

高考数学 高分对策

梅全正 李茂清编著
旅游教育出版社



AA11/04 21 56 43

高考数学高分对策

梅全正 编著
李茂清



旅游教育出版社

(京)新登字 168 号

高考数学高分对策

梅全正 编著
李茂清

*

旅游教育出版社出版
(北京市朝阳区定福庄 1 号)
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销

*

开本: 787×1092毫米 1/32 16.875印张 240千字

1993年 3 月第 1 版 1993年 3 月第 1 次印刷

印数 1—8000册 定价: 9.60元

ISBN7-5637-0367-5/G·122

前 言

一年一度的高考,引起了全社会的关注!

纵观历年来的高考数学命题,给我们提供了科学地进行高考数学复习的重要信息。诚然,每年高考数学试题不同,命题的重点、题型、试题的分量都在变,特别是压轴题年年有所翻新,但历年来高考数学命题的方向和命题原则没有变,且在试题的广度和深度,题型题量等方面呈稳定趋势。高考复习,从某种意义上说就是要把所学知识进行系统的归纳,总结,巩固,提高,以高考命题不变的态势应其万变。

本书从分析研究历年来高考数学命题的规律和特点入手,根据中学数学教学大纲和全国统编教材,以巩固基础知识,加强基本训练,提高学生灵活运用所学知识的能力为目的,归纳出了高考数学复习的方法、目标、重点和类题分析,精心设计和筛选了一定数量的练习题,并从历年高考数学试题中精选了一部分全国,以及上海、广东和“三南”(湖南,云南,海南)试题,对广大考生进行针对性的复习指导。因此,读者在阅读本书时,注意它与其他类似复习资料的不同之处,在复习方法上作相应的改进,能取得满意的复习效果。

由于时间仓促,加之水平所限,书中可能有疏漏不妥之处,恳谢读者批评指正。

编 者

1992年9月

目 录

第一章 高考数学命题的回顾.....	1
一、高考数学命题规律	1
二、高考数学试题特点	4
三、高考数学复习策略	5
第二章 代数.....	10
一、函数	10
二、三角	26
三、复数	41
四、不等式	62
五、数列、极限	76
六、排列,组合,二项式定理	94
七、代数综合题	106
第三章 立体几何.....	151
一、直线与平面的位置关系	151
二、多面体与旋转体	167
三、角的计算	180
四、求距离	199
五、立几中的最值问题	218
第四章 解析几何.....	225
一、直线和圆	225
二、椭圆、双曲线、抛物线.....	240
三、参数方程,极坐标	263
四、解几计算题	291

五、曲线与曲线的位置关系	326
六、高考解几综合题的解题策略	344
第五章 综合能力训练	353
一、高考选择题的解法	353
二、高考填空题的解法	376
三、最值	390
四、复数的应用	408
五、数学归纳法	429
六、数形结合	437
七、含参数的数学问题	444
八、轨迹探求法	480
九、折迭与截面	503
附：全国高考数学试题与答案	514
(一) 1992 年全国高考数学(理工类)试题	514
(二) 1992 年全国高考数学(文史类)试题	523

第一章 高考数学命题的回顾

从历年高考数学命题所反映出来的情况中，探求高考命题规律，归纳高考试题特点，提炼高考命题信息，对我们搞好高考复习是很有必要的。

一、高考数学命题规律

1. 题型结构日趋稳定，考题分为选择题、填空题、解答题（证明题和计算题）三类题型，且标准化试题（选择题，填空题）比重呈逐年增大的趋势，并初步稳定在 60 分左右（见表一）

表一 题型

题数 年份 题型	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
选择题	5	5	10	8	15	12	15	15	18
填空题	6	5	6	7	5	6	5	5	5
证明题	2	2	2	3	3	2	1	1	2
计算题	6	5	5	6	3	6	6	5	3
总题数	19	17	23	24	26	26	27	26	28

