线性代数

刘洪章　王　瑛　张一方　编

云南大学出版社

前　言

本教材是根据原教育部1980年颁发的综合大学物理专业《高等数学》教学大纲的精神和云南大学物理系数学教研室多年多人使用过的《线性代数》讲义的基础上修改、编写而成的.

为体现理论联系实际，学以致用的原则，编写一本适合物理类专业用的《线性代数》教材，是物理类专业教学改革的需要.又考虑到《线性代数》作为一门基础课程的性质与要求，在编写过程中，我们既重视必要的理论需要，又尽量注意理论与实际的联系，并以此作为主要依据来确定教材内容的取舍和主次安排.

考虑到后续课程的需要，我们在原讲义的基础上，增添了第八章——线性代数在物理学等学科中的应用.在这一章中，主要介绍线性方程组、矩阵、线性空间与线性变换三个方面的应用.

在编写过程中，我们力求在内容安排上，顺序合理，前后联贯；在文体叙述上，简明易懂，化难为易.为了便于读者阅读、理解与自学，在每一章开始，给出该章的主要内容，在每一章末尾 给出该章重点内容的简要小结，在每一节末尾，还配置了一定数量，不同层次要求的习题.书末附有习题答案或部分习题的简要提示，以便读者参考.

教材中，标有“＊”号的部分，教师可根据教学的不同要求，自行取舍.

本教材从开始编写，到编辑、排版、印刷的全过程，都得到张世鸾同志的潜心帮助与大力支持，同时在编写过程中，陈中轩、和永寿、包德修、赵椿等同志提出了许多宝贵意见，在此致以衷心的感谢.

编写一本适合物理类专业需要的《线性代数》教材，是我们在教学改革中的一点探索和初步尝试. 由于我们思想水平、业务能力及教学经验都很有限，缺点、错误难免，恳切地希望同行与读者，不吝赐教、批评、指正.

编　者

1991 年 10 月于云南大学

目　　录

第一章　行列式

在生产实践和科学研究中，许多问题可直接地或近似地表为线性函数，因此，研究线性函数是十分重要的课题. 线性代数主要研究线性函数. 它是数学的一个重要分支，不仅在数学领域本身，而且在其它科学技术领域中，例如，物理学、天文学和工程技术中都有着广泛的应用.

在线性代数中，线性方程组是一个重要的基础部分. 而行列式是从求解线性方程组建立起来的，它在矩阵、二次型中也经常用到，因此，行列式是研究线性代数的一个重要工具.

本章主要讨论以下三个问题：

1°　行列式的概念；

2°　行列式的基本性质和计算法；

3°　利用行列式求解线性方程组.

§1.1　n 阶行列式

我们由求解二元一次线性方程组和求解三元一次线性方程组分别得出二阶行列式和三阶行列式的定义，进而导出 n 阶行列式的定义.

首先求解两个未知量 x_1, x_2 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

这里 b_1, b_2 是常数项，a_{ij}是第 i 个方程第 j 个未知量的系数.

利用消元法，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1)有唯一的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

引进记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

称为二阶行列式. 它含有两行两列，横写的称为行，竖写的称为列. 行列式中的数叫做行列式的元. 二阶行列式是两个项的代数和：一个是从左上角到右下角的对角线(称为行列式的主对角线)上两个元的乘积，取正号；另一个是从右上角到左下角的对角线(称为行列式的次对角线)上两个元的乘积，取负号.

根据二阶行列式的定义，可得

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

于是方程组的唯一解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\tag{2}$$

其中 D 是由(1)的两个未知量的系数构成的行列式，称为**系数行列式**，而 D_1，D_2 是用(1)的常数项 b_1、b_2 分别代替 D 中的第一列、第二列而成的．这样用(2)来表示方程组(1)的解，既简单又便于记忆．

下面再求解三个未知量 x_1，x_2，x_3 的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}\tag{3}$$

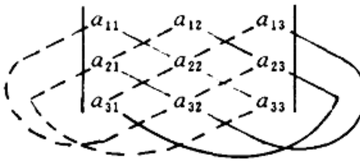
利用消元法，消去 x_3 和 x_2，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1\\&=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}\\&\quad -a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3,\end{aligned}$$

我们引入三阶行列式的定义

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&\quad -a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},\end{aligned}$$

它含有三行三列，代表 6 个项的代数和．这 6 个项可以这样来记忆，在下表中实线上三个元的乘积所构成的三个项取正号，虚线上三个元的乘积所构成的三个项取负号．



根据三阶行列式的定义，我们可得

$$b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

于是当系数行列式 $D\neq 0$ 时，

$$x_1 = \frac{D_1}{D},$$

同理可得：

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中 D_1, D_2, D_3 是用方程组(3)中常数项分别取代系数行列式 D 中的第一列、第二列、第三列而成的行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

