考研数学常见题型分析及模拟试题

主编　王寿生

西北工业大学出版社

考研数学常见题型分析及模拟试题

主　编　王寿生
王寿生　李云珠
符丽珍　赵选民　编

西北工业大学出版社

1996年7月　西安

(陕)新登字 009 号

【内容简介】 本书是为报考硕士研究生的考生编写的数学考试复习指导用书。全书分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步、考研模拟试题等四篇。

本书有三个特点:(1) 对研究生入学数学考试大纲作了较扼要而简明的诠释;(2) 介绍了各学科专业研究生入学数学考试试题常见题型的众多解题方法与技巧;(3) 根据 1992 年新大纲和考研命题走向编制了 8 套模拟试题。这些都有助于提高考生的应试能力,有利于读者提高分析综合和灵活运用的能力。

本书供报考理工科、经济和 MBA 研究生的考生复习应试之用。也可供大专院校的学生及有志于自学高等数学、线性代数、概率论与数理统计的读者和大专院校教师阅读参考。

考研数学常见题型分析
及模拟试题
主　　编　王寿生
责任编辑　李珂　季强
责任校对　樊力
*

(710072　西安市友谊西路 127 号　电话 8493844)
全国各地新华书店经销
陕西省富平印刷厂印装
ISBN 7-5612-0894-4/O·125
*
开本:787×1092 毫米 1/16　印张:22 字数:532 千字
1996 年 7 月第 1 版　1996 年 7 月第 1 次印刷
印数:1-6 000　定价:21.00 元

前　　言

为了使报考研究生的考生能在较短时间内高效率地对数学进行全面复习，提高应考能力，我们按照国家教委制订的 1997 年全国工学、经济学硕士和 MBA 研究生入学考试《数学考试大纲》的精神，并结合编者多年来指导复习数学的实践经验，编写了本书。

本书由高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步、模拟试题四部分组成。前三部分中，编者对考试大纲所要求的内容作了简明扼要的诠释，并对考研试题中的常见题型进行了例题分析。这样既可以帮助读者对考试大纲规定的内容，特别对重点和难点的内容有一个系统而明晰的了解；也可以帮助读者了解解题的规律，掌握解题的方法与技巧，提高解题能力。第四部分，我们共编排了 8 套试题，其中数学一 6 套，数学三和数学四各 1 套，每套题中各部分所占的比例及题型结构均按照考试大纲的要求编排，题目的内容基本上覆盖了考试大纲的要求，且既有基本题，也有一定数量较难的题。通过演练这些试题，无疑可以提高考生的解题应试能力，也可了解国内研究生入学考试的命题结构和动向。

本书可作为考研应试者的复习用书，也可作为正在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计的辅导读物。此外，还可供讲授有关课程的教师及工程技术人员参考。

本书由王寿生（编写第一章至第四章）、李云珠（编写第五章至第八章）、符丽珍（编写第九章至第十四章）、赵选民（编写第十五章至第十八章）分工编写，王寿生任主编，编者按篇章顺序署名。模拟试题是先由各编者分别拟题，然后共同讨论确定。

由于水平所限，书中疏误之处，恳请读者指教。

编　者

1996 年 5 月于西北工业大学

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第四篇　模 拟 试 题

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限、连续

考试大纲 函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 反函数、复合函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 简单应用问题的函数关系的建立 数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义、函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义和函数的左、右极限 无穷小 无穷大 无穷小的比较 极限四则运算 极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理）

第一节 函 数

1.1 关于考试大纲的若干简明诠释

1. 函数概念 对于函数概念要注意以下几点：

1）函数概念的本质特征是确定函数的两个要素：定义域和对应法则．定义域是自变量和因变量能相互联系构成函数关系的条件．无此条件，函数就无意义了．对应法则是正确理解函数概念的关键．函数关系不同于一般的依赖关系，"y 是 x 的函数"，并不意味着 y 随 x 的变化而变化．函数关系也不同于因果关系．例如一昼夜的气温变化与时间变化是函数关系，但时间变化并不是气温变化的实际原因．$y=f(x)$ 中的"f"表示从 x 到 y 的对应法则，"f"是一个记号，不是一个数，不能把 $f(x)$ 看作 f 乘以 x. 如果函数是用公式给出的，则"f"表示公式里的全部运算．

