



数字与模拟电子线路教学小丛书

# 放大电路的 噪声分析

蒋焕文 冯锡生 编

高等教育出版社

数字与模拟电子线路教学小丛书

# 放大电路的噪声分析

蒋焕文 冯锡生 编

高等教育出版社

本书是数字与模拟电子线路教学小丛书中的一本。书中较系统地介绍了低噪声放大电路的分析方法。全书共分五章。第一章简单介绍噪声的分析方法；第二、三章分别介绍了放大器和电子元器件中的噪声、噪声模型、等效输入噪声和级联电路的噪声特性，并进行了分析讨论；第四章低噪声放大器的设计，重点介绍了级联放大器的噪声分析和设计方法，提供了低噪声电路的设计原则和设计举例；第五章详细而系统地介绍了噪声测量的方法。

本书可作为高等学校无线电技术、通信工程、电子学等专业师生的教学参考书或选修课教材，对从事电子线路设计的工程技术人员，也是一本有用的参考书。

本书经原高等工业学校电工教材编审委员会电子线路编审小组委托高葆新副教授主审，同意作为教学参考书出版。

责任编辑 李永和

数字与模拟电子线路教学小丛书

## 放大电路的噪声分析

蒋焕文 冯锡生 编

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 6.625 字数 136,000

1987年4月第1版 1987年4月第1次印刷

印数 0,001—2,800

书号 15010·0786 定价 1.15 元

## 前 言

低噪声电子学已在电声系统、测量技术、无线电和光通信、电视和图象处理、医学等领域中得到广泛应用，并且近十年来发展相当迅速。低噪声电子电路的分析和设计是低噪声电子学中的重要课题。编写这本小册子的目的，旨在扩充电子线路教材中关于低噪声放大电路的内容，供有关专业师生和从事电子电路设计的科技工作者参考。

本书共分五章，第一章首先介绍关于随机变量的某些数学概念，这有助于读者了解噪声的本质及处理方法，在此基础上介绍了在电子电路中所遇到的主要噪声的产生机理和数学描述；第二、三、四章着重介绍低噪声电路的建模和分析方法以及设计原则，通过设计举例，读者可了解到低噪声设计的某些应用领域。噪声测量与噪声的理论分析同等重要，故本书最后专设一章系统地介绍了有关噪声测量的基本原理和方法。

本书承清华大学无线电系高葆新副教授审定，并给予热情指导，在此表示衷心感谢。

限于作者水平，书中难免有不妥和错误之处，请读者不吝指正。

编者 1985年12月  
于北方交通大学

# 目 录

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 第一章 噪声的分析方法 .....         | 1  |
| § 1-1 随机过程的统计特性 .....     | 2  |
| 1-1-1 随机过程定义和数学描述 .....   | 2  |
| 1-1-2 平稳随机过程 .....        | 5  |
| 1-1-3 高斯过程和独立增量过程 .....   | 7  |
| 1-1-4 平稳随机过程的各态历经性 .....  | 11 |
| 1-1-5 复随机过程 .....         | 13 |
| § 1-2 随机过程的频谱特性 .....     | 14 |
| 1-2-1 周期随机过程的频谱特性 .....   | 14 |
| 1-2-2 非周期随机过程的频谱特性 .....  | 17 |
| 1-2-3 复随机过程的功率谱密度 .....   | 23 |
| § 1-3 高斯(正态)噪声 .....      | 23 |
| 1-3-1 高斯(正态)噪声 .....      | 23 |
| 1-3-2 高斯白噪声 .....         | 25 |
| 1-3-3 限带白噪声 .....         | 27 |
| § 1-4 随机信号和噪声通过线性网络 ..... | 29 |
| § 1-5 散粒噪声 .....          | 34 |
| 1-5-1 概述 .....            | 34 |
| 1-5-2 电子管中的散粒噪声 .....     | 35 |
| 1-5-3 晶体管中的散粒噪声 .....     | 42 |
| § 1-6 分配噪声 .....          | 46 |
| 1-6-1 方差定理 .....          | 47 |
| 1-6-2 电子管中的分配噪声 .....     | 47 |
| 1-6-3 双极型晶体管中的分配噪声 .....  | 49 |

