要作用。值得注意的是，这一对作用力和反作用力是与二力平衡中的两力是不同的，后者指作用于同一物体的两个力，而前者指作用于两个不同物体的力。

§ 1-3 约束与约束反力

在空间可以自由运动，其位置不受任何限制的物体称为自由体，如空中的飞机、火箭、炮弹等。位移受到预先给定条件的限制不能自由运动的物体称为非自由体，如转轴受轴承的限制只能转动；电梯受导轨的限制只能上下运动；桥梁架设在桥墩上固定不动等等。

工程结构的构件和机械的零件都是非自由体。非自由体上位移受到限制的条件总是通过与周围物体的接触而构成的，通常称构成限制条件的这些周围的物体为约束，如限制转轴的轴承、限制电梯的导轨、限制桥梁的桥墩都是约束，而转轴、电梯、桥梁则称为被约束物体。约束与被约束物体之间存在着相互作用的力。由于约束阻挡了物体某一方向的运动，必承受这些方向传来的力。同时约束也必产生相反方向的反作用力作用于物体，这些力称为约束反力。实质上，约束正是通过约束反力来限制物体运动的。

物体上除了承受约束反力以外，还承受着载荷，如重力、风力、土压力、水压力、电磁力等等。这些力会引起物体的运动或产生运动的趋势，称为主动力。主动力往往是给定的或已知的。由主动力引起的约束反力又称被动力，这是未知的、待求的。求未知的约束反力是静力学要解决的一个重要问题。

约束是由物体的相互接触形成的，因而约束反力必作用在接触处。接触的方式不同，约束反力也不同，依次分类可得到下面几种常见的约束类型。

一、柔索

绳索、链条、皮带等都可视为柔索，它们的特点是能承受很大的拉力，但抵抗压缩和弯曲的能力很差，可忽略不计。因此，它给予物体的约束反力必作用于接触点，沿柔索轴线而背离物体。例如图 1-6(a)所示，起吊机盖时钢索的约束反力沿索的轴线作用而背离机盖或铁环。经过轮子的柔索，其约束反力应沿切线背离切点，如图 1-6(b)所示。

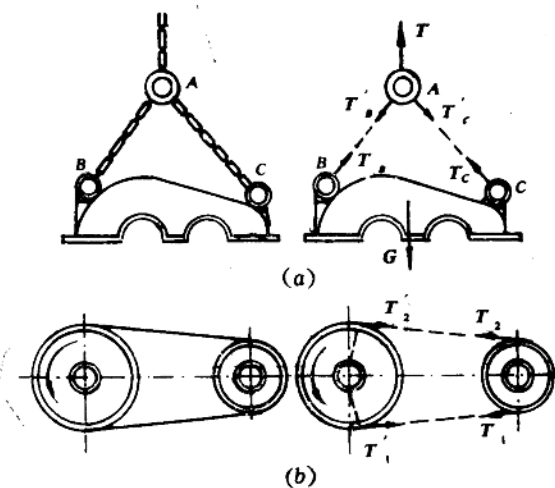


图 1-6

二、光滑面

两刚体接触，凡表面摩擦力很小可以忽略时，均可作为光滑面约束。如图 1-7(a)所示，置于光滑面上的圆球，圆球不能向下压入光滑面而运动，但是可以沿切线方向自由滑动。因此，其约束反力必作用于接触点，沿公法线方向指向物体。注意图中有阴影的部分是约束，给出的约束反力是作用于物体（无阴影的部份）的。工程中见到的齿轮、搁置墙角的梯子均属此类约束，如图 1-7(b)、(c)。

