

数学名著译丛

代 数 学

I

B. L. 范德瓦尔登

科 学 出 版 社

数学名著译丛

代 数 学

I

B. L. 范德瓦尔登 著

丁石孙 曾肯成 郝炳新 译

万 哲 先 校

科 学 出 版 社

1 9 6 3

B. L. VAN DER WAERDEN

ALGEBRA

I

SPRINGER-VERLAG

1955 VIERTE AUFLAGE

內 容 簡 介

全书共分两卷，涉及的面很广，可說概括了1920—1940年左右代数学的主要成就，也包括了1940年以后代数学的新进展，是代数学的經典著作之一。本书是第一卷，分十章：前三章以最小的篇幅包括了为所有其余各章作准备的知識，即有关(1)集合，(2)羣，(3)环、理想和域的最基本的概念；其余各章主要讲述交換域的理论。

数学名著譯丛

代 数 学

I

B. L. 范德瓦尔登 著

丁石孙 曾肯成 郝鈞新 譯

万哲先校

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街117号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963年7月第一版

书号：2753

1963年7月第一次印刷

字数：272,000

精：1—2,700

开本：850×1168 1/32

(京) 平：1—3,500

印张：12 插页：3

定价：精装本 2.50 元
平装本 2.00 元

中譯本序言

代数学是数学的一个重要的基础的分支,历史悠久。我国古代在代数学方面,有光辉的成就。一百多年来,尤其是本世纪以来,随着数学的发展以及应用的需要,代数学的研究对象以及研究方法发生了巨大的变革。一系列的新的代数领域被建立起来,大大地扩充了代数学的研究范围,形成了所谓近世代数学。它与以代数方程的根的計算与分布为研究中心的古典代数学有所不同,它是以研究数字、文字和更一般元素的代数运算的規律及各种代数结构——羣、环、代数、域、格等——的性质为其中中心問題的。由于代数运算貫串在任何数学理論和应用問題里,也由于代数结构及其中元素的一般性,近世代数学的研究在教学中是具有基本性的。它的方法和結果渗透到那些与它相接近的各个不同的数学分支中,成为一些有着新面貌和新内容的数学领域——代数数論、代数几何、拓扑代数、Lie 羣和 Lie 代数、代数拓扑、泛函分析等。这样,近世代数学就对于全部現代数学的发展有着显著的影响,并且对于一些其它的科学领域(如理論物理学、計算机原理等)也有較直接的应用。

历史上,近世代数学可以說是从 19 世紀之初发生的, Galois 应用羣的概念对于高次代数方程是否可以以根式来解的問題进行了研究并給出彻底的解答,他可以說是近世代数学的創始者。从那时起,近世代数学由萌芽而成长而发达。大概由 19 世紀的末叶开始,羣以及紧相联系着的不变量的概念,在几何上、在分析上以

及在理論物理上,都发生了重大的影响。深刻研究羣以及其它相关的概念,如环、理想、綫性空間、代数等,应用于代数学各个部分,这就形成近世代数学更进一步的演进,完成了以前独立发展着的三个主要方面——代数数論、綫性代数及代数、羣論——的綜合,对这一步統一的工作,近代德国代数学派起了主要的作用,由 Dedekind 及 Hilbert 于上世紀末叶的工作开始, Steinitz 于1911年发表的論文对于代数学抽象化工作貢獻很大,其后自1920年左右起以 Noether 和 Artin 及她和他的学生們为中心,近世代数学的发展极为灿烂。

Van der Waerden 根据 Noether 和 Artin 的講稿写成“近世代数学”(Moderne Algebra),綜合近世代数学各方面工作于一书,书分上下两册,第一版于1930—1931年分別出版,自出版后,这本书对于近世代数学的传播和发展起了巨大的推动作用,到1959—1960年,上下两册已分別出到第五版和第四版,时至今日,这本书仍然是在近世代数学方面进行学习 and 开展科学研究的一部好书。

当然,近世代数学是不断向前发展的,本世紀三十年代当时所謂近世代数学的一些基本內容已經逐渐成为每个近代数学工作者必备的理論知識,所以本书由五十年代第四版起就去掉“近世”两字而改名为“代数学”,同时做了較大的增补和改写,但仍保持着原来的基本內容和风格,至于 Jacobson 的“抽象代数学講义”和 Bourbaki 的“代数学”等书,則出版較后而风格和內容亦有异。

本书的第二版曾有武汉大学故教授萧君絳先生譯本,流传不广,文字亦較艰涩,华罗庚先生于1938—1939年在昆明西南联合大学講授近世代数課程时,曾以本书上册为参考編写講义,变动較