2. 考题中各科所占分数比与教学时数一致。高中数学按教学大纲规定总时数为 303 课时，代数约占 63%（其中三角约占 24%），几何约占 40%（其中立体几何约占 19%）。1984 年以来，各科比重相对稳定，代数约 60 分左右，三角约 20 分

左右，立体几何约 18 分左右，解析几何约 22 分左右（见表二）。

表二 比重

分数 科目	年份	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
代数		58	59	68	57	46	62	55	51	49
三角		14	24	17	20	25	18	23	20	22
立体几何		16	10	17	17	18	20	17	22	22
解析几何		22	27	18	26	31	20	25	27	27

3. 知识覆盖面大，试题覆盖的知识点逐年有所增加（见表三）。

表三 知识点个数

个数 项目	年份	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
大纲个数		115	115	132	132	132	132	132
高考个数		48	43	54	59	61	70	81
百分比%		41.7	37.4	40.9	44.7	46.2	63	61.4

4. 试题来源逐年侧重于课本。即从 1984 年以来，高考试题越来越多地可在教材中找到原型。有的是教材中的成题；有的是将教材中的例题和习题进行改编；有的是把教材中的几个题进行综合和引伸，就是最后的综合题，压轴题也是紧紧围绕大纲的要求设计。1992 年高考理科试题的第 26 题，就是高一立体几何课本第 42 页的例题。类似这样以高中数学课本中重要例题作为试题的情况，在历年的高考试题中已是

屡见不鲜的事了。

5. 选择题答案唯一,文科与理科题大部分相同,文、理科试题逐渐接近。从1987年开始,上海高考数学试题文理科已统一命题,文科不考的内容,除参数方程外理科必考。

6. 计算能力要求愈来愈高。1984年以来,计算已成为高考得分的主要手段,甚至成为证明手段了。(见表四)。

表四 计算得分数

年份	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
得分数	96	94	88	96	100	102	111	110	108
百分比%	80	78.5	73.3	80	83.3	85	92.5	91.7	90

7. 基础知识的比例逐渐增大,突出考查灵活应用双基的能力。试题体现了“出活题,考基础,考能力”,知识考查与能力考查相结合,以考能力为主。1988年以前基础知识约占40%,1988年以来约占50%以上。上海题,广东题,“三南题”的共同特点是:基础知识题较全国题比例更大,约占总分的60%。

8. 考题分为容易、中档、难题三个档次,第一档以选择题、填空题出现,主要考查基本概念和基本运算,但也有一定的灵活度;第二档考查一般能力;第三档考查综合运用知识和灵活运用知识的能力,通常列为最后两题,一般是总分的20%。综合题意在偏重考查能力,并拉开考生的成绩档次,但多年来综合题却不偏、不怪,没有高难题,一般在12分左右。易、中、难试题的分值之比约为3:5:2。

9. 第三档题目的重点内容转移。1984年到1987年的第三档题,以递推数列和圆锥曲线综合题为重点,计算题和证明

题各半。1988年以来,递推数列部分已转移到集合,函数。圆锥曲线综合题则经久不衰仍是重点,并突出了参数分类问题,最值问题,以计算题为主。

二、高考数学试题特点

1. 以函数为纲。函数是近代数学中的重要思想方法,其内容除涉及集合,函数本身的性质,基本初等函数外,还渗透在解析几何、立体几何、方程和不等式等内容中。高考试题中,每年都有函数题,且数量、质量呈上升趋势。从1988年开始,每年考题的第三档题也是以函数和与函数相关的参数、最值问题为主。

2. 每年必考内容:集合,函数的性质,充要条件,极限的概念和求法,排列组合,二项式定理,极坐标(文科不考),圆锥曲线等。

3. 立体几何试题在考查空间想象能力、逻辑思维能力的同时,尽量加大覆盖面,未触及的只有“球冠”和“球缺”的体积两个小节,未覆盖的只有“球冠及其面积”和“球缺及其体积”两个知识点。考查重点明显侧重于线面垂直,即立体几何试题以线面垂直为主线。题型都既要论证,也要计算,而且评分重点明显在论证。所有立几大题都是以中档题出现,且绝大部分都给出了与考题有关的图形,一般涉及第一章内容的题目较多,1991年出现了第一章与第二章结合的大题。