三、圆柱铰链

圆柱铰链如图 1-8 所示，是用圆柱形销钉将需要连接的两个物体 A、B 连接起来，限制

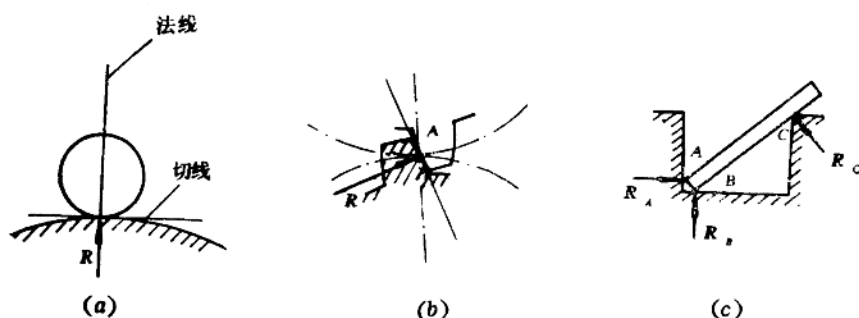


图 1-7

了两构件间的相对移动，但仍可自由地相对转动。通常忽略销钉与圆孔接触面上的摩擦力，因此又称光滑铰链。

显然，销钉与被约束物体可以在圆柱面任一母线上相接触，这将由两个连接物体的相对运动趋势来决定。图 1-9(a) 所示铰链的平面图上，销钉与被约束物体相接触于 K 点，忽略摩擦，是光滑面接触，其约束反力的方向就应该沿接触面的公法线（通过圆柱中心）而指向物体。当两物体的运动趋势不明确，接触点不能预先决定，约束反力的方向也就不能确定了，因此，常常以互相垂直而通过圆柱中心的两个反力 F_x 和 F_y 来代替总反力 R 。这样，不同指向的反力 R 可由 F_x 、 F_y 两力不同值、不同指向的组合来体现，如图 1-9(b)。

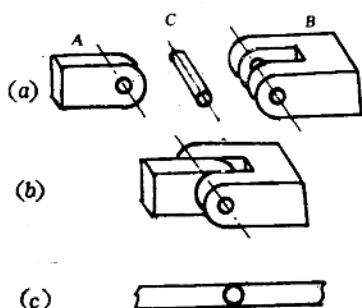


图 1-8

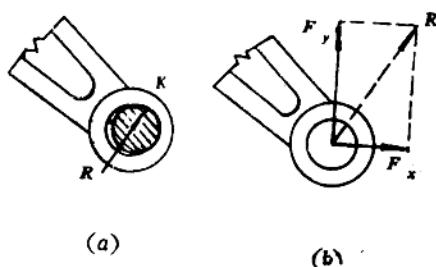


图 1-9

铰链约束在工程中应用很广，窗户上的活页就是一例。桥梁的一端所用的固定铰链支座也是一例，其结构如图 1-10(a)，图中(b)、(c)是它的简化表示方法，简称固定支座。

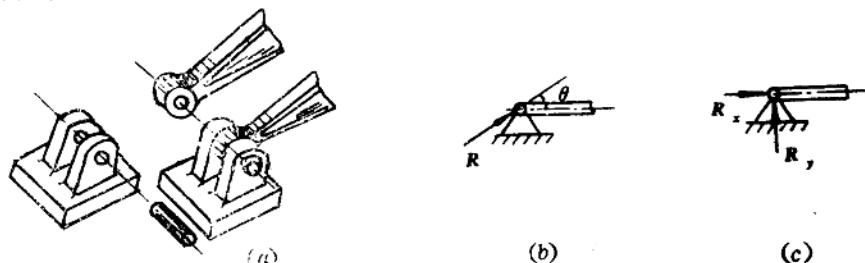


图 1-10

辊轴支座也称活动铰链支座,是在铰链下安装一排滚子形成的,常用于桥梁。其结构如图 1-11(a), 约束反力应垂直支承面,并通过铰链中心。图 1-11(b)、(c)是这种支座的简化表示方法,简称活动支座。

向心轴承是机器中常见的一种约束,它的性质与铰链相同,不过在这里轴是被约束物体,外围的轴承是约束。因此装在轴承内的轴受到的约束反力是指向圆心的一对相互垂直的力,图 1-12 表示了轴承所受的力。