|       |                            |     |
|-------|----------------------------|-----|
| § 1-7 | 热噪声 .....                  | 50  |
| § 1-8 | 噪声电路的计算 .....              | 57  |
| 1-8-1 | 噪声等效电压源和等效电流源 .....        | 58  |
| 1-8-2 | 串联电阻的噪声计算 .....            | 60  |
| 1-8-3 | 并联电阻的噪声计算 .....            | 62  |
| 1-8-4 | 电抗网络的噪声计算 .....            | 63  |
| 第二章   | 放大器的噪声 .....               | 65  |
| § 2-1 | 放大器的噪声模型和等效输入噪声 .....      | 65  |
| 2-1-1 | 放大器的噪声模型 .....             | 65  |
| 2-1-2 | 放大器的等效输入噪声 .....           | 66  |
| § 2-2 | 噪声系数和噪声量度 .....            | 69  |
| 2-2-1 | 噪声系数的定义 .....              | 69  |
| 2-2-2 | 最佳源电阻 .....                | 71  |
| 2-2-3 | 级联放大器的噪声系数 .....           | 73  |
| 2-2-4 | 噪声量度 .....                 | 76  |
| § 2-3 | 噪声温度 .....                 | 78  |
| 第三章   | 电子器件中的噪声 .....             | 82  |
| § 3-1 | 双极型晶体管的噪声 .....            | 82  |
| 3-1-1 | 双极型晶体管的噪声模型 .....          | 82  |
| 3-1-2 | 晶体管的等效输入噪声 .....           | 83  |
| 3-1-3 | 晶体管的中频段噪声系数 .....          | 85  |
| 3-1-4 | 晶体管的中频段 $E_n-I_n$ 模型 ..... | 87  |
| 3-1-5 | 晶体管的低频和高频噪声 .....          | 90  |
| 3-1-6 | 噪声系数等值线 .....              | 94  |
| § 3-2 | 场效应晶体管的噪声模型 .....          | 98  |
| 3-2-1 | 场效应晶体管的噪声模型 .....          | 98  |
| 3-2-2 | 场效应晶体管的 $E_n-I_n$ 模型 ..... | 100 |
| § 3-3 | 线性集成电路的噪声 .....            | 103 |

|            |                        |            |
|------------|------------------------|------------|
| 3-3-1      | 差分对的噪声特性 .....         | 104        |
| 3-3-2      | 恒流源中的噪声 .....          | 108        |
| 3-3-3      | 集成运算放大器的噪声 .....       | 115        |
| <b>第四章</b> | <b>低噪声放大器的设计 .....</b> | <b>120</b> |
| § 4-1      | 级联放大器的噪声分析 .....       | 120        |
| 4-1-1      | 引言 .....               | 120        |
| 4-1-2      | 级联放大器的等效输入噪声电流 .....   | 121        |
| 4-1-3      | 器件的通用噪声模型 .....        | 121        |
| 4-1-4      | 级联放大器的等效输入噪声电压 .....   | 125        |
| § 4-2      | 反馈放大器的噪声分析 .....       | 127        |
| 4-2-1      | 反馈对噪声特性的影响 .....       | 127        |
| 4-2-2      | 噪声的近似分析 .....          | 129        |
| 4-2-3      | 精确求解 .....             | 132        |
| § 4-3      | “无噪声”偏置电路 .....        | 133        |
| 4-3-1      | 由电阻产生的总噪声的计算 .....     | 133        |
| 4-3-2      | 偏置电路的噪声和“无噪声”偏置 .....  | 135        |
| § 4-4      | 低噪声级的设计考虑 .....        | 138        |
| 4-4-1      | 设计任务与方法 .....          | 138        |
| 4-4-2      | 放大器件的选择 .....          | 139        |
| 4-4-3      | 电路组态的考虑 .....          | 140        |
| 4-4-4      | 工作点的选择 .....           | 140        |
| 4-4-5      | 反馈的考虑 .....            | 141        |
| § 4-5      | 设计举例 .....             | 142        |
| 设计例 I      | ——低噪声级方案比较 .....       | 142        |
| 设计例 II     | ——光前置放大器的噪声计算 .....    | 144        |
| 设计例 III    | ——超低噪声摄像管前置放大器 .....   | 152        |
| 设计例 IV     | ——10n V 直流放大器的设计 ..... | 157        |
| <b>第五章</b> | <b>噪声测量 .....</b>      | <b>163</b> |