第三版前言的一部分

在第二版中,我已經严格地建立了赋值論。赋值論在数論与代数几何中日益表现了它的重要性,因之我把赋值論的一章写得更加詳細与清楚了。

根据許多人的要求,我把在第二版去掉了的关于良序与超限归納的两节又加了进来,在这个基础之上,又把 Steinitz 的域論以最一般的形式写了出来。

按照 Zariski 的意見,多項式概念的引入变得容易理解了,范数与迹的理論也有改进之必要,这是 Peremans 先生向我友好地指出的。

B. I. 范德瓦尔登

Laren (Northholland), 1950 年 7 月

第四版前言

最近完全出乎意外去世的代数学学家与数論专家 Brandt 在德国数学会的协会年报 55 卷中对本书第三版写了如下的評論:“关于书名,如果在第四版能够改为更简单的,但是更确切的书名‘代数学’,我将感到很高兴。象这样一部过去、現在以及将来都是最好的数学书,书名不應該引起人們如此的疑惑,似乎它是追随一种时髦的式样,它在昨天还不被人们知道,可是明天可能将被忘掉。”

根据这个意見,我把书名改成了“代数学”。

大而非全文照譯。1961年9月国内代数学工作者于北京頤和园举行座談会时,皆認为此书新版有迅速譯出之必要。經过一年,由曹錫华、方哲先、丁石孙、曾肯成、郝炳新諸同志集体合作譯出第一、二卷。今后当能对代数学的教学及科学研究起較大的推动作用,更希望国内代数学工作者在教学和科学研究实践中有自著的书籍写成出版。

段 学 复

1962年10月11日序于
北京大学数学力学系

按照 M. Deuring 的建議，“超复数”概念的定义改得更为合适,同时分圆域的 Galois 理論在它对于循环域理論的应用中显得更加完整.

基于各地来信,还作了許多小的修改,我在这里对所有来信的人表示感謝.

B. L. 范德瓦尔登

Zürich 1955 年3月

目 录

引言	1
第一章 数与集合	4
§1. 集合	4
§2. 映射、势	6
§3. 自然数序列	7
§4. 有限与可数集合	12
§5. 分类	15
§6. 有序集合	16
§7. 选择公理与良序定理	18
§8. 超限归纳法	21
第二章 羣	24
§9. 羣的概念	24
§10. 子羣	34
§11. 羣子集的运算, 陪集	39
§12. 同构与自同构	42
§13. 同态, 正规子羣, 商羣	46
第三章 环与域	52
§14. 环	52
§15. 同态与同构	60
§16. 商的构成	61
§17. 向量空间与代数	65
§18. 多项式环	70
§19. 理想, 同余类环	74
§20. 整除性, 素理想	80

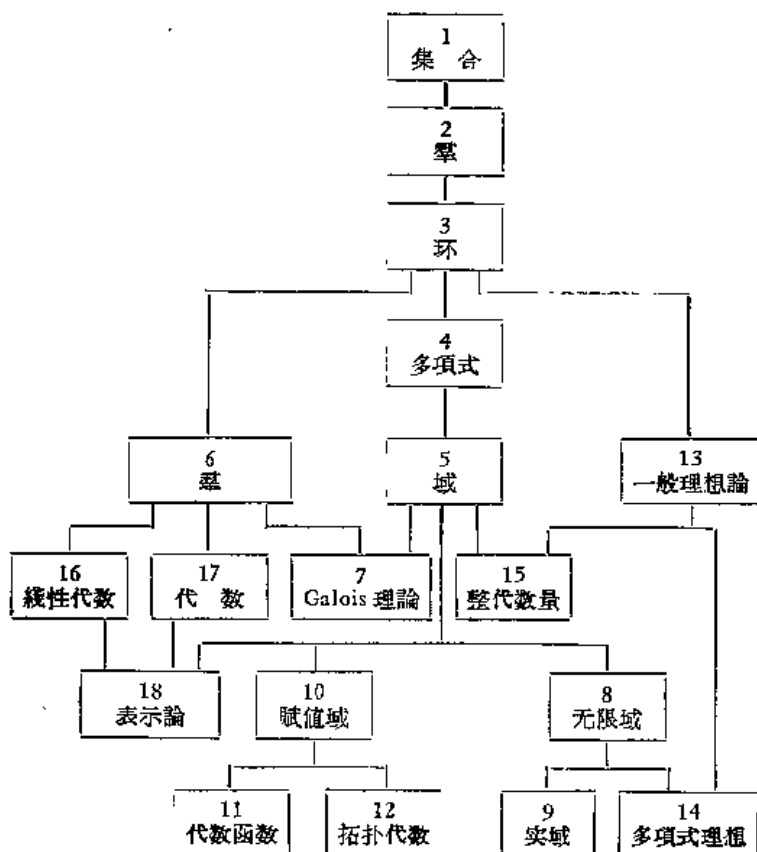
§21. 欧几里得环与主理想环	82
§22. 因子分解	87
第四章 有理整函数	92
§23. 微分法	92
§24. 零点	93
§25. 内插公式	96
§26. 因子分解	101
§27. 不可约性判定标准	105
§28. 因子分解在有限步下的完成	110
§29. 对称函数	111
§30. 两个多项式的结式	116
§31. 结式作为根的对称函数	119
§32. 有理函数的部分分式分解	122
第五章 域論	126
§33. 子体。素体	126
§34. 添加	129
§35. 单纯域扩张	130
§36. 体上的线性相关性	137
§37. 体上的线性方程组	143
§38. 域的代数扩张	146
§39. 单位根	153
§40. Galois 域(有限域)	158
§41. 可分与不可分扩张	163
§42. 完全域及不完全域	169
§43. 代数扩张的单纯性。本原元素定理	171
§44. 范数与迹	173
第六章 羣論續	181
§45. 带算子的羣	181
§46. 算子同构和算子同态	184
§47. 两个同构定理	185
§48. 正规羣列与合成羣列	187
§49. 直积	192