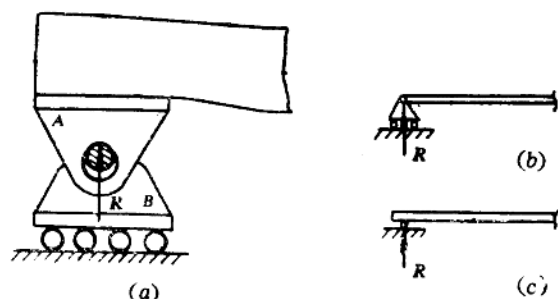


图 1-11

止推轴承除了有向心轴承的作用外,还能阻止轴沿轴向的运动,因而多一个沿轴线的约束反力,图 1-13 是它的简化表示方法。

球形铰约束简称球铰。被约束的杆件可以在空间任意转动,但不能移动,如图 1-14 所示,它的反力由过球铰中心的三个分力来表示。

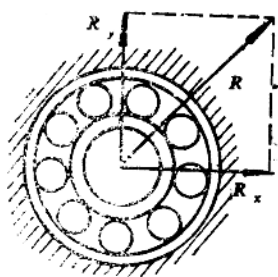


图 1-12

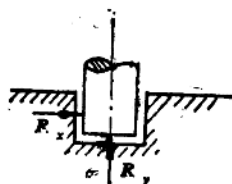


图 1-13

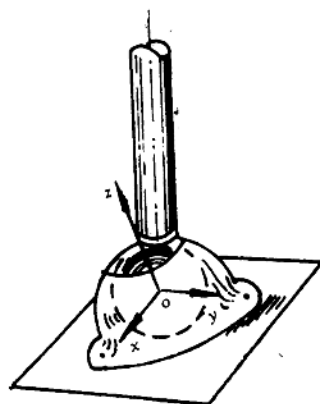


图 1-14

§ 1-4 受力图

任何机械都是由多个零件组成的,任何结构也都是由多个构件结合起来的,在设计中我们需要逐个零件、逐个构件地分别进行分析。为此,就得把所研究的物体想象地从整体中分离出来,这种解除约束(切开与其它物体的联结)而分离出来的物体称为**分离体**。在分离体上画出它所受的全部力,包括主动力和约束反力,这样的图形称为**受力图**。

取分离体并绘受力图就是将实际问题简化为力学模型,它是进行力学计算的基础。下面举例说明绘制受力图的方法。

例 1-1 用力 P 拉动压路的碾子。碾子重 G , 并受路面突出部分的阻挡,如图 1-15(a),

试绘出碾子的受力图。

解：碾子是研究的物体，它受到地面及突出部分的阻挡。解除约束就是想象地脱离地面，可将地面用虚线表示，然后绘出主动力——重力 G 及拉力 P 。在解除了约束的地方应受到约束反力。当忽略摩擦力，作为光滑面约束处理时，则约束反力的方向是过碾子中心且指向碾子，如图 15(b) 所示就是碾子的受力图。

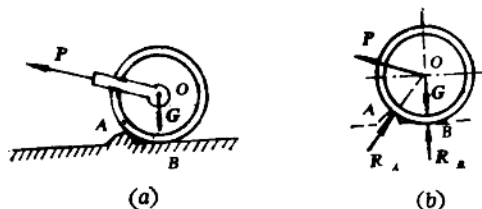


图 1-15

由此看到，绘受力图的一般步骤是：

- (1) 选取研究物体，绘出其基本轮廓；
- (2) 绘出该物体所承受的全部主动力；
- (3) 对物体在原有结构中受到约束的部位，按前节介绍的约束分类画出约束反力。

有时还需要依照静力学公理和平衡条件简化作用于物体的力系。

例 1-2 重量为 Q 的电机放在水平梁 AB 上，梁的重量为 G ， A 端用铰链固定， B 端用斜杆 BC 支撑，斜杆 BC 两端均为铰链连接，不计斜杆重量，如图 1-16(a)。分别绘出梁、斜杆的受力图。

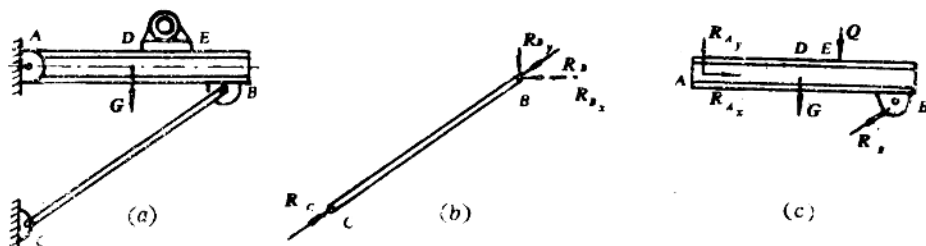


图 1-16

解：先以斜杆为研究物体，取分离体图 1-16(b)，斜杆上没有主动力作用。两端为铰链连接，因此约束反力均为互相垂直的一对力，图上虚线所示。进一步考虑， BC 两端铰链的约束反力可用合力代替，那么 BC 杆上只有两个作用力。由二力平衡条件可知，此二力的作用线必重合。显然这条作用线就是 B 、 C 两点的连线。如图所示， B 和 C 两端的约束反力是 R_B 和 R_C ，这就是前面介绍的二力构件。

取梁 AB 为分离体。给出其主动力自重 G (在梁中间) 及电机重量 Q 。 A 点铰链的约束反力是一对互相垂直的力 R_{Ax} 、 R_{Ay} 。 B 点与斜杆相连，因此梁加于斜杆的力 R_B 与斜杆加于梁的力 R'_B 是一对作用力与反作用力，它们应该大小相等，沿同一作用线而指向相反。

正确地绘制受力图并不是容易的，需要多实践，积累经验。应该注意，不要遗漏应该绘出的力——各个主动力及每一约束点的反力，也不能多画力，要正确运用作用与反作用定律，并正确确定物体间的连接类型。

习 题

1-1 力的三要素是什么？下列各图中，已知 $F_1 = F_2$ ，是否 F_1 和 F_2 对刚体的作用相

同, 为什么?



