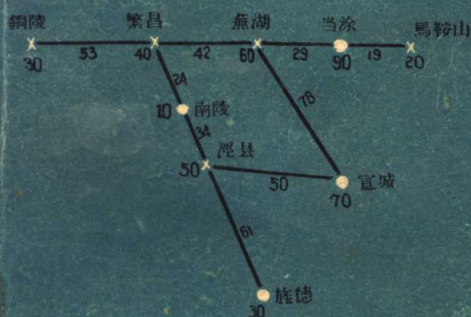


线性规划的方法和应用



皖南大学数学系編



安徽人民出版社

綫性规划的方法和应用

皖南大学数学系編

安徽人民出版社出版

(合肥市金寨路)

安徽省书刊出版业营业許可証出字第2号

地方国营合肥印刷厂印刷 安徽省新华书店发行

开本：787×1092毫米 1/32 印张：4 $\frac{3}{4}$ 字数：110,000

1961年4月第1版

1961年4月合肥第1次印刷

印数：1—5,000册

統一书号：7102·228

定 价：(7) 0.42元

前 言

最近二十年来,由于生产发展的需要,在数学中逐渐形成了一門嶄新的学科——运筹学。运筹学是一种科学方法(主要是数学方法),它能帮助我們在既定的条件和要求下,在复杂的数量关系中,找寻最有效的方案,以便最合理地安排和調度人力、物力。运筹学包括规划論、排队論、博奕論等很多分支。规划論又分綫性规划、非綫性规划、动态规划等。

研究和运用运筹学,在我国还是最近五、六年的事,但发展相当迅速。目前,运筹学在許多部門中得到了广泛和有效的运用。从綫性规划着手,研究和运用运筹学的群众运动已經在全国許多地方出現了。

綫性规划是运筹学的一个重要分支。当前,这一分支在我国应用最广。它主要是研究这样两类問題:一是如何用最少的人力、物力去最大限度地完成既定的任务;二是如何最合理地安排現有的人力、物力,才能發揮最大的效果。綫性规划的主要方法,有图上作业法、表上作业法、单纯形法等。应用这些方法可以合理解决車輛調度、物資調撥、郵遞路綫的布局、劳力安排、作物布局、場地設置、农田水利规划等各方面的問題。

为了普及綫性规划的知識,普遍推广綫性规划,我們与安徽人民广播电台联合举办了綫性规划广播教学讲座,以便帮助广大干部、教师进行綫性规划的学习。这本《綫性规划的方法和应用》就是适应这种需要而編写的。

在編写过程中,我們注意吸取了我系师生从1958年以来深入厂矿、公社、企业推广綫性规划的經驗,在内容上力求通俗易懂。但由于我們的水平限制,加之經驗不足,书中不免会有不少缺点和錯誤,希望讀者提出宝贵意見,以便再版时修訂。

皖南大学数学系

1960年11月

1241 1862

目 录

結 論.....	1)
第一章 运输問題.....	3)
§ 1 运输費用的两种描述	3)
§ 2 不合理物資調运.....	(7)
§ 3 图上作业法.....	(10)
(I) 交通图.....	(10)
(II) 流向图.....	(12)
(III) 吨公里数最小的判定准则——正规流向图.....	(17)
(IV) 吨公里数最小方案的获得.....	(18)
(V) 图上作业法的发展与应用.....	(27)
(一) 图上作业法在車輛調度工作中的应用	(28)
(二) 奇偶点图上作业法	(34)
(三) 麦場的設置——最优定位法	(30)
(四) 产銷不平衡的图上作业法	(39)
(五) 网路上的运输問題	(42)
(六) 循环回路运输图示法	(46)
§ 4 表上作业法.....	(54)
(I) 平衡表与運費表.....	(54)
(II) 初始方案的編制.....	(56)
(III) 最优方案的数字表征——檢驗数 最优判定 准则.....	(74)
(一) 閉回路法	(75)

(二)位势法	(84)
(三)矩形法	(89)
(四)最优判定准则	(92)
(VI) 最优方案的获得——閉圈路調整法	(95)
§5 通路的調整法	(102)
(I) 通道及通道最优判定准则	(102)
(II) 通道調整	(104)
§6 不平衡情况下物资調运問題	(106)
§7 关于运输問題的几点說明	(111)
第二章 一般綫性规划問題	(113)
§1 一般綫性规划問題的数学表現	(113)
§2 一般綫性规划問題的常用解法——单纯形法	(118)
§3 单位向量組的构成	(126)
§4 必須注意的一点——循环情况的避免	(131)
第三章 应用問題举例	(141)