本节的目的是把二元和三元线性方程组解的行列式形式推广到含有 n 个未知量的 n 元一次方程组中去，因此自然会

想到它的解是否也能用 n 阶行列式来表示，首先碰到的问题是如何定义 n 阶行列式. 在前面我们从两个未知量中消去一个而得出二阶行列式的定义是容易的，但从三个未知量中消去两个得出三阶行列式的定义就比较麻烦，至于要从 n 个未知量中消去 $n-1$ 个未知量，从而引出 n 阶行列式的定义，就显得相当困难了. 因此，我们应当寻求其它的方法来定义 n 阶行列式. 为了得到 n 阶行列式的定义，首先需要用到一些有关排列问题的知识.

定义 1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 阶排列**.

例如，$1\ 3\ 2$ 是一个三阶排列，$5\ 4\ 2\ 1\ 3$ 是一个五阶排列.

我们知道 n 元排列共有 $n!$ 个. 在所有 $n!$ 个排列中，$1\ 2\ 3\cdots n$ 是唯一的一个按自然顺序构成的排列，称为 **n 阶标准排列**.

定义 2 在一个排列中，如果排在前面的一个数大于排在它后面的一个数，则称这两个数构成一个**反序(或逆序)**. 一个排列中全部反序的个数称为这个排列的**反序数**. 如果排在前面的一个数小于排在它后面的一个数，则称这两个数构成一个顺序.

例如，排列 $4\ 2\ 3\ 1$ 共有六对数：$4\ 2,4\ 3,4\ 1,2\ 3,2\ 1,3\ 1$，其中 $4\ 2,4\ 3,4\ 1,2\ 1,3\ 1$ 都构成反序，而 $2\ 3$ 不成反序，所以排列 $4\ 2\ 3\ 1$ 的反序数是 5.

通常我们把排列 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 的反序数记为 $\tau(j_1\ j_2\cdots j_n)$. 例如，$\tau(4\ 2\ 3\ 1)=5$.

定义 3 如果 $\tau(j_1\ j_2\cdots j_n)=$ 偶数或 0，称排列 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 为偶排列；如果 $\tau(j_1\ j_2\cdots j_n)=$ 奇数，称排列 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 为奇排列.

例如：$\tau(4\ 2\ 3\ 1)=5$，故排列 $4\ 2\ 3\ 1$ 是奇排列；$\tau(4\ 3\ 2\ 1)$

$=6$,故排列 4 3 2 1 是偶排列.

定义 4 把一个排列中某两个数互换位置其余数不动,就得另一个排列,这样的变换称为一个对换.

例如,奇排列 4 2 3 1 经过 4,1 两个数对换变成排列 1 2 3 4. 由于反序数 $\tau(1\ 2\ 3\ 4)=0$,故为偶排列;若再把 2,3 两个数对换变成排列 1 3 2 4,由于反序数 $\tau(1\ 3\ 2\ 4)=1$,又为奇排列. 可见上述排列每经过一次对换,不论对换的数是否相邻,排列的奇偶性均发生改变. 一般地,有如下定理:

定理 1 一个偶排列(奇排列)经过一个对换变成奇排列(偶排列). 即排列经过一次对换改变其奇偶性.

证 首先讨论排列中相邻两个数对换的情形,即

$$\text{排列}\qquad \cdots\cdots j\,k\cdots\cdots, \qquad (\mathrm{I})$$

经 j 和 k 对换,得

$$\text{排列}\qquad \cdots\cdots k\,j\cdots\cdots, \qquad (\mathrm{II})$$

这里"…"表示那些不动的数,显然在排列(I),(II)中 j,k 前面和后面的各数所构成的反序或顺序都相同,不同的只是 j,k 的次序. 如果原来 j,k 组成反序,则经过对换后整个排列的反序数减少一个. 如果原来 j,k 为顺序,则经过对换后反序数增加一个. 不论增加 1 或减少 1,排列的反序数的奇偶性总是改变了.