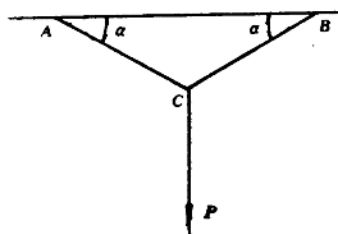
题 1-1 图

1-2 图中绳索承受沿铅垂向下的力 P 是定值。A、B 两点固定在水平面上, 是否 AB 两点相距愈远绳索愈容易拉断? 为什么?

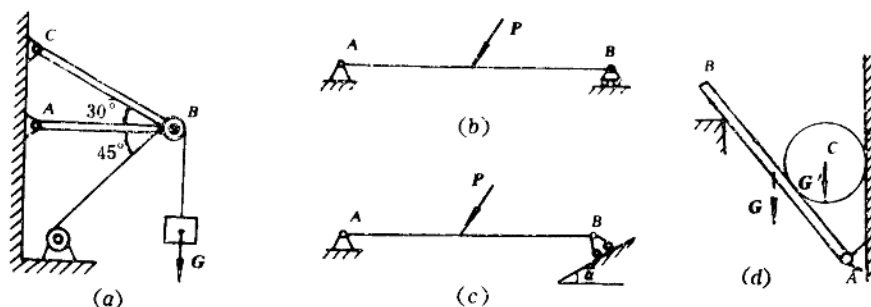
1-3 什么是二力构件? 二力构件是否必须用铰链连接? 二力构件是否必须是直杆?

1-4 绘出下列各图中指定物体的受力图:

- (a) 横梁 AB 及斜杆 BC;
- (b) 梁 AB;
- (c) 梁 AB;
- (d) 斜杆 AB 及圆筒 C。



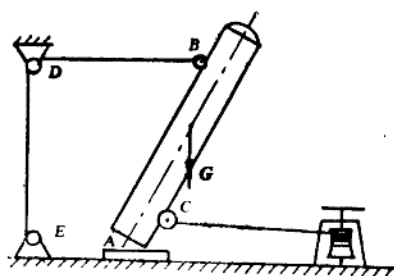
题 1-2 图



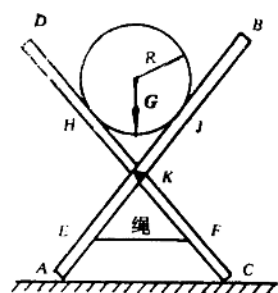
题 1-4 图

1-5 塔器吊装过程的受力状态如题 1-5 图所示。下端搁置在基础上, C 处的钢绳连接用铰盘拉住, 上端 B 处以钢绳通过定滑轮接卷扬机 E 吊装牵引。试绘出塔器受力图。塔器重量为 G 。

1-6 图示圆柱半径为 R , 重量为 G , 架在一个由 AB 与 CD 杆及绳 EF 组成的支架上, 处于平衡, K 处为铰链。若接触处均为光滑, 杆与绳的重量不计。试分别画出 (1) 圆柱、(2) AB 杆、(3) CD 杆、(4) 圆柱及 AB 杆、(5) 整体的受力图。



题 1-5 图



题 1-6 图

第二章 汇交力系

最简单的一种力系是各力作用线交于一点的力系，称为汇交力系。作用于刚体的力可以沿作用线滑动而效应不变，所以，这里指的作用线也包括其延长线。

这一章要讨论汇交力系的简化，以及物体受汇交力系作用时的平衡条件。

§ 2-1 平面汇交力系平衡的几何条件

一、力的合成——多边形法则

用力的平行四边形可以求两个力的合力，为了便于求多个力的合力，需要对它略作简化。

依照力的平行四边形法则，两力 F_1 和 F_2 的合力 R 由平行四边形的对角线 AC 表示，如图 2-1(a)。由于 $BC = AD = F_2$ ，所以，直接绘 $\triangle ABC$ 也就确定了合力 R 。具体作法是：从 A 点绘矢量 $AB = F_1$ ，由 F_1 的终点 B 绘 $BC = F_2$ ，则连接 F_1 的起点 A 和 F_2 的终点 C 所得到的矢量 AC 就是合力矢 R ，如图 2-1(b)。这个方法称为力的三角形法则。

