数字与模拟电子线路教学小丛书

放大电路的噪声分析

蒋焕文 冯锡生 编

高等教育出版社

数字与模拟电子线路教学小丛书

放大电路的噪声分析

蒋焕文　冯锡生　编

高等教育出版社

本书是数字与模拟电子线路教学小丛书中的一本。书中较系统地介绍了低噪声放大电路的分析方法。全书共分五章。第一章简单介绍噪声的分析方法；第二、三章分别介绍了放大器和电子元器件中的噪声、噪声模型、等效输入噪声和级联电路的噪声特性，并进行了分析讨论；第四章低噪声放大器的设计，重点介绍了级联放大器的噪声分析和设计方法，提供了低噪声电路的设计原则和设计举例；第五章详细而系统地介绍了噪声测量的方法。

本书可作为高等学校无线电技术、通信工程、电子学等专业师生的教学参考书或选修课教材，对从事电子线路设计的工程技术人员，也是一本有用的参考书。

本书经原高等工业学校电工教材编审委员会电子线路编审小组委托高葆新副教授主审，同意作为教学参考书出版。

责任编辑　李永和

数字与模拟电子线路教学小丛书

放大电路的噪声分析

蒋焕文　冯锡生 编

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 6.625　字数 136,000

1987年4月第1版　1987年4月第1次印刷

印数 0,001—2,800

书号 15010·0786　　定价 1.15 元

前　　言

低噪声电子学已在电声系统、测量技术、无线电和光通信、电视和图象处理、医学等领域中得到广泛应用，并且近十年来发展相当迅速。低噪声电子电路的分析和设计是低噪声电子学中的重要课题。编写这本小册子的目的，旨在扩充电子线路教材中关于低噪声放大电路的内容，供有关专业师生和从事电子电路设计的科技工作者参考。

本书共分五章，第一章首先介绍关于随机变量的某些数学概念，这有助于读者了解噪声的本质及处理方法，在此基础上介绍了在电子电路中所遇到的主要噪声的产生机理和数学描述；第二、三、四章着重介绍低噪声电路的建模和分析方法以及设计原则，通过设计举例，读者可了解到低噪声设计的某些应用领域。噪声测量与噪声的理论分析同等重要，故本书最后专设一章系统地介绍了有关噪声测量的基本原理和方法。

本书承清华大学无线电系高葆新副教授审定，并给予热情指导，在此表示衷心感谢。

限于作者水平，书中难免有不妥和错误之处，请读者不吝指正。

编者　1985年12月

于北方交通大学

目　　录

第一章　噪声的分析方法

在设计和研究放大电路时，人们往往重视它的增益、频带宽度、输入和输出阻抗等，而忽视各种内部噪声的影响。事实上，金属导体或电阻元件中自由电子的随机热运动、半导体或真空器件中载流子以电荷质点迁移的形式来传送电流等都会产生噪声。过大的噪声干扰可能降低放大电路性能指标，甚至淹没掉有用信号。因此，充分认识和克服噪声对电路的影响是十分必要的。

在电子学系统中，由元器件、电路、设备或通信信道产生的不带任何信息的不规则信号，一般称为电噪声。电噪声的来源是多方面的，它可以是大气噪声、宇宙噪声、人为噪声等外部噪声，也可能是元器件的热噪声、散粒噪声等内部噪声。这些噪声和确知信号不同，它们不可能用一个预先确定的时间函数来描述，而只是统计规律上为已知的信号。通常电噪声服从概率分布的规律，可用随机过程来描述。

目前，噪声分析常常采用这样的方法：在研究噪声源的原理、构成、性能的基础上，假定以某个随机过程的数学模型来表示噪声，并对其数学模型进行分析，比较该模型与实际噪声相符合的程度。热噪声和散粒噪声是既符合统计规律，又与表示它们的数学模型相一致的两个突出例子。

使用随机过程模型的噪声分析方法对理解噪声的本质并在电子学工程中应用这种方法有非常重要的意义。为此，在

本章中先介绍一些随机过程的知识，然后讨论与电子元器件有关的几个噪声问题。在这里，假定读者已具有一定的概率论基础知识。

§1-1 随机过程的统计特性

1-1-1 随机过程定义和数学描述

给定概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$及参数集$T\subset(-\infty, +\infty)$，如果对每一个$t\in T$，都有一个定义在此空间上的随机变量$X(t, \omega)$，那么，集$\{X(t, \omega), t\in T\}$就称为一随机过程，简称过程。简记为$\{X(t), t\in T\}$。

