



本系列图书一律安排在王迈迈英语教学网授课

<http://www.wmmenglish.com>

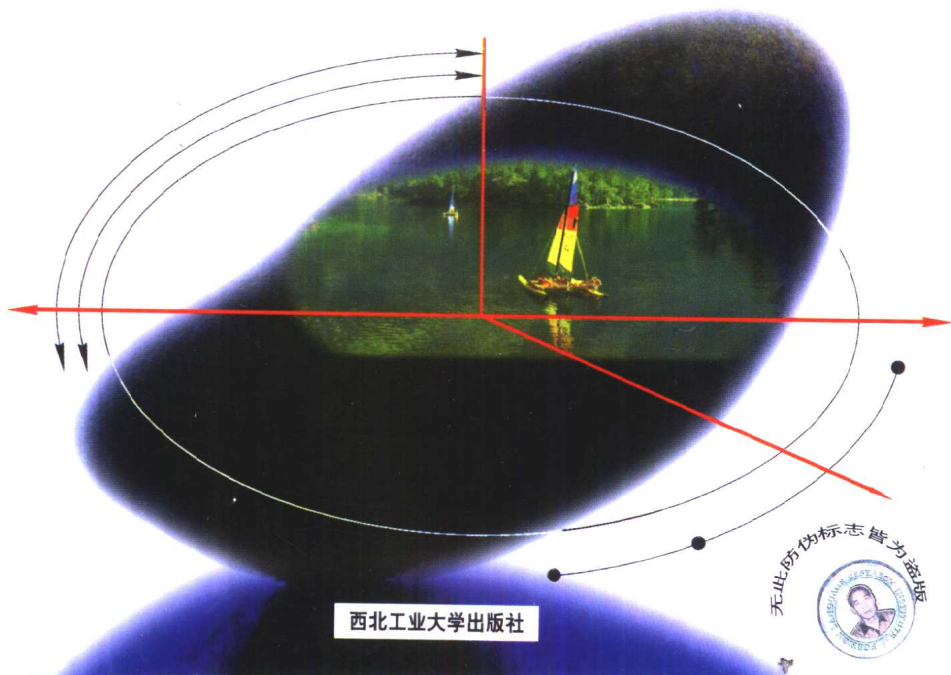
E-mail: sale@wmmenglish.com

与同济大学《高等数学》（第四版）配套

高等数学^上 教与学参考

最新修订版

阎国辉 主编



西北工业大学出版社





本系列图书一律安排在王迈迈英语教学网授课

<http://www.wmmenglish.com>

E-mail:sale@wmmenglish.com

与同济大学《高等数学》(第四版)配套

高等数学^上

教与学参考

最新修订本

阎国辉(主编) 张宏志

西北工业大学出版社

(陕)新登字 009 号

高等数学教与学参考(上)

阎国辉 主编
丛书策划 王迈迈
责任编辑 陈康宁
责任校对 李刚等

*

© 2000 西北工业大学出版社出版发行

(邮编:710072 西安市友谊西路 127 号)

全国各地新华书店经销

文字六〇三厂印装

ISBN 7 - 5612 - 1006 - X/0·128

*

开本:787 毫米×1092 毫米 1/32 印张:36 字数:800 千字

2002 年 2 月第 3 版

2002 年 2 月第 1 次印刷

印数:1-10000 册

定价:34.00 元(本册 17.00 元)

前 言

同济大学《高等数学》(第四版)是全国高等院校普遍采用的教材。为了帮助同学们学好该书,我们根据自己多年的教学经验,根据无数大学生学习此书反馈的信息,根据一届又一届考研辅导留给我们的深刻体会,编写了《高等数学教与学参考》一书。

多年来,我们在讲授《高等数学》这门课的同时,一直希望能有一本十分详尽的教学参考书,能让同学们在没有任何老师辅导的情况下,通过这本详尽的参考就能完全学懂学好《高等数学》,就能解答出《高等数学》中的全部习题,就能通过学习该参考中的习题详解,弄懂每一道难题。

