小学数学教师参考书

DAISHU CHUBU

代数初步

上海教育出版社

小学数学教师参考书

代数初步

王辅湘　郭涤尘

上海教育出版社

内 容 提 要

为了切合小学教师的需要，本书浅显地介绍了集合、有理数、代数式、代数方程及函数等与小学数学关系比较大的内容，并结合小学数学教学着重阐明了有关的基本概念和基本理论.

本书既可供小学教师教学时参考，也可作为小学教师的进修教材.

小学数学教师参考书

代数初步

王辅湘　郭涤尘

上海教育出版社出版

(上海永福路123号)

新华书店上海发行所发行　江苏苏州印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 8　字数 177,000

1980年5月第1版　1983年4月第2次印刷

印数 80,001—100,600 本

统一书号：7150·2280　定价：0.56 元

目　录

第一章 集 合

从事物的全体和事物之间的相依关系上来掌握事物，是近代数学的特点之一．集合的概念就是根据这一需要提出来的，它成为近代数学里一个最基本的概念．集合理论的产生和发展，对数学各分支产生了深刻的影响．在中小学数学教学中，运用、渗透一些集合的思想，有利于加深学生对传统数学知识的理解，也有利于今后进一步学习．本章只介绍一些关于集合的最初步的知识．

一、集 合

1.1 集合的概念

集合是一个不下定义的原始概念，只能用描述的方法来阐明其涵义．例如：

（1）东风小学所有的学生，可以看作是一个集合；

（2）所有的自然数，可以看作是一个集合；

（3）平面上到一定点的距离等于 10 厘米的所有的点，可以看作是一个集合；等等．

上面这些例子中，（1）是东风小学学生的全体，（2）是自然数的全体，（3）是平面上到一定点的距离等于 10 厘米的点的全体．集合（简称集），就是这样具有某种共同特性的一类确定的事物（或研究的对象）的全体．组成集合的各个事物（或各个对象），叫做这个集合的元素（简称元）．

如果组成集合的元素是数，这个集合就叫做数集．如果组成集合的元素是点，这个集合就叫做点集．(2) 是自然数的集合，它的元素是各个自然数，这是一个数集．(3) 是平面上到一定点的距离等于10厘米的点的集合，它的元素是符合条件的点，这是一个点集．在数学中，数集和点集是最常遇到的．例如：质数集、合数集、整数集就都是数集；角平分线（到角的两边距离相等的点的集合）、圆（到一定点距离相等的点的集合）就都是点集．(1) 是东风小学学生的集合，它既不是数集也不是点集．

通常，用大写字母 A、B、C、……、X、Y、Z 来命名集合，而用小写字母 a、b、c、……、x、y、z 来命名集合中的元素．如果 x 是集合 A 的元素，就说 x 属于集合 A，记成

$$x \in A;$$

如果 y 不是集合 A 的元素，就说 y 不属于集合 A，记成

$$y \overline{\in} A.$$

在小学数学中，最常遇到的数集是自然数集和整数集．一般，自然数集用字母 N 来标记，整数集用字母 Z 来标记．例如：

$2 \in N$，表示 2 属于自然数集，就是说 2 是自然数．

$\frac{1}{2} \overline{\in} Z$，表示$\frac{1}{2}$不属于整数集，就是说$\frac{1}{2}$不是整数．

在研究集合概念的时候，应该注意以下几点：

第一、集合是指一类事物的全体，而不是指其中的个别事物．例如，质数集是指所有的“只有 1 和本身这两个约数的自然数”，而不是指其中某个质数例如，2、3 等．又如，所有的质数和合数所组成的集合不能称为自然数集，因为自然数集是指全体自然数，而上面所组成的集合中却不包含自然数 1.

同样，集合的特性，是指全体元素的共性，而不是指各个元素的个性.

第二、集合必须有明确的界限，不能含糊不清. 这就是说，对于给出的集合，必须能够确切地判断任何一个事物是不是它的元素. 否则，就不成其为集合. 例如，“一切自然数”有确定的界限，它成为一个集合；而“一切甚大的数”就无确定的界限，它不是一个集合. 事实上，我们不能确切判断哪些数是甚大的数.