緒 論

在生产实践中,我們經常要考虑以下两个問題:

1. 如何运用現有的人力、物力資源,才能完成最大可能的任务;

2. 在既定的任务之下,如何统筹安排,尽量做到用最少的人力、物力資源来出色地完成这项任务。

这是一个問題的两个方面。就是說,当制訂一个經濟計劃或安排一項生产过程时,在一切条件都已确定的情况下,如何根据量与量之間的內在联系做出一个最恰当的安排,使总的效果达到最好。用数学的語言來說,就是要求出滿足一些数学等式或不等式的一組数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 使得一个已經給定的数学表达式的值达到最大或最小。如果所涉及的数学式子都是一次(綫性)代数式,那末这样的問題就是綫性规划問題。

綫性规划也和其他学科一样,是由于生产力发展的需要而产生的。随着現代生产規模的日益扩大,各部門之間的相互联系日益密切,而且也更为复杂,因此在生产的組織与計劃、交通运输、生产力配置等方面都要求有新的数学方法来为它們服务。在这样的情况下,綫性规划乃应运而生。早在 1939 年苏联科学院通訊院士 A. B. 康脫洛維奇通过有关生产实际問題的研究,写出“生产組織与計劃中的数学方法”一书,提出了解决有关工业、建筑业、运输业等部門中組織与計劃生产問題的数学方法;后来在 1941 年,他又与美国的 F. L. 西奇柯克共同发表了关于

交通運輸問題的文章，為解決“物資調配”、“分散的倉庫保存”、“空車的最優分配和編排”以及“加工產品”等問題提供了最合理的規劃方法。康脫洛維奇的研究成果為綫性規劃的方法和理論奠定了基礎。經過二十年來生產實踐的檢驗和生產發展的刺激，綫性規劃得到了更為廣闊的發展，而成為運籌學的一個重要分支。

第一章 運輸問題

进一步做到物資調运的合理化,在加速社会主义建設进程中已經成为急待解决的問題。我省在解放前由于反动政府的殘酷統治,江河失修,山川欠理,水旱灾害頻仍,交通運輸事业极为落后。解放后的十余年来,在党的正确领导下,我省交通運輸事业較之解放前虽有千百倍的发展,但还不能完全适应社会主义各項建設事业高速度发展的需要,往往还发生運輸任务緊張的情况。因此,进一步做到物資調运的合理化,切实地解决合理運輸問題,对我省來說就更为迫切。

我們所說的合理運輸,就是說要用最少的吨公里数、或最少的運費,把物資由产地运往需要的地方。因而切实解决合理運輸問題,可以節約国家運輸能力,合理地使用各种水陆運輸工具,加速物資周轉,提高建設速度。这是完全符合社会主义建設总路綫的多、快、好、省原則的。

§1 運輸費用的两种描述 運輸問題的数学表現形式

我們知道,計算用于運輸方面的人力、物力(運輸費用)的多寡,通常用下面两种方式:一种是用吨公里,一种是用運費。所謂一个吨公里即一吨物資运行一公里。如有5吨物資由蕪湖运到南京,它的运行吨公里数就是 $5 \times 90 = 450$ (蕪湖与南京相距90公里)。一般說,在物資運輸中吨公里数越小越好。可是也有許多情况却与此相反。譬如說,有一宗物資1000吨用火車由蕪

湖运往南京,和另一宗物资 1000 吨用輪船由蕪湖运往南京,其吨公里数同是 9 万,但是,由于采用的运输工具不同等原因,二者对国家财富的耗费是不同的。又如,采用同一种交通工具,把 10 吨物资运行 1 公里和 1 吨物资运行 10 公里,其吨公里数均为 10,但它们对国家财富的耗费也是不同的。在这种情况下,运费就比较真实地反映着花费于运输方面的人力和物力。这是由于运费标准的制订是根据里程越远,单位货物之运费率越低的原则(这是合乎情理的)。因此,有时物资在短距离运输中,纵然吨公里数比长距离运输中小,但运费可能还比长距离运输中吨公里数较大的要稍微多些。由此可见,要衡量花费于运输方面的人力、物力的多寡,以吨公里数或运费计算各有其实际意义的。究竟采用哪个好,要随具体情况而定。一般来说,在采用相同的交通工具的条件下,我们应该以吨公里数来计算。这样,虽然偶尔会有运费偏高的现象发生,那是运费标准制订得未必完全合理的缘故。总之,我们从整体考虑,还是以吨公里数来衡量花费于运输方面的人力的多寡为好。但是,上面已经指明,在有些情况下,也必须从运费方面来考虑的。