《高等数学教与学参考》就是在这种思想的指导下写成的。该书分为上、下两册。完全与教材内容同步,完全按教材章节编写。上册七个章节,下册五个章节。每个章节都包括以下八个方面的内容:

一、考点提示及大纲要求。大纲要求一目了然,考点简明扼要。

二、重点知识结构图。该图提纲挈领,逻辑性强,体系完整。

三、常考题型与范例精解。题型典型灵活,解题方法富于技巧,内容覆盖全面。

四、疑难解答。抓住要害,突出重点、难点,扩宽知识面。

五、考研精典题剖析。开阔视野,“一步到位”,使读者更加明了考研的题型和难度,做到有的放矢。

六、典型错误类型及根源分析。析理透彻,一针见血。

七、学习效果两级测试。循序渐进,层次分明,适合不同

要求,便于复习巩固所学知识。

八、习题解答与两级测试题答案。便于自我检测。

最后附录了六份考研模拟测试题与解答,以供读者对自己的学习效果进行评估。

我们真诚希望《高等数学教与学参考》能够成为广大读者的知心朋友。我们也十分清楚,由于水平所限,加之时间仓促,不妥之处在所难免,恳请各位读者及同行不吝赐教。

编 者

2002年2月

目 录

第一章 函数与极限	(1)
一、考点提示及大纲要求	(1)
二、重点知识结构图	(2)
三、常考题型及范例精解	(3)
四、疑难解答	(20)
五、考研精典题剖析	(23)
六、典型错误类型及根源分析	(27)
七、学习效果两级测试	(32)
基础测试题	(32)
考研训练题	(34)
八、课后习题解答与两级测试题答案	(35)
习题 1—1 解答	(35)
习题 1—2 解答	(42)
习题 1—3 解答	(51)
习题 1—4 解答	(55)
习题 1—5 解答	(59)
习题 1—6 解答	(61)
习题 1—7 解答	(64)
习题 1—8 解答	(67)
习题 1—9 解答	(69)
习题 1—10 解答	(72)
习题 1—11 解答	(74)

总习题一解答	(76)
基础测试题答案	(82)
考研训练题答案	(82)

第二章 导数与微分 (84)

一、考点提示及大纲要求	(84)
二、重点知识结构图	(85)
三、常考题型及范例精解	(86)
四、疑难解答	(102)
五、考研精典题剖析	(104)
六、典型错误类型及根源分析	(108)
七、学习效果两级测试	(113)
基础测试题	(113)
考研训练题	(115)
八、课后习题解答与两级测试题答案	(116)
习题 2—1 解答	(116)
习题 2—2 解答	(122)
习题 2—3 解答	(126)
习题 2—4 解答	(130)
习题 2—5 解答	(133)
习题 2—6 解答	(137)
习题 2—7 解答	(145)
习题 2—8 解答	(149)
总习题二解答	(154)
基础测试题答案	(160)
考研训练题答案	(161)

第三章 中值定理与导数的应用 (162)

一、考点提示及大纲要求	(162)
-------------	-------

二、重点知识结构图	(163)
三、常考题型及范例精解	(164)
四、疑难解答	(184)
五、考研精典题剖析	(187)
六、典型错误类型及根源分析	(196)
七、学习效果两级测试	(201)
基础测试题	(201)
考研训练题	(203)
八、课后习题解答与两级测试题答案	(204)
习题 3—1 解答	(204)
习题 3—2 解答	(210)
习题 3—3 解答	(214)
习题 3—4 解答	(218)
习题 3—5 解答	(224)
习题 3—6 解答	(228)
习题 3—7 解答	(234)
习题 3—8 解答	(241)
习题 3—9 解答	(247)
习题 3—10 解答	(251)
总习题三解答	(254)
基础测试题答案	(266)
考研训练题答案	(266)
 第四章 不定积分	 (268)
一、考点提示及大纲要求	(268)
二、重点知识结构图	(269)
三、常考题型及范例精解	(270)
四、疑难解答	(289)
五、考研精典题剖析	(291)