§50. 交錯羣的單純性	196
§51. 可遷性與本原性	198
第七章 Galois 理論	202
§52. Galois 羣	202
§53. Galois 理論的基本定理	205
§54. 共軛的羣、域與域的元素	209
§55. 分圓域	210
§56. 循環域與純粹方程	219
§57. 用根式解方程	222
§58. n 次一般方程	227
§59. 二次、三次與四次方程	229
§60. 圓規與直尺作圖	236
§61. Galois 羣的計算, 具有對稱羣的方程	242
第八章 無限域擴張	246
§62. 代數封閉域	246
§63. 單純超越擴張	254
§64. 代數相關性與無關性	258
§65. 超越次數	262
§66. 代數函數的微分法	264
第九章 實域	272
§67. 有序域	272
§68. 實數的定義	276
§69. 實函數的零點	285
§70. 複數域	291
§71. 實域的代數理論	294
§72. 關於形式實域的存在定理	300
§73. 平方和	305
第十章 賦值域	307
§74. 賦值	307
§75. 完備擴張	315
§76. 有理數域的賦值	321

§77. 代数扩域的赋值: 完备情形.....	324
§78. 代数扩域的赋值: 一般情形.....	334
§79. 代数数域的赋值.....	336
§80. 有理函数域 $\Delta(x)$ 的赋值.....	341
§81. 代数函数域的赋值.....	346
§82. 抽象 Riemann 面.....	351
中德内容索引.....	355
德中内容索引.....	364

全书总览图

I, II 两卷中各章总览及其逻辑关系



引 言

本书的目的 “抽象的”、“形式的”或“公理化的”方向在代数学的领域中造成了新的高涨，特别在**羣論**、**域論**、**賦值論**、**理想論**和**超复系理論**等部門中引起了一系列新概念的**形成**，建立了許多新的联系，并导致了一系列深远的結果。本书的主要目的就是要將讀者引入整个这一概念世界。

以这样一些一般的概念和方法作为前导，古典代数学中的个别結果也将要在近世代数的范围之内获得适当的地位。

材料的分配. 对讀者的指示 为了充分明晰地展示統治着抽象代数的許多普遍观点，有必要在开头將羣論和初等代数中的基本知識重新作一叙述。

由于最近一个时期出现了羣論、古典代数和域論方面的許多出色的表述，現在已有可能將这些导引性的部分紧凑地(但是完整地)写出来¹⁾。

另外一个指导原則，就是希望尽可能地作到使每个个别的部

1) 羣論方面參看:

Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Aufl. Berlin, Springer, 1927.

域論方面:

Hasse, H.: Höhere Algebra I, II 及 Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, Sammlung Göschen, 1926/27.

Haupt, O.: Einführung in die Algebra I, II, Leipzig, 1929.

古典代数方面:

Perron, O.: Algebra I, II, 1927.

綫性代数方面:

Dickson, L. E.: Modern algebraic Theories, Chicago, 1926.

分都能独立地讀懂。只希望了解一般理想論或超复数理論的讀者,就沒有必要去讀 Galois 理論,反之亦然; 想要參考消去法或綫性代数的讀者,就可以不必被許多复杂的理想論的概念所吓倒。

材料的分配是这样来安排的: 最初三章以最小的篇幅包括了为所有其余各章作准备的知識,即有关 1. 集合; 2. 羣; 3. 环、理想和域的最基本的概念。第一卷中其余各章主要从事于讲述交換域的理論,且主要以 Steinitz 在 *Crelles Journal*, **137** (1910) 发表的奠基性著作为基础。第二卷在尽可能地作到彼此不相依賴的各章中討論了模、环和理想的理論,以及对代数函数、初等因子、超复数和羣表示的应用。