第三、集合中的元素都是相异的，即不能有重复的元素.

在小学低年级数学教学中，经常用实物图（如图 1-1 那样）给学生一些集合的感性认识. 这时，只是渗透集合的思想，初步培养学生按事物的特性来分类归纳的能力，而不必用“集合”这个名称，也不必讲什么道理.

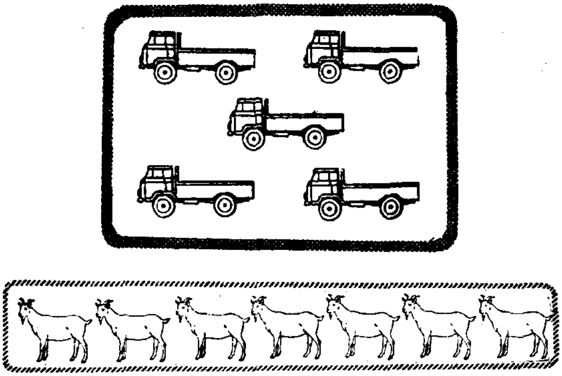
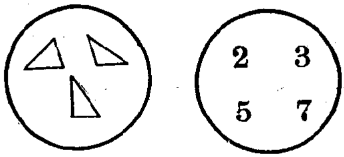


图 1-1

1.2 集合的表示方法

集合的表示方法通常有三种，即图示法、列举法和描述法.

图示法是在一个集合所有元素的外面画一个圆圈，用以表示这个集合．小学数学教学中，通常采用这种比较直观的方法．例如，用图 1-2(1)来表示三个三角形的集合，图 1-2(2)来表示 10 以内的质数的集合．



(1)　　(2)

图 1-2

列举法是把一个集合所有的元素都写出来，放在大括号里．例如，10 以内的质数的集合可以表示成

$$\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}.$$

一般地，如果集合 A 是由 a_1、a_2、a_3、……、a_n 这些元素所组成，那么可写成

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,a_n\}.$$

描述法是用语言或关系式来描述一个集合中元素的共同特性，外面用大括号括起来．例如：

$$N=\{\text{全体自然数}\},$$

表示 N 是全体自然数的集合；

$$P=\{x\mid x^2-1=0\},$$

这是描述法的另一种形式．意思是说，集合 P 的元素是 x，而 x 满足方程 $x^2-1=0$，即是这个方程的根(± 1)；类似地，

$$A=\{x\mid x\in N,\ 1<x<5\}=\{2,\ 3,\ 4\},$$

表示集合 A 的元素是 x，而 x 是自然数，并且大于 1 小于 5，即元素是 2，3，4．

1.3 单元素集与空集

集合中可以只有一个元素．只含有一个元素的集合叫做单元素集（单元集）．例如，一本书、一支笔、一个人均可以看作是一个单元素集．一个数，例如“0”，也可以看作是一个单元素集．只含有元素“0”的集合，记作$\{0\}$．如果A表示一个集合，那么$\{A\}$是表示以A为元素的单元素集．这里整个集合A被看作是一个元素，而不管A本身中有多少个元素．

集合中也可以没有元素．一个元素也没有的集合叫做空集，用记号ϕ表示．例如，当全班学生考试都及格时，这个班不及格学生的集合就是一个空集．又如，小于2的质数的集合也是一个空集．再如：

$$A=\{x \mid x^2+1=0 \text{ 的实数根}\}=\phi;$$

$$B=\{a \mid a\in N,\ a<1\}=\phi.$$

我们应该注意，$\{0\}$不是空集，它有一个元素0．

空集作为集，有如数“0”作为数一样，并不是虚构的，而是有它的具体背景．例如，一间教室里的学生是一个集合，放学后，学生都回家了，这时教室里学生的集合就成为一个空集．