4. 解析几何的重点是圆锥曲线。1986年以来,每年都有圆锥曲线的2至6个小题。在第三档题中必有一个圆锥曲线题,参数方程很少考查,极坐标每年都有一个小题。

5. 高考数学题中,三角已不单列大题,具有数量少,内容浅,有一定的综合性的特点。主要是把三角作为基础知识,体现它在解题中的工具作用。

三、高考数学复习策略

回顾、研究、分析、对照历年来的高考试题,确实存在着一个“变”与“不变”的问题。所谓“变”,是指题型年年或多或少有所翻新,考查知识点年年有所更换,难度年年时起时伏有所变化,尤其在压轴题上;所谓“不变”,是指三考(考基础,考教材,考能力)和四基(基本知识,基本技能,基本方法和基本联系)不变,即“出活题,考基础,考能力”的命题方向不变。因此,在高考复习中,最佳的策略是:立足于以不变应万变,以课本为蓝本,以教学大纲为准则,以《数学考试说明》为指导,扎扎实实地打好数学基础,做到概念理解透彻,基本技能准确无误,基本方法熟练掌握,基本联系脉络清楚。

1. 坚持围绕大纲,立足课本的方向。由于高考试题越来越多地可以在教材中找到原型,因此,复习时应以课本为主,力求把教材学透学活,熟悉教材内容,熟练、准确、快速地解题。

2. 要加强运算能力的训练。由于计算已成为高考得分的主要手段,计算能力要求也愈来愈高,复习时应注意运算步骤,运算符号和公式,注意技能、技巧,养成思维敏捷、推理准确、计算迅速的习惯,注意解题速度的训练。

3. 要重视函数及其性质的主轴作用。中学阶段的代数,是以函数为中心的代数。利用函数的概念可以从较高的观点

看待和处理“式”、“方程”、“不等式”、“函数”、“数列”、“曲线与方程(隐函数)”等内容,把它们有机地溶合在一起。注意到高考数学试题始终贯穿着函数及其性质的一条主线,在复习中,要重点掌握涉及五大初等函数的如下主要内容:

(1) 深刻理解函数和反函数的概念;

(2) 能用描点法作一些基本函数的图象,做到“以图识性,以性作图”;

(3) 掌握求初等函数解析式的一些基本方法;

(4) 能熟练地讨论函数的定义域和值域,熟练掌握函数的主要性质,如单调性、奇偶性、有界性、周期性、零点、极值(或最值)等;

(5) 能正确地把一些应用问题转化为数学模型,列出函数解析式;

(6) 注意函数图象的平移变换,对称变换和旋转变换。

4. 重视三角基础。高考数学题中已不单列大题,而是把三角作为基础知识和解题工具。因此在复习中应做到:

(1) 掌握三角函数的图象及其性质;

(2) 注意三角恒等变换的训练,它在文科试题中地位显要;

(3) 重视反三角函数和三角方程;

(4) 重点是把三角作为工具灵活地解决代数、立几、解几的有关综合题。如代数中的复数三角形式,圆锥曲线中的参数方程和极坐标,立几中斜三角形等。

5. 关于立几和解几。在复习中,除了掌握好三角基础,代数重点外,还应根据教学大纲的要求,把握好解几和立几两翼内容的复习,巩固和深化基础知识和基本技能。教材的重点,

往往是学生的难点、命题的热点,复习中必须突出重点。

立体几何《直线与平面》中垂直平行的特殊位置关系;三类不同角度的概念和求法;《多面体和旋转体》中体、面积的计算法;几何体中的线面位置关系等要深刻理解、熟练掌握。要注重知识、方法的纵向联系和横向联系,在注重立体几何内部前后知识、方法的衔接的同时,注重立体几何与平面几何,三角以及代数、解析几何的联系。