六、典型错误类型及根源分析	(294)
七、学习效果两级测试	(297)
基础测试题	(297)
考研训练题	(299)
八、课后习题解答与两级测试题答案	(300)
习题 4—1 解答	(300)
习题 4—2 解答	(304)
习题 4—3 解答	(311)
习题 4—4 解答	(317)
习题 4—5 解答	(325)
总习题四解答	(328)
基础测试题答案	(340)
考研训练题答案	(341)
 第五章 定积分	(342)
一、考点提示及大纲要求	(342)
二、重点知识结构图	(343)
三、常考题型及范例精解	(344)
四、疑难解答	(362)
五、考研精典题剖析	(364)
六、典型错误类型及根源分析	(371)
七、学习效果两级测试	(375)
基础测试题	(375)
考研训练题	(377)
八、课后习题解答与两级测试题答案	(378)
习题 5—1 解答	(378)
习题 5—2 解答	(381)
习题 5—3 解答	(385)
习题 5—4 解答	(391)

习题 5—5 解答	(397)
习题 5—6 解答	(402)
习题 5—7 解答	(404)
*习题 5—8 解答	(407)
总习题五解答	(411)
基础测试题答案	(424)
考研训练题答案	(424)
第六章 定积分的应用	(425)
一、考点提示及大纲要求	(425)
二、重点知识结构图	(426)
三、常考题型及范例精解	(427)
四、疑难解答	(442)
五、考研精典题剖析	(443)
六、典型错误类型及根源分析	(449)
七、学习效果两级测试	(452)
基础测试题	(452)
考研训练题	(453)
八、课后习题解答与两级测试题答案	(454)
习题 6—2 解答	(454)
习题 6—3 解答	(463)
习题 6—4 解答	(469)
习题 6—5 解答	(473)
习题 6—6 解答	(480)
总习题六解答	(482)
基础测试题答案	(489)
考研训练题答案	(489)
第七章 空间解析几何与向量代数	(490)

一、考点提示及大纲要求	(490)
二、重点知识结构图	(491)
三、常考题型及范例精解	(492)
四、疑难解答	(512)
五、考研精典题剖析	(514)
六、典型错误类型及根源分析	(516)
七、学习效果两级测试	(523)
基础测试题	(523)
考研训练题	(524)
八、课后习题解答与两级测试题答案	(525)
习题 7—1 解答	(525)
习题 7—2 解答	(527)
习题 7—3 解答	(528)
习题 7—4 解答	(530)
习题 7—5 解答	(535)
习题 7—6 解答	(538)
习题 7—7 解答	(542)
习题 7—8 解答	(545)
习题 7—9 解答	(551)
总习题七解答	(553)
基础测试题答案	(564)
考研训练题答案	(564)

第一章 函数与极限

一、考点提示及大纲要求

考点提示

1. 函数的概念及表示法;
2. 函数的有界性,单调性,周期性和奇偶性;
3. 反函数,复合函数,隐函数,基本初等函数的性质及图形,初等函数;
4. 简单应用问题的函数关系的建立;
5. 数列极限与函数极限的定义和它们的性质,函数的左、右极限和间断点的类型;
6. 无穷小(大);无穷小的比较;
7. 极限的四则运算,极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限;