其次讨论一般的情况,设 j 和 k 之间有 s 个数,即

$$\text{排列}\qquad \cdots\cdots j\,i_1\,i_2\cdots i_s\,k\cdots\cdots \qquad (\mathrm{III})$$

经 j 与 k 对换,得

$$\text{排列}\qquad \cdots\cdots k\,i_1\,i_2\cdots i_s\,j\cdots. \qquad (\mathrm{IV})$$

这样一对不相邻的两个数的对换,可以通过若干个相邻的对换来实现;从(III)出发顺序把 k 与 i_s 对换,再与 i_{s-1} 对换,…,

共经过 $s+1$ 个相邻对换，将排列(Ⅲ)变成排列

$$\cdots k\ j\ i_1\ i_2\ \cdots\ i_s\ \cdots, \qquad (\mathrm{V})$$

从(V)出发，把 j 与 i_1 对换，再与 i_2 对换，…共经 s 次相邻对换，就可将(V)变为(Ⅳ)，于是 j 与 k 的对换可经过 $2s+1$ 次(奇数次)相邻的对换来实现，又因相邻的两个数每经一次对换改变排列的奇偶性，因而在经过奇数次对换后改变了排列的奇偶性. 定理证毕.

定理 2 任一个 n 阶排列都可经若干个对换变成 n 阶标准排列 $1\ 2\ 3\ \cdots n$，而且所作对换的个数与这 n 阶排列有相同的奇偶性.

证 用数学归纳法证明定理 2 的第一个结论. 当 $n=2$ 时共有两个排列 1 2 和 2 1. 排列 2 1 经过一个对换变成标准排列 1 2，即定理的第一个结论当 $n=2$ 时是正确的.

设结论对任一个 $n-1$ 阶排列成立，现证明它对任一个 n 阶排列也成立. 设 $j_1\ j_2 \cdots\ j_n$ 是一个任意 n 阶排列. 如果 $j_n=n$，则根据归纳法的假设，$n-1$ 阶排列 $j_1\ j_2 \cdots\ j_{n-1}$ 可以经若干次对换变成 $1\ 2 \cdots\ n-1$，因而 n 阶排列也同时变成 $1\ 2\ \cdots\ n$. 如果 $j_n \neq n$，则对排列 $j_1\ j_2 \cdots\ j_n$ 作 j_n 与 n 的对换变成 $j'_1\ j'_2 \cdots\ j'_{n-1}\ n$，这又归结为上面的情形. 因此定理 2 的第一个结论普遍成立. 下面证明定理的第二个结论.

因为标准排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 是偶排列，根据定理 1，如果排列 $j_1\ j_2 \cdots\ j_n$ 为偶排列，则变成 $1\ 2\ \cdots\ n$ 所作对换的个数应为偶数. 如果排列 $j_1\ j_2 \cdots\ j_n$ 为奇排列，则变成 $1\ 2\ \cdots\ n$ 所作对换的个数应为奇数. 定理证毕.

有了上述关于排列的概念和定理，我们仔细地研究二阶和三阶行列式的结构，从中找出它们的共同规律，并根据这些

规律来得出 n 阶行列式的定义.

对于二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

和三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

我们可以从它们的构成规律中得出它们的共同规律为：

1° 它们都是若干项的代数和，其中每一项都是由位于行列式中不同行和不同列的元素（简称元）的乘积，并且恰恰就是一切可能的这种乘积的代数和.

当 $n=2$ 时，位于不同行和不同列的元素构成的一切可能的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$ 两项.

当 $n=3$ 时，位于不同行和不同列的元素构成的一切可能的乘积共有 $3!=6$ 项.

若将每一项的元素的第一个附标（行标）排成标准排列，则二阶行列式的一般项可表为 $a_{1p_1}a_{2p_2}$，其中第二个附标（列标）p_1p_2 是 1，2 的一个排列，共有两个排列. 三阶行列式的一般项可表为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中 $p_1p_2p_3$ 是 1，2，3 的一个排列，共有 6 个排列.

2° 每一项乘积都带有符号，不是正号就是负号，每一项的符号这样确定：

以三阶行列式为例，它的一般项为：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

当列标反序数 $\tau(p_1\,p_2\,p_3)=$偶数时，相应的项带正号. 当 $\tau(p_1\,p_2\,p_3)=$奇数时，相应的项带负号. 显然二阶行列式各项所带的符号也是遵循此规律的. 于是三阶行列式可写成：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}\,a_{2p_2}\,a_{3p_3},$$

这里 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 是对 $p_1\,p_2\,p_3$ 取遍 1,2,3 的所有排列求和.

根据二阶和三阶行列式结构的共同规律，我们类似地可以定义 n 阶行列式.

定义 5 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列(a_{ij}是位于 i 行 j 列的元)，在其两边各画一条竖线，并把它定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \qquad (4)$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示当 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 取遍 $1,2,\cdots n$ 的所有 n 阶排列时，把所得的形如$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的项加起来，这样的一个数学符号称为 n 阶行列式，记为 $det|a_{ij}|$或$|a_{ij}|$.