解析几何知识,在高考试题中十分活跃,轨迹是解几的主体,圆锥曲线是解几的重点。要重视轨迹题的基本方法。要理解曲线与方程的概念,进而深化并熟练掌握解析法,数形转换思想及求曲线,方程的思想与各种重要方法;重点理解并熟练掌握直线的倾角与斜率,圆、椭圆、双曲线及抛物线的定义(含圆锥曲线的统一定义),注意灵活运用二次曲线的定义解题;熟练掌握直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线方程的各自表达形式及方程中各参(系)数的几何意义与内在联系,并能灵活运用其图形的性质及由参系数方程所控制的曲线系解题;熟练掌握线段的定比分点,三角形重心坐标公式,两点的距离公式,直线的斜率,两直线交角,点到直线的距离公式,弦长公式及常见变形及上述公式的灵活运用;理解并熟练掌握点与直线,圆、直线与直线、圆,椭圆、双曲线、抛物线,圆与圆,曲线与曲线等的位置关系的数、形判别方法;理解坐标变换的意义,掌握坐标轴平移公式的运用。

要注意各学科间的横向联系及中学数学中重要数学思想方法的渗透,提高综合解题能力。

6. 要重视高一知识内容的复习。高考试题中高一内容约占总分的三分之一。尤其是集合的考查,不再是简单的交、

并、补集,它沟通了解析几何和不等式知识、排列组合知识,题型新颖,应引起足够的重视。

7. 要重视对中学数学通性、通法的训练。 中学数学的通性通法,是指数学教材中蕴含的基本数学思想(如化归思想,转化思想,变换思想,分类思想等)和常用的数学方法(如形数结合法,待定系数法,换元法,反证法,数学归纳法,消去法,配方法等)。高考数学试题在重视基础知识的综合运用的同时,十分重视考查中学数学的基本方法,一些高档把关题,目标大抵都直接对准重要方法。

8. 重视数学重要定理的复习。立几中的线面判定定理和性质定理,三垂线定理和它的逆定理;代数中的棣美佛定理,二项式定理和韦达定理;平几中的勾股定理,圆幂定理;三角中的正弦定理,余弦定理和射影定理等,在历年高考试题中,考查的次数是十分频繁的。

9. 重视初等数学与高等数学的衔接问题的复习。初等数学和高等数学的衔接问题,一是指作为高等数学重要的基础内容:如集合、充要条件、不等式的证明、复数、排列组合与二项式定理、数学归纳法和数列的极限等。这些内容在历年高考试题中,比重约占整个试卷的 $1/3$,而且要求也越来越高。

同集合一样,复数的考查也在向复数综合题迈进,试题不再满足复数从静止的观点考查,已逐步发展到运动,变化的角度加以考查。因此在复数学习中,注意把复数与解几沟通,一方面要加强复数综合题的训练,另一方面要注意从“常量数学”走向“变量数学”,以适应高等数学学习的需要。

初等数学与高等数学衔接问题之二,是指高等数学中经常起作用的数学思想和方法,要反复训练,熟练运用。高中阶

段的数学思想主要是：方程的思想，消元思想，解析的思想，利用解析工具论证，常量到变量的思想以及数形结合的思想，利用函数工具(在复平面内为复数工具)论证，有限到无限的思想，利用极限工具论证，降维的思想，把立几问题转化为平几问题。

10. 重视能力的训练。除了应重视运算能力(但避免过繁的计算题)，逻辑推理能力和空间想象能力训练外，还应重视数形结合能力，解决实际问题能力和综合解题能力的训练。数形结合能力在代数中是阅图题以及在立几和解几中的运用；解决实际问题能力，大致是排列组合应用题，极值或最值应用题和极限应用题。

此外，试题通过选择题，简答题对考生进行观察能力，判断能力和快速推理能力的考查。选择题和简答题比重约占50%~60%，这是需要引起重视和认真对待的。因此，掌握解答选择题，简答题的方法，培养观察能力，判断能力和快速推理能力也是很重要的。