上面所说的“吨公里数”和“运费”就是在一般情况下对于运输费用的两种描述方式。有了上述概念,我们也就可以将运输问题的数学表现形式写出来了。例如:

有一种货物,它在下列地点间进行调运:

发点: 1. 宣城 70 吨	收点: 1. 馬鞍山 20 吨
2. 当涂 90 吨	2. 蕪湖 60 吨
3. 南陵 10 吨	3. 繁昌 40 吨
4. 旌德 30 吨	4. 涇县 50 吨
	5. 銅陵 30 吨

試求出一个吨公里数最小的调运方案来(为了方便起见,我

們以收、发点號碼来代替各收、发点，例如說发点 2，即指当涂，收点 5 即指銅陵）。我們把发点 i 到收点 j 之間的距离（以公里計）記作 C_{ij} （具体数字可參看 11 頁 §3 中之图（二））；而把发点 i 运到收点 j 的貨物吨数記作 x_{ij} ，那末就是求这样的一組非負的数 $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{15}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{25}; \dots; x_{41}, x_{42}, \dots, x_{45}$ ，使

$$S = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{15}x_{15} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} \\ + \dots + c_{41}x_{41} + c_{42}x_{42} + \dots + c_{45}x_{45}$$

的值达到最小。而这組非負的数 $x_{11}, \dots, x_{15}; x_{21}, \dots, x_{25}; \dots; x_{41}, \dots, x_{45}$ 必須滿足：

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 70 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 90 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 10 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 30 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 20 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 40 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 50 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 30 \end{array} \right.$$

如果將发点 i 到收点 j 之間一吨貨物的运費用 c'_{ij} 来表示，那么，要求这一物資調运的运費最小的数学形式可同样地得到，只是其中的第 i 个发点到第 j 个收点間之距离 c_{ij} 相应地換成 c'_{ij} 罢了。

更一般地說，設一种要調运的物資有 m 个发点， n 个收点。第 i 个发点有 a_i 吨貨物发出，第 j 个收点需要貨物 b_j 吨。要求使总运输費用（吨公里数或运費）最少的方案来。解决这一問題，首先要了解发点 i 到收点 j 間的距离（当要求吨公里数最小的时候）或一吨貨物的运費（当要求运費最少的时候） c_{ij} ，再令发

和吨公里数最小的問題就統一于一种方法之中。因此，为叙述方便起见，本书的前一章介绍求最优調运方案的三种方法时（其实綫性规划的应用远不止于运输問題上，見第三章有关之例），在§3中恒以吨公里数來說明問題，在§4 §5 和 §6 中恒以運費來說明問題。

§2 不合理的物資調运

实际搞調度工作的同志，經過长期实践，积累了极其丰富而行之有效的經驗。这对物資調运合理化的科学理論提供了大批感性資料。然而若不将这些感性資料及时加以总结上升为理論以指导实践，并使理論在实践中进一步得到丰富，那末我們在实际工作中还会有很多地方可能要犯錯誤的。目前，正由于我們在这方面的的工作做得还不够，科学的調运方法未完全普及，因而，在运输工作中还存在着下面的一些不合理的現象：

第一种：对流运输。即同一物資在同一路綫上形成对流現象。例如：某一运输计划中有貨物一万吨由裕溪口运往田家庵；同时又有同一种貨物一万吨由蚌埠运往合肥。若将这一运输情况画在地图上看，水家湖与合肥間就有万吨相同的貨物形成对流，造成交通工具使用上的浪費。

第二种：迂回运输（舍近就远）。如果收、发点之間有两条或两条以上的不同道路可以通行，而我們却没有注意采取最短綫路，那么就发生迂回运输現象（例如：从蕪湖运貨到合肥繞道南京、蚌埠，而不經裕溪口运至合肥）。这种情况尤其是在交通綫集中的地方或者是調度人員对交通路綫还未十分熟悉时容易发生。