从集合的观点来看，数“0”是一类空集的标志．在引进数零时，可先让儿童看一幅图，这幅图上有三个盘子，第一个盘子里有2个杯子，这是含有2个元素的集合；第二个盘子里有1个杯子，这是单元素集；第三个盘子里没有杯子，这是空集．我们用“0”来表示空盘子里茶杯的个数，这样就通过空集引入了数零的概念．

1.4 有限集与无限集

集合中的元素可以是有限个，也可以是无限多个．单元素集$\{a\}$所含的元素当然是有限个；向该集合中加入某元素

b，得到集合$\{a, b\}$，这个集合所含的元素也是有限个；再加入某元素 c，得到集合$\{a, b, c\}$，这个集合所含的元素还是有限个，……．直观地说，只有有限个元素的集合叫做有限集（有穷集）；反之含有无限个元素的集合叫做无限集（无穷集）．例如，{百以内的自然数}是有限集，而{全体自然数}是无限集．

如果集合 A 共有 100 个元素，就记作：$n(A)=100$；如果集合 B 只有 1 个元素，就记作：$n(B)=1$；如果 $n(M)=0$，那么集合 M 就是空集．

例 1 用列举法表示下列集合，并说明元素的个数：

(1) 10 以内的合数的集合 A；

(2) 8 的约数的集合 B．

解 (1) $A=\{4, 6, 8, 9\}$，$n(A)=4$．

(2) $B=\{1, 2, 4, 8\}$，$n(B)=4$．

例 2 用描述法表示下列集合，并说明元素的个数：

(1) $A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$；

(2) $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$．

解 (1) $A=\{$20 以内的质数$\}$，$n(A)=8$．

(2) $B=\{$小于 10 的自然数$\}$，$n(B)=9$．

例 3 表示下列集合：

(1) 小于 1 的自然数的集合 A；

(2) 小于 5 的自然数集合 B；

(3) 全体自然数的平方数的集合 C．

解 (1) $A=\phi$．

(2) 列举法：$B=\{1, 2, 3, 4\}$；

描述法：$B=\{x \mid x\in N, x<5\}$．

(3) 列举法：$C=\{1, 4, 9, 16, \cdots\cdots\}$；

描述法：$C=\{n^2 | n$ 是全体自然数$\}$.

例 4 {万以上的自然数}是有限集还是无限集？{万以内的自然数}呢？

解 {万以上的自然数}是无限集，{万以内的自然数}是有限集.

1.5 集合的包含、相等和相交

就集合之间元素的异同来说，集合之间的关系有包含、相等、相交、不相交等.

1. 包含

对于自然数集合和质数集合，我们不难理解，质数集合中的每一个元素也都是自然数集合的元素. 一般地，如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B，就称集合 A 是集合 B 的子集；反过来，称集合 B 是集合 A 的母集（包含集或扩集）. 它们之间的关系如图 1-3 所示（这样的图叫做韦恩图，韦恩是英国数学家），叫做包含关系，记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A,$$

读作：A 包含在 B 中或 B 包含 A.

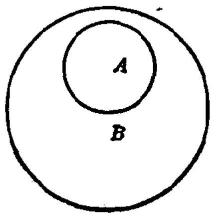


图 1-3

如果 $A \subset B$，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么称 A 是 B 的真子集. 例如，{20 以内的自然数}、{百以内的自然数}、{万以内的自然数}、{万以上的自然数}就都是{自然数}的真子集.

每个集合可看作是它本身的子集. 空集 ϕ 是任何集合的子集. 即

$$A \subset A, \quad \phi \subset A.$$

例 5 写出集合$\{1, 2, 3\}$的所有子集.

解 集合$\{1, 2, 3\}$的所有子集列举于下：

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}.$$

上面这个集合有 8 个子集. 一般地, 如果集合中有 n 个元素, 那么它的子集有 2^n 个.

最后再指出一点, 记号 $\in$ 与 $\subset$ 的意义是不同的. $\in$ 表示元素与集合的从属关系, 而 $\subset$ 表示集合与集合之间的包含关系.