11. 注意文理科的共同要求和差异。在目前阶段，文科数学如下内容不考：

- (1) 反三角函数和三角方程；
- (2) 不等式性质与证明；
- (3) 参数方程和极坐标。

而上述内容恰恰又是理科考生需要备考的内容。

第二章 代 数

一、函 数

[复习目标]

1. 集合: 熟悉集合, 子集, 交集, 并集, 补集的概念; 了解空集和全集的意义; 能正确使用有关的术语和符号。

2. 映射与函数: 理解映射, 一一映射, 逆映射的概念, 在此基础上加深对函数、反函数概念的理解, 掌握互为反函数图象特征, 掌握函数单调性, 奇偶性的图象特征。

3. 幂、指数、对数函数: 掌握幂函数, 指数函数, 对数函数的概念及其图象、性质; 会解简单的指数方程与对数方程。

4. 能正确地求出函数的定义域, 值域; 能正确地判断一些简单函数的单调性与奇偶性; 能用集合的观点, 函数的观点, 数形结合的方法, 分类讨论的方法解题。

5. 要重视函数定义区间关于原点的对称性是奇函数或偶函数的必要条件, 函数的单调区间必定包含于函数的定义区间, 重视对数换底公式及其推论在解题中的作用。

[类题及解法]

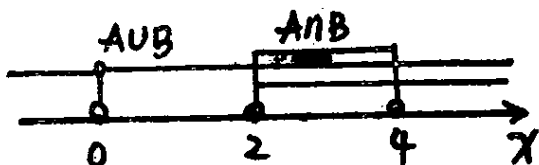
例1. 设全集 $I = R$, $A = \{x | x^2 - 2x > 0, x \in R\}$, $B = \{x | x^2 - ax + b < 0, x \in R\}$, $C = \{x | x^3 + x^2 + x = 0, x \in R\}$, 又 $\bar{A} \cap \bar{B} = C$, $A \cap B = \{x | 2 < x < 4, x \in R\}$, 求 a, b 的值。

分析 数集问题借助数轴分析, 和点集问题借助坐标平面分析一样, 都是运用数形结合的方法, 这种方法特别有利于解如本例一类含参数的问题。

解 由已知, $A = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $C = \{0\}$, 设 $B = (x_1, x_2)$. (其中 x_1, x_2 是 $x^2 - ax + b = 0$ 的两根) 从图中可知, 要使 $\bar{A} \cap \bar{B} = C$, 即 $\overline{A \cup B} = C$, 必须 $x_1 = 0$ 且 $x_2 > 2$; 要使 $A \cap B = (2, 4)$, 必须 $0 \leq x_1 \leq 2$ 且 $x_2 = 4$, 所以 $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

故 $a = x_1 + x_2 = 4$,

$b = x_1 x_2 = 0$.



例 2. 求下列函

数的定义域 x 与值域 y , 并判别函数是否为 x 到 y 的一一映射

(1) $y = 3^{x^2} - 1$,

(2) $y = x - 4\sqrt{1-x}$.

思路: 求值域时, 可采用变量代换的方法将较为复杂的函数形式转化为基本的函数形式, 且易于判别映射关系。

解: (1) 定义域 $x = R$, 令 $t = x^2$, 知 $T = [0, +\infty)$, 得 $y = 3^t - 1$, $\because t \geq 0, \therefore 3^t \geq 1$, 故 $y = [0, +\infty)$.

由于 x 到 T 不是一一映射, 而 T 到 y 是一一映射, 故 x 到 y 不是一一映射。

(2) $\because 1 - x \geq 0, \therefore x \leq 1$, 定义域 $x = (-\infty, 1]$,

令 $\sqrt{1-x} = t$, 知 $T = [0, +\infty)$, 得 $x = 1 - t^2$.

$\therefore y = -t^2 - 4t + 1 = -(t+2)^2 + 5$

$\because t \geq 0, \therefore y = (-\infty, 1]$ 。

由于 x 到 T 是一一映射, T 到 y 也是一一映射, 故 x 到 y