2）函数与函数表达式不同．函数表达式是表示函数的一种形式，表示函数还可以用其他的形式，不要以为函数就是式子．

3）$f(x)$ 与 $f(a)$ 是有区别的．$f(x)$ 是函数的记号，$f(a)$ 是函数值的记号，是 $f(x)$ 当 $x=a$ 时的函数值．

4）两个函数，当其定义域相同，对应法则一样时，此二函数是相同的．

2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 应注意以下几点：

1）并不是函数都具有这些特性，而是在研究函数时，常要研究函数是否具有这些特性．

2）函数是否"有界"或"单调"，与所论的区间是有关系的．

3）具有奇、偶性的函数的定义域关于原点是对称的．如果 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$.

存在着既是奇函数，又是偶函数的函数：$f(x)=0$. $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法．

4）周期函数的周期通常是指其最小正周期，但不是任何周期函数都有最小正周期．

3. 关于复合函数　要注意的是：函数的复合是有条件的，并不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数．一个函数是否为复合函数与该函数的对应法则的表示方法有关．例如，$y=1$ 和 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 的对应法则相同，但对应法则的表示方法是不同的，前者不是复合函数，后者可看成是由 $y=u^2+v^2, u=\sin x, v=\cos x$ 复合而成的复合函数．

4. 分段函数　分段函数往往不是初等函数，因为它没有用一个数学式子来表示．但不能说分段函数都不是初等函数，例如 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是分段函数，也是初等函数，因为它可以用一个数学式子 $y=\sqrt{x^2}$ 表示．

5. 简单的经济函数　在生产和经营活动中，成本、收入、利润关于产品的产量或销量 x 的函数关系分别称为总成本函数，记为 $C(x)$；总收入函数，记为 $R(x)$；总利润函数，记为 $L(x)$. 一般说来，$C(x)=$ 固定成本 $+$ 可变成本；$R(x)=px$，其中 p 为产品的销售单价，x 为销量；$L(x)=R(x)-C(x)$. 商品的市场需求量 Q_d 和市场供给量 Q_s 相对商品价格 p 的函数关系，分别称为商品的需求函数 $f_d(p)$ 和供给函数 $f_s(p)$.

1.2　若干常见题型的例题分析

例 1　已知 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域及 $f[f(-7)]$.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义，应有 $\begin{cases}3-x>0\\ 3-x\neq 1\\ -7\leqslant x\leqslant 7\end{cases}$，解之得 $-7\leqslant x<2$ 及 $2<x<3$. 因为 $f(-7)=\dfrac{1}{\lg 10}=1$，所以 $f[f(-7)]=f(1)=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

关于求函数的定义域的方法应注意：如果函数是一个抽象的数学式子，则其定义域是使这个 式子有意义的一切实数．这时应注意到：(1) 分式的分母不能为零；(2) 偶次根号下应大于或等于零；(3) 对数式的真数应大于零；(4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$，其 $|x|\leqslant 1$；(5) 若函数表达式由几项组成，则其定义域是各项定义域的公共部分；(6) 分段函数定义域是各段定义域的并集．

例 2　设 $f(x)$ 对一切实数 x,y 满足等式 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且 $f(0)\neq 0, f(1)=a$，证明：(1) $f(0)=1$；(2) 对一切自然数 n，有 $f(n)=a^n$.

证　(1) 令 $x=y=0$，则 $f(0)=[f(0)]^2$，因 $f(0)\neq 0$，故 $f(0)=1$.