由上述定义可见，随机过程是参数t和样本点ω这两个参变量的函数。其中，t可以当作时间，也可以是其他形式变量；$\Omega=\{\omega\}$是样本空间。对于任一给定的t_0，就有一个随机变量$X(t_0, \omega)$与之对应，因此，随机过程可视为一个随机变量族$\{X(t), t\in T\}$，随机变量用属于集T的参数加以标记。同样，固定样本点ω_0，则有一时间的函数$X(t, \omega_0)$与之对应，这个时间的确定函数叫样本函数，这样，过程可看成样本函数族。

参数T可以是有限集也可以是无限集；可以是可数集，也可以是不可数集。当$T=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$时，$\{X(t), t\in T\}=\{X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n)\}$就是一个$n$维随机向量。当$T=(t_1, t_2, \cdots, t_n, \cdots)$时，$\{X(t), t\in T\}=\{X(t_R), R\geqslant1\}$就是一个随机变量序列或无穷维随机向量。可见，随机过程实际上是随机向量的推广。

对于任何$t\in T$，如果$X(t, \omega)$的取值是离散的，则

$\{X(t), t\in T\}$称为离散过程；如果 $X(t, \omega)$只在某个连续区间内取值，则$\{X(t, \omega), t\in T\}$称为连续过程。

在随机过程$\{X(t), t\in T\}$中，参数 T 可取的数为无穷多，$\{X(t)\}$应认为是无穷维向量。但是，在实际分析问题时，是把它限定在有限维的范围内。一般，如果一个随机过程$\{X(t), t\in T\}$的有限维分布函数已知，则认为随机过程$\{X(t), t\in T\}$在统计上完全被表征。换句话说，一个随机过程$\{X(t), t\in T\}$的概率统计性质，可以用该过程的有限维分布函数来表达。它的描述方法如下：

设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程。假设对任何 k 和任意 $t_i\in T$，能够确定多维随机变量

$$X(t_1),\ X(t_2),\ \cdots,\ X(t_k)$$

的概率分布，其联合概率分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_k; t_1, t_2, \cdots, t_k)=P\{X(t_1)\leqslant x_1, X(t_2)\leqslant x_2, \cdots, X(t_k)\leqslant X_k\} \tag{1-1}$$

叫随机过程的有限维分布函数。

在实际应用中，确定一个随机过程的任何 k 维联合分布函数是非常困难的，往往只能给出过程的一维或二维概率分布情况。有时仅能确定随机过程的数字特征。

一般要讨论的数字特征有：

(1) 数学期望。其定义为

$$E[X(t)]=\int_R X(t, \omega)\mathrm{d}F(x; t)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x; t)\mathrm{d}x=m(t) \tag{1-2}$$

其中 $f(x;t)$ 是概率密度函数。显然，期望是 t 的函数。

(2) 均方值。其定义为

$$E[X^2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x;t)\mathrm{d}x \tag{1-3}$$

(3) 方差。其定义为

$$\begin{aligned}D[X(t)]&=E[X(t)-EX(t)]^2\\&=E[X^2(t)]-[EX(t)]^2\end{aligned} \tag{1-4}$$

(4) 自相关函数。其定义为

$$\begin{aligned}R_X(t_1,\ t_2)&=E[X(t_1)X(t_2)]\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{1-5}$$

(5) 互相关函数。

对于两个随机过程 $\{X(t)\}$，$\{Y(t)\}$，定义它们的互相关系函数为

$$\begin{aligned}R_{XY}(t_1,\ t_2)&=E[X(t_1)Y(t_2)]\\&=\iint_{-\infty}^{\infty}xyf(x,\ y;t_1,\ t_2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{1-6}$$

(6) 协方差函数。

对于一个过程 $\{X(t),\ t\in T\}$，其自协方差定义为

$$\begin{aligned}&\mathrm{COV}[X(t_1),\ X(t_2)]\\&=E\{[X(t_1)-EX(t_1)][X(t_2)-EX(t_2)]\}\\&=R_X(t_1,\ t_2)-m(t_1)m(t_2)\end{aligned} \tag{1-7}$$

对于两个过程 $\{X(t),\ t\in T\}$ 和 $\{Y(t),\ t\in T\}$，其互协方差定义为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{COV}[X(t_1),\ Y(t_2)] \\
&=E\{[X(t_1)-EX(t_1)][Y(t_2)-EY(t_2)]\} \\
&=R_{XY}(t_1,\ t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2) \qquad (1\text{-}8)
\end{aligned}
$$