Abel 积分和連續羣的理論不得不从本书中略去,因为对此二者作适当的討論都有必要用到一些超越的概念和方法。其次,由于内容庞大之故,不变量理論也被略去。行列式假定是已知的,并且只用到很少几次。

为了对本书内容作更进一步的了解,可以查看目录,特别是前面所附的那个綜覽图。从这个图中可以清楚地看到,每一章要利用到前面多少章书。

分插在全书中的許多习题是这样选择的,就是要使讀者能够通过它們来檢驗自己是否懂得正文的内容。它們之中也包括了一些在后面有时要用到的例子和补充。解这些习题不需要特别的技巧,要用到的在方括号內也作了提示。

取材来源 这本书部分地是由几次講演发展而成的,这就是: E. Artin 的代数学講演(汉堡, 1926 年夏季)。

E. Artin, W. Blaschke, O. Schreier 和作者所主持的理想論討論班(汉堡, 1926/27 冬季)。

E. Noether 关于羣論和超复数理論的两次演講(哥庭根, 1924/

25 冬季, 1926/27 冬季)¹⁾.

本书中的一些新的证明或证明的新的安排, 大部分都来自这些演讲和讨论班, 即使没有明确指出其来源者也是如此.

1) E. Noether 的后一演讲的整理稿发表在 *Math. Zeitschrift*, **30** (1929), 641—692.

第一章 数与集合

因为在这本书里要用到某些逻辑的和一般数学的概念，对于这些概念初学数学的人很可能还不熟悉，所以在前面我们用较短的一章来介绍一下。在这里我们不打算接触数学基础中的困难问题¹⁾：我们一直采取“朴素的观点”，当然，我们避免引起悖论的循环定义。有经验的读者在这一章只要了解一下符号 $\in, \subset, \supset, \cap, \cup$ 与 $\{\dots\}$ 的意义，可以略去其余的部分。

§ 1. 集 合

作为所有数学讨论的起点，我们总是考虑某些确定的对象，譬如数字，字母或者它们的组合。每个单个元素具有或者不具有的性质就定义一个集合或者类；这个集合的元素就是全体具有这个性质的对象。记号

$$a \in \mathfrak{M}$$

表示： a 是 \mathfrak{M} 的元素。我们也几何形象地说： a 在 \mathfrak{M} 中。一个集合称为空的，如果它不包含任何元素。

我们也可以把数（或者字母等）的序列和集合看作对象和集合（我们有时称为第二层集合）的元素。第二层集合又可以是更高层集合的元素，等等。但是在概念形成中，如“所有集合的集合”这类

1) 对于这些問題参看 A. Fraenkel, Einführung in die Mengenlehre (集合論引論), 3. Aufl. (Berlin 1928), 以及 Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik (数学基础), Berlin I (1934), II (1939) 和在那里所引的文献。

概念是不允許的，因為它們是造成矛盾的原因；我們常常只從一類預先規定的對象中來造新的集合（新的集合本身不屬於這一類對象）。

如果集合 \mathfrak{N} 的全部元素同時是 \mathfrak{M} 的元素，那麼 \mathfrak{N} 就稱為 \mathfrak{M} 的子集合，記為

$$\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}.$$

這時， \mathfrak{M} 也稱為 \mathfrak{N} 的包集合，記為

$$\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{N}.$$

由 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ 和 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ 推出 $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ 。

空集合包含在每個集合之中。

如果 \mathfrak{M} 的所有元素全在 \mathfrak{N} 中，同時 \mathfrak{N} 的所有元素全在 \mathfrak{M} 中，那麼集合 \mathfrak{M} ， \mathfrak{N} 稱為相等：

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}.$$

因之，集合相等就表示關係

$$\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$$

同時成立。或者：如果兩個集合包含相同的元素，它們就相等。

如果 $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ ，但不 $= \mathfrak{M}$ ，那麼 \mathfrak{N} 就稱為 \mathfrak{M} 的真子集合， \mathfrak{M} 是 \mathfrak{N} 的真包集合，記為

$$\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}.$$

因此 $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ 表示， \mathfrak{N} 的元素全在 \mathfrak{M} 中，而在 \mathfrak{M} 中至少有一個元素不在 \mathfrak{N} 中。

設 \mathfrak{A} 與 \mathfrak{B} 是任意的集合。由所有既屬於 \mathfrak{A} 又屬於 \mathfrak{B} 的元素組成的集合 \mathfrak{D} 稱為集合 \mathfrak{A} 與 \mathfrak{B} 的交，寫為

$$\mathfrak{D} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}.$$

\mathfrak{D} 既是 \mathfrak{A} 的又是 \mathfrak{B} 的子集合，並且每個具有這個性質的集合都包含在 \mathfrak{D} 中。