(2) $n=1$ 时，$f(1)=a=a^1$，等式成立．设 $n=k$ 时，等式成立，即 $f(k)=a^k$. 下证当 $n=k+1$ 时，等式也成立．因 $f(k+1)=f(k)\cdot f(1)=a^k\cdot a^1=a^{k+1}$，所以对一切自然数 n，均有 $f(n)=a^n$.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x, x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x+1)=x^2+x+1$，试求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解　因 $g(x+1)=x^2+x+1=(x+1)^2-(x+1)+1$，于是 $g(x)=x^2-x+1=(x-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$，所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, g(x)<0\\ g(x), g(x)\geqslant 0\end{cases}=x^2-x+1,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$g[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1, & x<0\\ x^2-x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

例 4 已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}x \quad (x>0)$，求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

解 因 $f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$，而

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{u}} -\int_1^x \frac{\ln(1+u)-\ln u}{u}\mathrm{d}u$$

所以
$$f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t-\int_1^x \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_1^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x \ln t\mathrm{d}(\ln t)=\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

例 5 设在 $[0,+\infty)$ 上，$0<f'(x)<\frac{2}{x^3}$，证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界.

证 因 $0<f'(x)<\frac{2}{x^3}$，根据积分性质得 $\int_1^x 0\mathrm{d}x<\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t<\int_1^x \frac{2}{x^3}\mathrm{d}t \quad (x>1)$，即 $0<f(x)-f(1)<-\frac{1}{x^2}+1 \quad (x>1)$，也即 $f(1)<f(x)<-\frac{1}{x^2}+1+f(1) \quad (x>1)$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界.

例 6 某玩具厂每天生产 60 个玩具，其成本为 300 元，若每天生产 80 个玩具，其成本为 340 元，求其线性成本函数，问每天的固定成本和生产一个玩具的可变成本以及平均成本各多少？

解 设该厂每天玩具产量为 x 个，则其线性成本函数为 $C(x)=a+bx$（单位：元），由已知 $C(60)=300$，$C(80)=340$，得方程组

$$\begin{cases}a+60b=300\\ a+80b=340\end{cases}，解之得 \begin{cases}a=180\\ b=2\end{cases}$$

因此，该厂生产成本函数为 $C(x)=180+2x$，每天固定生产成本为 $C(0)=a=180$ 元，生产一个玩具的可变成本为 $b=2$ 元，每天生产 x 单位玩具的平均成本为 $\frac{C(x)}{x}=\frac{a}{x}+b$.

例 7 设某商品的需求函数为 $Q_d=15-0.4p$，总成本函数为 $C=12+0.3Q_d$，求该商品总利润对于销售价格的函数.

解 当销售量为 Q_d 时，总收入为

$$R(p)=Q_d p=(15-0.4p)p$$

于是总利润对于销售价格的函数为

$$L(p)=R(p)-C(Q_d)=(15-0.4p)p-[12+0.3(15-0.4p)]$$
$$=15.12p-0.4p^2-16.5.$$

第二节　极　　限

2.1　关于考试大纲的若干简明诠释

1. 关于极限概念

1) 如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon)$，当 $n > N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，则称数列 x_n 当 $n \to \infty$ 时以 a 为极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2) 如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

类似地，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X = X(\varepsilon) > 0$，当 $|x| > |X|$ 时，$|f(x) - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

应当注意，数列 $x_n = f(n)$ 的极限与函数 $y = f(x)$ 的极限是有区别的，它们的区别在于：数列 $x_n = f(n)$ 的自变量 n 的变化过程是间断的（只取正整数），且只有一个过程：$n \to \infty$（即 $n \to +\infty$）；而函数 $y = f(x)$ 的自变量 x 的变化过程是连续的，变化过程有：$x \to x_0$，$x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$，$x \to \infty$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$.

数列 $x_n = f(n)$ 的极限与函数 $y = f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限又有一定的联系：当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 必定存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 但当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在时，$\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ 可以存在.