1-1-2 平稳随机过程

随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$称为强平稳过程，如果从 T 中任取 $t_1<t_2<\cdots<t_n$，$\tau>0$，$\{X(t_1),\ X(t_2),\ \cdots,\ X(t_n)\}$ 和 $\{X(t_1+\tau),\ X(t_2+\tau),\ \cdots,\ X(t_n+\tau)\}$具有相同的联合分布

$$
\begin{aligned}
&P[X(t_1)\leqslant a_1,\ X(t_2)\leqslant a_2,\ \cdots,\ X(t_n)\leqslant a_n] \\
&=P[X(t_1+\tau)\leqslant a_1,\ X(t_2+\tau)\leqslant a_2,\ \cdots, \\
&\qquad X(t_n+\tau)\leqslant a_n]。 \qquad (1\text{-}9)
\end{aligned}
$$

强平稳过程又叫狭义平稳过程，或叫严平稳过程，它具有以下特点：

(1) $E[X(t)]=m$，即均值是个与 t 无关的常数。

(2) 自相关函数 $R(t_1,\ t_2)=R(t_2-t_1)$，若记 $\tau=t_2-t_1$，则 $R(t_1,\ t_2)=R(\tau)$。可见，自相关函数仅依赖于 t_2-t_1 差值 τ，而与起始时间 t_1 无关。

强平稳过程的限制太严，而在实际问题中并不要求这样严的限制，只要涉及一阶、二阶矩就够了，所以对大多数问题常以较宽的条件对平稳过程定义如下。

如果过程$\{X(t),\ t\in T\}$满足：

(1) $E[X(t)]=$常数 (1-10)

(2) $E[X(t_1)X(t_2)]=R(\tau)$ (式中 $t_2-t_1=\tau$) (1-11)

则称$\{X(t),\ t\in T\}$为广义平稳过程，或弱平稳过程，又称宽平稳过程。

从定义可知，弱平稳过程只要求一阶矩和二阶矩与t无关，而没有对联合概率分布提出要求。因而，在二阶矩存在的条件下，强平稳过程就是弱平稳过程，反之则不成立。

对于平稳过程，可以证明相关函数和协方差函数具有如下性质。

自相关函数性质：

(1) $R(0)=E[X^2(t)]\geqslant 0$ (1-12)

(2) $R_X(\tau)=R_X(-\tau)$ (1-13)

(3) $|R(\tau)|\leqslant R(0)$ (1-14)

(4) 正定性：对于任意 n 和任意实数 a_j, $j=1, 2, \cdots, n$, 则有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R(t_j-t_k)a_ja_k\geqslant 0 \tag{1-15}$$

(5) 若 $R(\tau)$在 $\tau=0$ 处连续，则 $R(\tau)$处处连续。

互相关函数性质：

(1) $R_{XY}(\tau)=R_{XY}(-\tau)$ (1-16)

(2) $|R_{XY}(\tau)|\leqslant\sqrt{R_X(0)R_Y(0)}$ (1-17)

(3) $|R_{XY}(\tau)|\leqslant\frac{1}{2}[R_X(0)+R_Y(0)]$ (1-18)

自协方差函数性质：

设 $\mathrm{COV}[X(t_i),\ X(t_j)]=b_X(t_i,\ t_j)$，则有如下性质：

(1) $b_X(s,\ t)=b_X(t,\ s)$ (1-19)

(2) $b_X(s,\ t)$是正定的；

(3) $|b_X(s,\ t)|^2\leqslant b_X(s,\ s)\cdot b_X(t,\ t)$ (1-20)

(4) $b_X(s,\ t)=b_X(\tau)$，其中 $\tau=t-s$ (1-21)

这些性质从定义式及平稳过程特点出发不难证得，这里就不再赘述了。

1-1-3 高斯过程和独立增量过程

一个随机过程$\{X(t), t\in T\}$成为高斯过程(或正态过程)的条件是：对任意k和任何$t_i\in T$，随机变量$X(t_1)$，$X(t_2)$，…，$X(t_k)$有联合正态分布$N(\mathbf{m}, B)$，其中期望值向量$\mathbf{m}$的第i元素是$m_i=EX(t_i)$，协方差矩阵$\boldsymbol{B}$的第i、j元素b_{ij}为

$$b_{ij}=\mathrm{COV}[X(t_i),\ X(t_j)]=E[X(t_i)-m_i][X(t_j)-m_j] \tag{1-22}$$

如果引入由

$$\mathbf{m}=(m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_k) \tag{1-23}$$