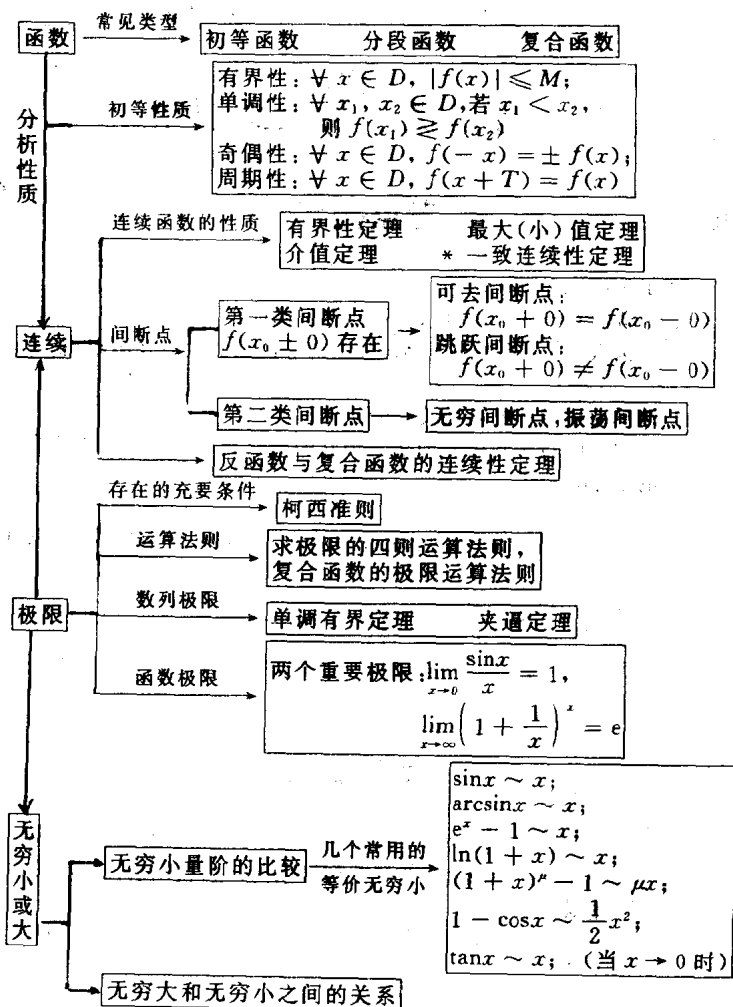
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e;$$

8. 函数连续的概念,初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质。

大纲要求

1. 深入理解函数的概念,了解函数的类型,熟练掌握函数的性质;
2. 正确理解极限的概念,了解数列极限与函数极限的区别与联系,熟练掌握求极限的方法;
3. 理解函数连续与间断的概念,掌握并灵活运用连续函数的性质。

二、重点知识结构图



三、常考题型与范例精解

选择题

例1 已知 $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$, $a > 1$, 且有 $f(x)g(y) + f(y)g(x) = g(u)$, 则 $u =$ _____.

- (A) $x - y$; (B) $x + y$;
(C) $y - x$; (D) xy .

解 由 $f(x)g(y) + f(y)g(x) = \frac{1}{4}(a^x + a^{-x})(a^y - a^{-y}) + \frac{1}{4}(a^y + a^{-y})(a^x - a^{-x}) = \frac{1}{2}[a^{x+y} - a^{-(x+y)}]$, 比较等式, 易见 $u = x + y$, 故选(B).

例2 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^4 + bx^3 + 2}{x^3 + x^2 - 1} = -2$, 则 a, b 的值分别为 _____.

- (A) $a = -3, b = 0$; (B) $a = 0, b = -2$;
(C) $a = -1, b = 0$; (D) $a = -1, b = -2$.

解 由公式

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & \text{当 } m = n \\ 0 & \text{当 } n < m \\ \infty & \text{当 } n > m \end{cases}$$

可知, 仅当分子分母关于 x 的最高次数相同时, 极限才是不为零的数值, 因此必须 $a = -1, b = -2$, 故选择(D).