第三种：“最小”的錯觉。这是最常发生的一种不合理現象。例如，有一宗物資，其产地和銷地很多时，有的人拣收发点

距离最短(或运费最小)的那些收发关系先满足,依次下去,以至收点完全满足为止。这是一种“最小”的假象,虽然每次都是找最小的,但整体考虑未必最好。例如,有一宗物资,其收发点、收发量和里程(或运费)如下表所示:

发点 调运量 收点	甲	乙	收 量
丙			3
丁			8
发 量	4	7	

发点 收发点距离 收点	甲	乙
丙	1	2
丁	5	8

这里甲丙间距离(运费)最小,将甲处货物运3吨给收点丙,丙则收足,甲余下之一吨和乙之7吨必须都给收点丁,这样彼此平衡,其收发量如下表:

調运量 发点 收点	甲	乙	收 量
丙	3	0	3
丁	1	7	8
发 量	4	7	

这时吨公里数(或运费)是 $1 \times 3 + 5 \times 1 + 8 \times 7 = 64$

再看下面的运输方案:

調运量 发点 收点	甲	乙	收 量
丙	0	3	3
丁	4	4	8
发 量	4	7	

这个运输方案的吨公里数(运费)是 $3 \times 2 + 4 \times 5 + 4 \times 8 = 58$, 比前者小。事实上, 前面那个屡次拣最短的路綫先供給的总費用是最大的一个。这里因为: 虽然甲运往丙比运往丁要近 4 公里, 但是, 由于甲已满足了丙的需要, 乙的存貨就不得不多走 6 公里而运往丁; 另一方面, 虽然丙从甲取貨比从乙取貨要近一公里, 但由于丙从甲取了貨之后, 丁就不得不多跑 3 公里到乙去取貨。这样一来, 第一次注意了近 1 公里或近 4 公里, 但牽涉到第二次远 3 公里或 6 公里, 显然, 从整体考虑, 这个調运方案就不一定最好(这是一个极端的例子, 一般而言, 当然不完全如此)。

上述前两种不合理运输的毛病虽是显而易見的, 但在收发

点很多的錯綜复杂的情况下也是容易产生的；至于最后的一种不合理运输，对一个未掌握綫性规划方法的調度人員來說几乎是很难免的。

§ 3 图上作业法

随着社会主义經济建設高速度发展，交通运输任务也日益繁忙。为了适应經济建設迅速发展的需要，我們在交通运输方面除了增辟新路綫、增設新交通工具外，根据已有条件覓求最经济的运行方案就具有重大意义。只有这样才能更充分地發揮交通运输的潜力。

我們的党和政府一貫重視合理运输的研究。同时，我們社会主义国家制度的优越性也才真正有利于这一研究工作的順利开展。1950年，东北計委会的一个专营运输小組，他們在党的领导下，从实际工作中鍛炼成长起来。他們既具有丰富的經驗又具有高度的階級覺悟。他們对合理运输問題极力钻研，在这方面得出了一些初步規律。他們的努力成果后經許多实际工作同志的屢次改进，創造出了物資調运中的图上作业法。这种图上作业法又經中国科学院数学研究所于1958年給予了理論上的鉴定。从此，广大的从事实际工作的同志都运用这个方法，在我国交通运输战綫上做出了卓越的成績。大家贊揚說：图上作业真正好，生产提高跑路少，社会主义优越性，資本主义办不到。这一方法計算簡易，行之有效。它反映出劳动群众对科学的巨大創造力，丰富了数学科学；同时，雄辯地証明了数学只有紧密地联系生产实际才能得到蓬勃的发展。