同二阶、三阶行列式一样，n 阶行列式也有：

1° 它是一个含有 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是由位

于行列式中不同行不同列的元的乘积，并且是一切可能的这种乘积的代数和.

2° 每一项都带有符号，当项的因子的行标按标准排列，若相应的列标成偶排列时符号为正，若相应的列标成奇排列时，符号为负.

可以证明(见习题 4)，n 阶行列式的 $n!$ 个项中，一半的项带正号，另一半的项带负号.

对于 n 阶行列式，它的定义除了定义 5 的形式外，还可有其它的形式. 在定义 5 中为了决定每一项所带的正、负号，我们是把每一项的 n 个元素的行标按标准排列，其实由于数的乘积具有交换性，因而 n 阶行列式中一般项不计符号时可写为：

$$a_{i_1p_1}a_{i_2p_2}\cdots a_{i_np_n}, \tag{5}$$

其中 $i_1\,i_2\cdots\,i_n$，$p_1\,p_2\cdots\,p_n$ 是两个 n 阶排列. 如果按前面符号的规定，它前面的符号应为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(p_1p_2\cdots p_n)}. \tag{6}$$

在这样的规定下是否能使式(5)的符号与(4)式符号的规定一致呢?事实上为了确定(5)的符号，只需将(5)式中各因子作适当的对换，使它们的行标成标准排列，即为

$$a_{1s_1}\,a_{2s_2}\cdots\,a_{ns_n}, \tag{7}$$

它前面的符号是

$$(-1)^{\tau(s_1s_2\cdots s_n)}. \tag{8}$$

现只需证明(6)与(8)一致. 我们知道(5)中两个因子每作一次对换时，整个项的行标的排列 $i_1\,i_2\cdots\,i_n$ 与列标的排列 $p_1\,p_2\cdots\,p_n$ 相应都同时作一次对换，即反序数 $\tau(i_1\,i_2\cdots\,i_n)$ 和 $\tau(p_1\,p_2\cdots\,p_n)$ 都同时改变奇偶性，而它们的和 $\tau(i_1\,i_2\cdots\,i_n)+\tau(p_1\,p_2\cdots$

p_n)的奇偶性保持不变，即对(5)作一次两因子的对换不改变(6)的值，在作了若干次因子对换后(5)变成了(7)，同时有

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} \\
&\quad =(-1)^{\tau(1\,2\,\cdots\,n)+\tau(t_1 t_2 \cdots t_n)}=(-1)^{\tau(t_1 t_2 \cdots t_n)},
\end{aligned}
$$

即(6)与(8)是一致的，因此 n 阶行列式的一般项可写为

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{i_1 p_1} a_{i_2 p_2} \cdots a_{i_n p_n}. \tag{9}$$

按(9)写 n 阶行列式的项，优点在于行标和列标的地位是平等的，而不象定义 5 中行标要按标准排列，由小到大. 因此我们完全可以把每一项的列标按标准排列，从而可导出与定义 5 等价的 n 阶行列式的另一定义形式，即

$$\det|a_{ij}|=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{10}$$

利用行列式的定义，可进行行列式的计算.

例 1　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　这是一个 n 阶行列式，它应有 $n!$ 项，其一般项的形式为

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

显然，如果 $p_1 \neq n$，则 $a_{1p_1}=0$，从而含因子 a_{1p_1} 的项等于 0，故只须考虑 $p_1=n$ 的那些项. 同理，只须考虑 $p_2=n-1$，$p_3=n-2$，$\cdots$，$p_n=1$ 这些列标的项. 故行列式中不为零的项只有 $a_{1n}a_{2\,n-1}a_{3\,n-2}\cdots a_{n1}$这一项，而这一项符号为

$$(-1)^{\tau(n\; n-1\; n-2\; \cdots\; 1)}=(-1)^{n(n-1)/2},$$

因此，

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例 2 证明三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1\,n-1}a_{nn};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}.$$

证 先证第一式，其一般项为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

因行列式中第 n 行除 a_{nn} 外其它各元均为零，所以只能取 $p_n = n$，再因 $n-1$ 行除 $a_{n-1\,n-1}$，$a_{n-1\,n}$ 外，其它各元素都是零，又因在行列式中每一列只能取一个元，前面取 $p_n = n$，于是此时只能取 $p_{n-1} = n-1$；同理，在第 i 行中只能取 $p_i = i$，这样在行列式中除 $(-1)^{\tau(1\,2\,\cdots\,n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 项外，其余的项都为零，因此第一式成立.

同理，可以证明在第二式中只有 $a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}$ 项不为零外，其余的项均为零，而它的符号为