例3 函数 $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数是 _____.

$$(A) y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4 \\ \ln x, & 4 < x < +\infty; \end{cases}$$

$$(B)y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16 \\ \ln x, & 16 < x < +\infty; \end{cases}$$

$$(C)y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4 \\ \log_2 x, & 4 < x < +\infty; \end{cases}$$

$$(D)y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 16 \\ \log_2 x, & 16 < x < +\infty. \end{cases}$$

解 由于函数表达式是分段表示的,因此一定要注意分段来求反函数,并注意到原函数与反函数的定义域与值域之间关系,故选择(D).(请读者自己分析)

例 4 当 $x \rightarrow 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个比另三个更高阶的无穷小量_____.

(A) x^2 ; (B) $1 - \cos x$;

(C) $\sqrt{1-x^2} - 1$; (D) $x - \tan x$.

解 常见的等价无穷小关系可知,当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt{1-x^2} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$,从而 $1 - \cos x$ 与 $\sqrt{1-x^2} - 1$ 是与 x^2 同阶的无穷小量,故选择(D).

例 5 下列四个极限之中,有三个极限值完全相同,试选出与众不同的极限值的代号_____.

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - \cos \frac{1}{n})$;

(B) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$;

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$;

(D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin[\ln(x+1) - \ln x]}{\ln(x+1) - \ln x}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = 1$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

令 $y = \ln(x+1) - \ln x = \ln(1 + \frac{1}{x})$, 易见为 $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$.

易见 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin[\ln(1+x) - \ln x]}{\ln(1+x) - \ln x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

从而与众不同的极限值只能来自(A), 故选择(A).

例 6 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)] =$ _____.

(A) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$;

(B) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} 2-x^2, & x < 0 \\ 2-x, & x \geq 0 \end{cases}$;

(D) $\begin{cases} 2+x^2, & x < 0 \\ 2+x, & x \geq 0 \end{cases}$.

解 由定义知

$$g[f(x)] = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0 \\ f(x)+2, & f(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0 \\ 2+x^2, & x < 0 \end{cases}$$

故选择(D).

例 7 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义, $f(x) \neq 0$ 是连续函数, $\varphi(x)$ 有间断点, 则 _____

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点; (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点;

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点;

(D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 由函数的连续性, 可以看出(A), (B) 不成立, 为此举出一个简单的反例: 设 $f(x) = 2, \varphi(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$, 易见 $f[\varphi(x)] = 2, \varphi^2(x) = 4, \varphi[f(x)] = 2$ 都无间断点, 令 $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = F(x)$, 若 $F(x)$ 是连续的, 则 $\varphi(x) = F(x)f(x)$ 必定连续, 故选择(D).

例 8 函数 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ x-2, & x > 0 \end{cases}$ 是 _____.

(A) 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加函数;

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调减少函数;

(C) 在 $(-\infty, 0)$ 单增, $(0, +\infty)$ 单减的函数;

(D) 在 $(-\infty, 0)$ 单减, $(0, +\infty)$ 单增的函数.

解 注意分段函数的单调性应分段考虑, 从而选择(D), 请读者自己分析.

例9 函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 是周期函数, 它的最小正周期是

- (A) 2π ; (B) π ;
(C) $\pi/2$; (D) $\frac{\pi}{4}$.

解 因为 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$,

所以 $|\sin(x + \pi/2)| = |\cos x|, |\cos(x + \frac{\pi}{2})| = |\sin x|$

从而 $y(x + \frac{\pi}{2}) = y(x)$, 故选择(C).

例10 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则_____.

- (A) $f(x)$ 在 $x=0$ 极限存在且连续;
(B) $f(x)$ 在 $x=0$ 极限存在但不连续;
(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限存在但不相等;
(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限不存在.

解 因为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$,

从而有 $\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$,

易见 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = 1, \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = -1$,

故选择(C).

综合题

例11 求 $y = \sqrt{\cos x} + \ln \sin x$ 的定义域.

解 由函数的定义有:

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

即 $2k\pi < x \leq 2k\pi + \pi/2$

故所求定义域为 $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$.