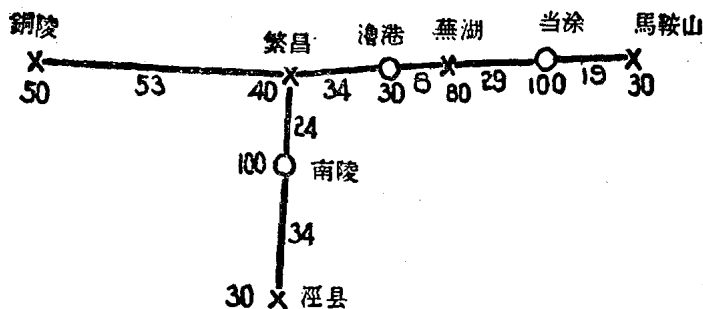
下面我們开始介紹图上作业法。

(I) 交通图

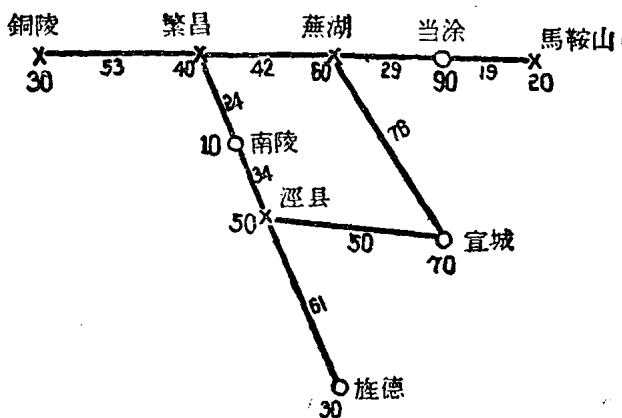
进行物資調运，就有調出物資的地点（下称发点，在地图上

用記号“○”来表示)和調进物資的地点(下称收点,在地图上用“×”来表示)。发点要調出物資之量(以吨計),称为发量,在地图上标在发点之旁;收点調入物資之数量(同样以吨計)称收量,在地图上标在收点之旁(总的发量与总的收量是相等的)。繪图时,我們按实际情形将各点間的路綫联結起来,并在路綫旁标上距离,就得出交通图。由于交通图上收、发点已注明了收发量,因而从交通图上就清楚地看出某种物資的收发点及其相应之收发量,而且也可直接在交通图上来編造調运方案。

第一类:交通图的路綫不成圈,如图(一)。

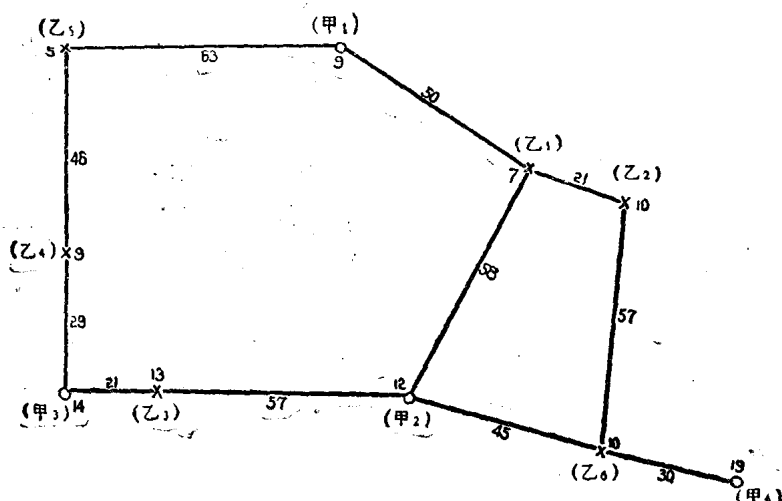


图(一)



图(二) 蕪、繁、涇、宣、蕪形成一个圈。

第二类：交通图中有若干路线形成圈，如图(二)及图(三)。



图(三) (甲)代表发点, (乙)表示收点, 在“甲”和“乙”的右下方标上数字, 以分别其各个不同的发点和收点。

图(三)中《乙₁, 乙₂, 乙₆, 甲₂, 乙₁》形成一圈; 《甲₃, 甲₂, 乙₁, 乙₅, 甲₃》形成一圈; 《甲₃, 甲₂, 乙₆, 乙₂, 甲₁, 乙₅, 甲₃》也形成一个圈, 这个交通图共计三个圈。

(II) 流向图

为了表示物资调运, 如表示某个发点有物资若干运给某一收点, 我们可以在交通图上沿着从此发点到该收点的交通路线的右边划一箭头来表示, 并在箭头旁边标出调运的数量(为与里程数区别, 可将表示调运量的数字划上一个圈)。这种箭头(包括旁边标注的调运量)叫做流向。

例如当涂有物资 30 吨调给蕪湖, 则这一调运的流向如图(四)。



图(四)