2. 左、右极限　当 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 存在时，分别称 $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 和 $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限和右极限，它们统称为单侧极限.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是左、右极限 $f(x_0 - 0)$、$f(x_0 + 0)$ 都存在，且 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

3. 无穷小与无穷大

1) 无穷小是指在自变量的某种趋向下，对应的函数值的变化趋势（趋向于零），而有界函数 是指自变量在某一范围内，对应的函数值的变化情形. 如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷小，则 $f(x)$ 在点 x_0 附近必定有界，但离点 x_0 远一些的地方是否有界就不能肯定了.

2) 无穷大是指在自变量的某种趋向下，对应的函数值的变化趋势. 如果函数 $f(x)$ 是无穷大，则 $f(x)$ 必定无界；但反过来，当 $f(x)$ 无界时，$f(x)$ 可不一定是无穷大.

3) 具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小的和；反过来，如果函数可表为常数与无穷小之和，则该常数就是这函数的极限.

4) 如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

5) 设 α 和 β 是同一极限过程中的两个无穷小. 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = 0(\alpha)$；如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$，则称 β

与 α 是同阶无穷小，记作 $\beta = 0(\alpha)$；如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$；如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = C \neq 0(k > 0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小．当 $x \to 0$ 时，常见的等价无穷小有：$\sin x \sim x, \operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \operatorname{arctg} x \sim x, \ln(1+x) \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, e^x - 1 \sim x, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$.

6) 设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$（等价无穷小代替定理）.

4. 关于求极限问题　根据极限的题型，可以选择“罗必塔法则”、“泰勒展开式”、“等价无穷小代替”、“利用两个重要极限”、“极限存在准则”、“正项级数收敛的必要条件”、“导数的定义”、“定积分的和式”等方法求极限．

2.2　若干常见题型的例题分析

例 1　已知 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{x_1+1}, \cdots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}, \cdots$，证明数列 x_n 收敛，并求出此数列的极限．

解　因 $x_2 - x_1 = \frac{x_1}{x_1+1} = \frac{1}{2}$，即 $x_2 > x_1$. 假设 $x_n > x_{n-1}$，则有 $x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{x_n}{x_n+1} - (1 + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}) = \frac{x_n}{x_n+1} - \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n+1)(x_{n-1}+1)} > 0$，故数列 x_n 是单调增加的．

又 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1} = 2 - \frac{1}{x_{n-1}+1} < 2, n = 2,3,\cdots$，故数列 x_n 又是有界的．根据单调有界原理，知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，设为 A. 对 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1}$ 的两边取极限，得 $A = 1 + \frac{A}{A+1}$. 解之得 $A = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$，舍去负值，知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{1/2}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{1/n}}]$

解　令 $f(x) = \frac{1}{(n^x+1)^{1/x}}$，则 $\ln f(x) = \frac{-1}{x}\ln(n^x+1)$，两边对 x 求导，得 $f'(x) = f(x)[\frac{1}{x^2}\ln(n^x+1) - \frac{1}{x}\frac{n^x \ln n}{n^x+1}] > f(x) \cdot [\frac{1}{x^2}\ln n^x - \frac{1}{x}\ln n] = 0$，因此 $f(x)$ 是单调增函数，从而有

$$\frac{n}{n+1} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{1/2}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{1/n}} < \frac{n}{(n^n+1)^{1/n}}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{(n^n+1)^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n^n})^{1/n}} = 1$，故由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n^2+1)^{1/2}} + \cdots + \frac{1}{(n^n+1)^{1/n}}] = 1$.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x\cos x}}{x\ln(1+x^2)}$

解　$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x\cos x}}{x\ln(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\cos x}(e^{x - x\cos x} - 1)}{x\ln(1+x^2)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{x\cos x}(x - x\cos x)}{x \cdot x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x\cos x}(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

此解我们作了如下的等价无穷小替换：$x \to 0$ 时，$\ln(1 + x^2) \sim x^2$，$e^{x - x\cos x} - 1 \sim x - x\cos x$.