和

$$B=(b_{ij})=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix} \tag{1-24}$$

定义的期望值向量$\mathbf{m}$和矩阵B，其中B是k阶正定对称矩阵，以$B^{-1}=(r_{ij})$表示B的逆矩阵，以$|B|$表示B的行列式的值。则正态过程的$X(t_1)$，$X(t_2)$，…，$X(t_k)$的联合分布密度函数可表征为

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}|B|^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k} r_{ij}(x_i-m_i)(x_j-m_j)\right\} \tag{1-25}$$

用矩阵符号，令C^{T}表示C的转置矩阵，则式(1-25)可改写为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k)=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}|B|^{1/2}}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mathbf{m})B^{-1}(X-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}\right\} \qquad (1\text{-}26)$$

由(1-26)式可见，正态过程完全由两个函数

$$(\boldsymbol{m}_i)=(EX(t_i)) \qquad (1\text{-}27)$$

和
$$B=(b_{ij})$$

来确定，上两式分别是期望值向量和协方差矩阵。对于平稳正态过程，期望值是常数，协方差 $b_{ij}=\mathrm{COV}[X(t_i), X(t_j)]$ 仅取决于(t_i-t_j)。

如果随机变量 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_k)$ 之间两两互不相关，即 $b_{ij}=0$，那么

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k)=\frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k}$$
$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{(x_i-m_i)^2}{\sigma_i^2}\right\}$$
$$=\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{(x_i-m_i)^2}{\sigma_i^2}\right\}$$
$$=\prod_{i=1}^{k}f(x_i; t_i) \qquad (1\text{-}28)$$

式中 $\sigma_i^2=E[X(t_i)-EX(t_i)]^2$

式(1-28)表示，如果正态过程各随机变量 $X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_k)$两两互不相关，那么，它们亦相互独立。

还可以看到，由于正态过程的分布密度函数由期望值向量和协方差矩阵所唯一确定，所以，如果正态过程是弱平稳的，则此正态过程也必定是强平稳的。

下面叙述独立增量过程。

如果 $\{X(t),\ t\in T\}$ 满足:

(1) $P[X(t_0)=0]=1$,即起始值恒为零;

(2) 对任意 $0=t<t_1<t_2<\cdots<t_n\cdots$, 增量 $X(t_1)-X(t_0)$, $X(t_2)-X(t_1)$, $\cdots$, $X(t_n)-X(t_{n-1})$, $\cdots$ 是相互独立的随机变量,则称 $\{X(t),\ t\in T\}$ 是一独立增量过程。

设 $Y_i=X(t_i)-X(t_{i-1})$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则 Y_i 的分布函数是 t_i 和 t_{i-1} 的函数,可写为 $F(y_i,\ t_i,\ t_{i-1})$,相应的特征函数和密度函数分别为 $\varphi(z,\ t_i,\ t_{i-1})$ 和 $f(y_i,\ t_i,\ t_{i-1})$。那么任一个这样的三元函数,例如 $F(y_i,\ t_i,\ t_{i-1})$ 就完全可以确定一个独立增量过程。因为这个过程的任意 n 维分布函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 总可用这种三元函数来表达。当然,并不是任意符合分布函数的 F 均可用来描述一个独立增量过程。从关系式

$$Y_i+Y_{i-1}=X(t_i)-X(t_{i-2}) \tag{1-29}$$

和 Y_i、Y_{i-1} 的独立性可知, $X(t_i)-X(t_{i-2})$ 的分布密度函数是 Y_i 和 Y_{i-1} 的密度函数的卷积; 而 $X(t_i)-X(t_{i-2})$ 的特征函数则是 Y_i 和 Y_{i-1} 的特征函数的乘积。但 $X(t_i)-X(t_{i-2})$ 的特征函数必须具有 $\varphi(z,\ t_i,\ t_{i-2})$ 的形式,这就要求用来确定独立增量过程的特征函数必须具有可分性,就是说,一个特征函数可以分解为两个同类型的特征函数之积。对于 $t\in T$, 而 T 是连续区间时,这个可分性应是无限的。

可以证明,具有独立增量的随机过程 $\{X(t),\ t\in T\}$ 可用它的一维分布[即 $X(t_i)$, $t_i\in T$ 的分布]和增量分布[即 $X(t_i)-X(t_s)$, $t_s<t_i$, t_s, $t_i\in T$ 的分布] $F(y_i,\ t_i,\ t_s)$ 在统计上完全描述清楚。