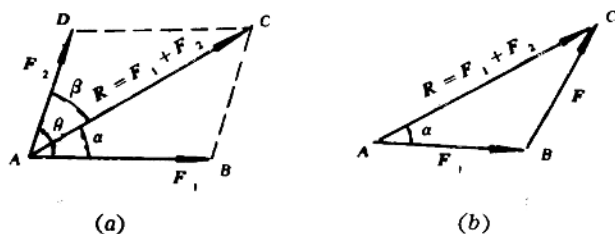


图 2-1

将三角形法则推广到求多个力的合力是比较方便的。如图 2-2，用三角形法则求 F_1 和 F_2 的合力 R_{12} 可由 $\triangle abc$ 得到；再求三个力的合力，由于 $F_1 + F_2 + F_3 = F_{12} + F_3 = R_{123}$ ，所以用三角形法则，可由 $\triangle acd$ 得到。这样连续使用三角形法则，就可以得到多个力的合力，如图中 $ae = R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ 。在这个过程中，形成了由汇交力系各力矢及其合力矢组成的多边形，称为力多边形。不难看出，求总的合力 R 的中间过程是可以省略的。事实上只要将汇交力系的各力矢依次首尾相接，则由第一个力矢的起点指向最后一个力矢终点的矢量（力多边形的封闭边）就是力系的合力。这个求汇交力系合力的方法称为力的多边形法则。

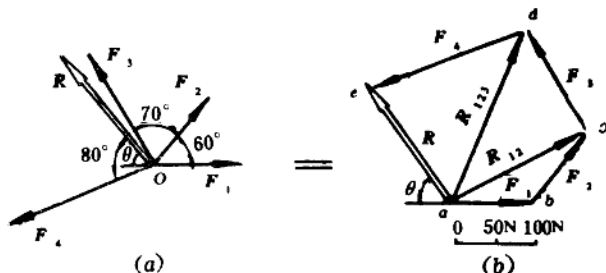


图 2-2

合力 R 对刚体的作用与整个力系对刚体的作用等效，也就是说汇交力系可以简化为一个力——合力来代表。同时，合力矢是力系内各力矢的矢量和，即：

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad (2-1)$$

由此得出结论，平面汇交力系合成后可简化为一个合力，这个合力的作用线通过力系的汇交点，大小和方向是力系各力矢的矢量和，并可由力多边形的封闭边来确定。

二、平衡条件

物体处于平衡状态时其运动状态没有变化，因此作用于物体的力系外效应为零。以合力代替平面汇交力系，外效应仍应为零，故所受合力为零，即 $R=0$ 。反之，若合力为零，力系对物体的外效应为零，则物体必处于平衡状态。所以汇交力系作用下的物体平衡的必要充分条件是力系的合力为零。由力多边形求合力，合力为零时，力多边形中的最后一个力矢的终点必与第一个力矢的起点重合，如图 2-3。因此，平面汇交力系平衡的必要充分几何条件就是：汇交力系的各力矢组成封闭的多边形。

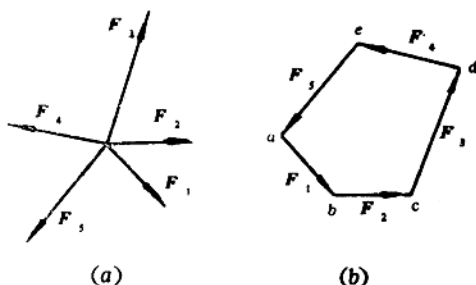


图 2-3

当我们知道一个物体在汇交力系作用下处于平衡状态，就可用这个法则求出未知的约束反力。

例 2-1 用钢丝绳起吊一机盖，已知机盖重 $G=1200\text{ N}$ ，钢丝绳与铅垂线的夹角分别为 $\alpha=35^\circ$ 和 $\beta=25^\circ$ ，如图 2-4(a)所示。求绳的拉力