应用等价无穷小替换，是计算极限时常用的方法．使用等价无穷小替换时应当注意：(1) 要准确地记忆一些等价无穷小；(2) 使用等价无穷小替换，是把分子或分母中的因式用相应的等价无穷小替换，或把整个分子或分母用相应的等价无穷小替换．如果分子或分母是几个无穷小的代数和，则不能盲目地替换．

例 4　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2 + \operatorname{tg}x} - \sqrt{2 + \sin x}}{x^3}$

解　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2 + \operatorname{tg}x} - \sqrt{2 + \sin x}}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x - \sin x}{x^3(\sqrt{2 + \operatorname{tg}x} + \sqrt{2 + \sin x})}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(\frac{1}{\cos x} - 1)}{x^3(\sqrt{2 + \operatorname{tg}x} + \sqrt{2 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 + \operatorname{tg}x} + \sqrt{2 + \sin x}}$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

对含有三角函数式的 $\frac{“0”}{0}$ 型极限，常可利用重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 计算，但必须先对函数进行适当变形，如利用三角公式、根式有理化等方法，以便把函数化为能使用重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 的典型形式．

例 5　求 (1) $\lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x + 3}{x + 2})^{2x+1}$；　(2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

解　这是一组形如 $\lim u(x)^{v(x)}$ 的极限．如果 $\lim u(x) = 1$，$\lim v(x) = \infty$，常把 $\lim u(x)^{v(x)}$ 称为“1^∞”型未定式．重要极限 $\lim\limits_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ 是计算这类极限的重要工具．这时的关键是把 $\lim u(x)^{v(x)}$ 化为重要极限 $\lim\limits_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x})^x$ 或 $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ 的形式．

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} (\frac{x + 3}{x + 2})^{2x+1} = \lim\limits_{x \to \infty}(1 + \frac{1}{x + 2})^{2(x+2)-3}$

$$= \lim_{x \to \infty}\left\{[(1 + \frac{1}{x + 2})^{x+2}]^2 \cdot \frac{1}{(1 + \frac{1}{x + 2})^3}\right\} = e^2.$$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \cos\sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} (1 + \cos\sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} (1 + \cos\sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

这里用到结论：如果 $\lim u(x) = a > 0$，$\lim v(x) = b$，则 $\lim u(x)^{v(x)} = a^b$．事实上，$\lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim[v(x)\ln u(x)]} = e^{b\ln a} = a^b$.

例 6 求$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$

解 令 $1-x=t$,则 $x\to 1$ 时,$t\to 0$

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}(1-t)=\lim_{t\to 0}t\cdot\mathrm{ctg}\frac{\pi t}{2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}t}{\mathrm{tg}\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

变量代换是常用的将函数变形的方法,通过变量代换使不够典型的极限形式典型化,从而易于求出极限.

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{sim}\sqrt{n^2+1}\pi$

解 因$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$,

又因$(-1)^n$为有界量,而$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi=0.$$

例 8 已知$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\mathrm{arctg}x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^p}=c\neq 0$,求 p 和 c.

解 首先注意到,如果 $\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=c\neq 0$,且 $\lim u(x)=0$(或 $\lim v(x)=0$),则 $\lim v(x)=0$(或 $\lim u(x)=0$). 按照这个结论,即知$\lim\limits_{x\to 0^+}x^p=0$,因而所给极限为"$\dfrac{0}{0}$"型. 用罗必塔法则,得

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\mathrm{arctg}x-\ln\frac{1+x}{1-x}}{x^p}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}}{px^{p-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-4x^2}{(1-x^4)px^{p-1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-4}{(1-x^4)px^{p-3}}=c\neq 0$$

因$\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x^4)=1$,故必有 $p=3$,这时 $c=-\dfrac{4}{3}$.

例 9 求$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right]\right\}$

解 因 $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\sin\frac{x}{2^{n-2}}=\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\sin x,$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x},$$