2. 相等

对于两个集合 A 和 B, 如果 $A\subset B$, 且 $B\subset A$, 那么我们就说 A 等于 B, 记作 $A=B$. 换句话说, 只有当两个集合的元素完全相同时, 我们才说这两个集合相等. 例如:

$$\{6\text{ 的约数}\}=\{1, 2, 3, 6\}.$$

反之, 只要 A 中有一个元素不属于 B 或 B 中有一个元素不属于 A, 我们就说这两个集合不相等, 记作 $A\neq B$. 例如:

$$\{6\text{ 的约数}\}\neq\{6\text{ 的质约数}\}.$$

例 6 判断下列两个集合是否相等:

$$A=\{a \mid a\in N, 1<a<4\},$$
$$B=\{b \mid b\text{ 是小于 5 的质数}\}.$$

解 由于 $A=\{a \mid a\in N, 1<a<4\}=\{2, 3\}$,

$B=\{b \mid b\text{ 是小于 5 的质数}\}=\{2, 3\}$,

所以 $A=B$.

3. 相交、不相交

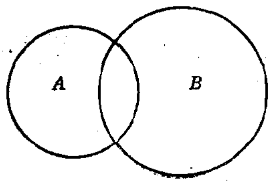


图 1-4

如果两个集合 A 和 B 之间有部分元素是相同的, 那么它们之间的关系就是相交的, 如图 1-4 所示. 相交部分就是它们的公共元素. 反之, 如果一个元素也不相同, 那么它们之间的关系就是不相交的. 如

图 1-5 所示.

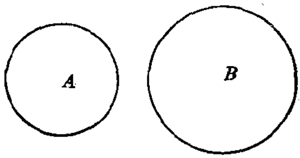


图 1-5

习 题 一

1. 指出下列集合里的元素:

(1) 大于 20 小于 30 的质数的集合;

(2) 与 10 相差 5 的数的集合;

(3) 48 的约数的集合;

(4) 图书馆里的书本的集合;

(5) 电影院里的观众的集合.

2. 用列举法或描述法表示下列集合:

(1) 大于 90 小于 100 的质数的集合;

(2) 周长为 10 厘米的矩形的集合;

(3) 20 以内既是奇数又是质数的那些数的集合.

3. 用列举法表示集合 $A=\{210$ 的质约数$\}$, 并用记号 $\in$ 或 $\bar{\in}$ 表示下列各数是否是 A 的元素:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

4. 指出下列集合里, 哪些是有限集、哪些是无限集、哪些是单元素集和哪些是空集.

(1) {亿以内的自然数};　　(2) {亿以上的自然数};

(3) 满仓谷粒的集合;　　(4) $\{0\}$;

(5) 直线上的点的集合;　　(6) 23 的质约数的集合;

(7) $A=\{a|a\in N,\ a>10\}$;　　(8) 全体分数的集合;

(9) 两边的和小于第三边的三角形的集合.

5. 写出集合 $A=\{a, b, c, d\}$的所有的子集.

6. 用符号$\in$、$\subset$和$\supset$填空:

(1) a__$\{a, b, c\}$; (2) $\{a\}$__$\{a, b, c\}$;

(3) ϕ__$\{a, b, c\}$; (4) $\{2,3\}$__{10以内的质数};

(5) $\{1,2,3\}$__$\{3,2,1\}$; (6) {菱形}__{平行四边形};

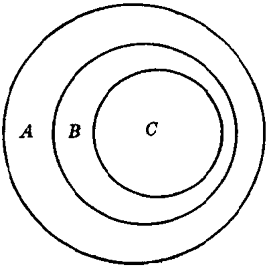
(7) {菱形}__{正方形}; (8) {四边形}__{梯形}.

7. 下列集合相等吗?

(1) 一个多边形中所有边的集合和所有顶点的集合;

(2) $\{1, 3, 5, 15\}$ 与 {15 的约数};

(3) $A=\{a|a\in N, 15<a<20\}$与 $B=\{16, 17, 18, 19\}$.