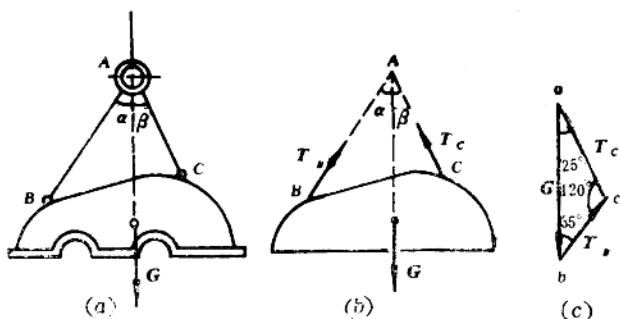


图 2-4

解：以机盖为研究对象，绘受力图，如图 2-4(b) 所示。机盖上作用有已知重力 G 和两个绳的拉力 T_B 、 T_C ，绳索的拉力沿绳的中心线作用，指向背离机盖，需求出它们的大小。根据三力平衡必汇交于一点的推论，可知这是一个汇交力系。

由平衡条件知道，处于平衡的物体上汇交力系的各力矢组成封闭多边形，因此，这里的三个力应组成封闭的三角形。先按确定的比例尺绘出重力 $G=ab$ ，由 b 点画 T_B 的平行线，由 a 点画 T_C 的平行线，相交于 c 点。则 $ca=T_C$ ， $bc=T_B$ ，按比例量得

$$T_B = 586\text{ N}, \quad T_C = 795\text{ N}$$

§ 2-2 平面汇交力系的平衡方程

用几何法简化平面汇交力系得到力系的合力，并且有了求合力的具体方法，但是借助绘图来求合力的方法精确度有限，其应用也受到了限制，应用较广的是利用直角坐标系建立的解析法，这正如矢量计算中的几何法与解析法一样。

一、力在直角坐标轴上的投影

由力矢 $\mathbf{F} = \overrightarrow{AB}$ 的两端分别向直角坐标轴作垂线，垂足分别是 a, b, a', b' ，如图 2-5。线段 ab 和 $a'b'$ 就是力矢在 x 轴和 y 轴上的投影，记作 F_x 和 F_y 。力的投影是代数量，我们规定线段 ab ， $a'b'$ 与坐标轴的方向一致时为正，如图 2-5(a)。反之取负，如图 2-5(b)。由图容易得出力在坐标上的投影为：

$$\begin{aligned} F_x &= |\mathbf{F}| \cos \phi \\ F_y &= |\mathbf{F}| \sin \phi \end{aligned} \quad (2-2)$$

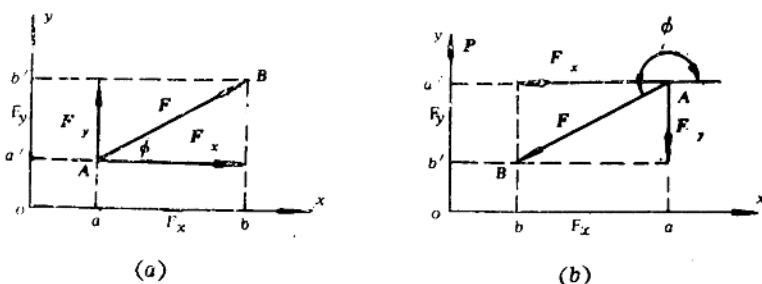


图 2-5

其中 ϕ 是力矢与 x 轴正向的夹角。必须注意，力的分量是矢量。若用坐标方向的单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 表示，则分别为 $\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i}$ ， $\mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j}$ 。因此力 $\mathbf{F}$ 可表示为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2-3)$$

且

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \tan \phi &= F_y / F_x \end{aligned} \quad (2-4)$$

其中 F 表示力的模。

二、汇交力系的合成

先以两个相交的力 $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ 为例说明用力的投影求汇交力系合力的方法。分别用投影表示 $\mathbf{F}_1 = F_{x_1} \mathbf{i} + F_{y_1} \mathbf{j}$ ， $\mathbf{F}_2 = F_{x_2} \mathbf{i} + F_{y_2} \mathbf{j}$ ，则用代数运算可求得合力 $\mathbf{R}$ ：

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = F_{x_1} \mathbf{i} + F_{y_1} \mathbf{j} + F_{x_2} \mathbf{i} + F_{y_2} \mathbf{j} \\ &= (F_{x_1} + F_{x_2}) \mathbf{i} + (F_{y_1} + F_{y_2}) \mathbf{j} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \\ \therefore \quad R_x &= F_{x_1} + F_{x_2} \\ R_y &= F_{y_1} + F_{y_2} \end{aligned}$$