8. 左面的韦恩图中,集合 A、B、C 之间有什么关系?

二、集合的对应

1.6 对应的概念

对应也是小学数学中要渗透的现代数学的一个最基本的概念.

电影院里的观众根据票上的座次可以找到各自的座位,这就是从观众的集合到座位的集合的一个对应.

图 1-6 中的虚线表示,每个盖子都和一个杯子相对,从盖子的集合到杯子的集合存在着一个对应. 但是,从杯子的集合到盖子的集合却不存着对应,因为不是所有的杯子都有一个盖子与它相对.

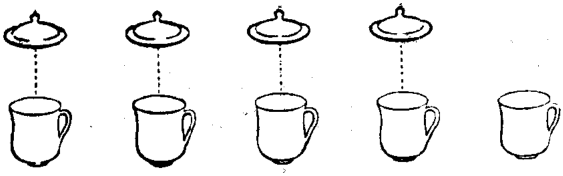


图 1-6

一般地说，如果对于集合 A 的每一个元素，按照某种法则，在集合 B 中都有确定的元素(一个或几个)和它相对，那么就叫做从集合 A 到集合 B 的一个对应.

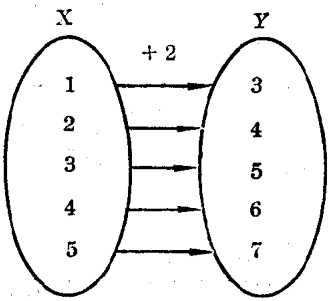


图 1-7

图 1-7 表示从集合 X 到集合 Y 的一个对应. 图中的箭头表示对应方向，集合 X 中的每一个元素加上 2 就分别是集合 Y 中与之对应的元素.

图 1-8 表示某班运动员参加学校运动会决赛的情况. 集合 M 中的元素是参加决赛的运动员的号码，集合 N 中的元素是这些运动员参加决赛的项目，显然依箭头所示的方向，从集合 M 到集合 N 存在着一个对应.

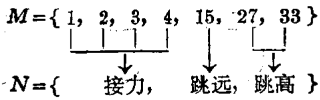


图 1-8

上面这两种对应的情况是不相同的. 图 1-7 是一对一的对应，图 1-8 是多对一的对应. 但它们也有相同点，就是集合

X 和 M 中的每一个元素都分别对应于集合 Y 和 N 中唯一的一个元素.

一般地说，如果集合 A 中的每一个元素，按照某种法则，都有集合 B 中唯一的一个元素与之对应，那么，集合 A 到集合 B 的对应就叫做单值对应.

如果把图 1-8 中的箭头倒转过来，那么它就表示从集合 N 到集合 M 的一个对应. 这时，集合 N 中有的元素不是对应于集合 M 中唯一的一个元素，而是对应于两个或两个以上的元素. 这种对应叫做多值对应.

对于集合 A 到集合 B 的单值对应来说，A 中的元素 a 所对应的 B 中的元素 b，叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象. "b 是 a 的象"通常用"$a \to b$"表示.

1.7 一一对应和集合的对等

如果从集合 A 到集合 B 存在着一个单值对应，使得集合 A 的不同元素在集合 B 中有不同的象，而且集合 B 中的每一个元素都有原象，那么这个单值对应称为集合 A 与集合 B 之间的一一对应. 图 1-9 中的虚线，使杯子的集合与碟子的集合建立了一一对应. 因为由虚线建立起来的从杯子到碟子的对应是一个单值对应，在这个对应下，不同的杯子有不同的碟子与它相对(即对应是 1 对 1 的)，且每个碟子都有一个

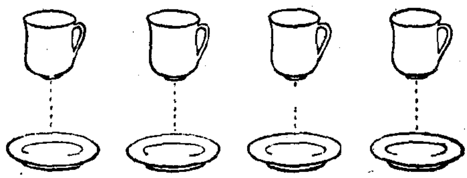


图 1-9