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| § 5-1 有关噪声测量的一般问题 .....                    | 163 |
| 5-1-1 噪声值的表示和测量 .....                      | 163 |
| 5-1-2 带宽准则 .....                           | 167 |
| 5-1-3 电压表的满度波峰因数 .....                     | 170 |
| 5-1-4 测量时间的影响 .....                        | 172 |
| § 5-2 噪声测量的基本方法 .....                      | 173 |
| 5-2-1 噪声测量——正弦波法 .....                     | 173 |
| 5-2-2 噪声测量——噪声发生器法 .....                   | 175 |
| 5-2-3 两种测量方法的比较 .....                      | 177 |
| § 5-3 测量 $E_n$ 和 $I_n$ 及 $NF$ 的正弦波法 .....  | 178 |
| 5-3-1 测量电路 .....                           | 178 |
| 5-3-2 $E_n$ 和 $I_n$ 的测量 .....              | 179 |
| 5-3-3 噪声系数的测量 .....                        | 181 |
| § 5-4 噪声系数测量——噪声发生器法 .....                 | 182 |
| 5-4-1 测量原理和基本误差 .....                      | 183 |
| 5-4-2 标准噪声源 $1/f$ 噪声的影响 .....              | 187 |
| 5-4-3 测量系统的带宽影响 .....                      | 188 |
| § 5-5 噪声带宽的测量 .....                        | 190 |
| 5-5-1 噪声带宽的测量——正弦波法 .....                  | 190 |
| 5-5-2 噪声带宽的测量——噪声发生器法 .....                | 190 |
| § 5-6 集成运算放大器噪声参数的测量 .....                 | 191 |
| 5-6-1 输入噪声电压 $E_n$ 的测量 .....               | 192 |
| 5-6-2 输入噪声电流 $I_{n-}$ 和 $I_{n+}$ 的测量 ..... | 196 |
| 参考文献 .....                                 | 202 |

## 第一章 噪声的分析方法

在设计和研究放大电路时,人们往往重视它的增益、频带宽度、输入和输出阻抗等,而忽视各种内部噪声的影响。事实上,金属导体或电阻元件中自由电子的随机热运动、半导体或真空器件中载流子以电荷质点迁移的形式来传送电流等都会产生噪声。过大的噪声干扰可能降低放大电路性能指标,甚至淹没掉有用信号。因此,充分认识和克服噪声对电路的影响是十分必要的。

在电子学系统中,由元器件、电路、设备或通信信道产生的不带任何信息的不规则信号,一般称为电噪声。电噪声的来源是多方面的,它可以是大气噪声、宇宙噪声、人为噪声等外部噪声,也可能是元器件的热噪声、散粒噪声等内部噪声。这些噪声和确知信号不同,它们不可能用一个预先确定的时间函数来描述,而只是统计规律上为已知的信号。通常电噪声服从概率分布的规律,可用随机过程来描述。

目前,噪声分析常常采用这样的方法:在研究噪声源的原理、构成、性能的基础上,假定以某个随机过程的数学模型来表示噪声,并对其数学模型进行分析,比较该模型与实际噪声相符合的程度。热噪声和散粒噪声是既符合统计规律,又与表示它们的数学模型相一致的两个突出例子。

使用随机过程模型的噪声分析方法对理解噪声的本质并在电子学工程中应用这种方法有非常重要的意义。为此,在

本章中先介绍一些随机过程的知识, 然后讨论与电子元器件有关的几个噪声问题。在这里, 假定读者已具有一定的概率论基础知识。

## § 1-1 随机过程的统计特性

### 1-1-1 随机过程定义和数学描述

给定概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  及参数集  $T \subset (-\infty, +\infty)$ , 如果对每一个  $t \in T$ , 都有一个定义在此空间上的随机变量  $X(t, \omega)$ , 那么, 集  $\{X(t, \omega), t \in T\}$  就称为一随机过程, 简称过程。简记为  $\{X(t), t \in T\}$ 。

由上述定义可见, 随机过程是参数  $t$  和样本点  $\omega$  这两个参变量的函数。其中,  $t$  可以当作时间, 也可以是其他形式变量;  $\Omega = \{\omega\}$  是样本空间。对于任一给定的  $t_0$ , 就有一个随机变量  $X(t_0, \omega)$  与之对应, 因此, 随机过程可视为一个随机变量族  $\{X(t), t \in T\}$ , 随机变量用属于集  $T$  的参数加以标记。同样, 固定样本点  $\omega_0$ , 则有一时间的函数  $X(t, \omega_0)$  与之对应, 这个时间的确定函数叫样本函数, 这样, 过程可看成样本函数族。

参数  $T$  可以是有限集也可以是无限集; 可以是可数集, 也可以是不可数集。当  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  时,  $\{X(t), t \in T\} = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$  就是一个  $n$  维随机向量。当  $T = (t_1, t_2, \dots, t_n, \dots)$  时,  $\{X(t), t \in T\} = \{X(t_R), R \geq 1\}$  就是一个随机变量序列或无穷维随机向量。可见, 随机过程实际上是随机向量的推广。

对于任何  $t \in T$ , 如果  $X(t, \omega)$  的取值是离散的, 则

$\{X(t), t \in T\}$ 称为离散过程；如果  $X(t, \omega)$  只在某个连续区间内取值, 则  $\{X(t, \omega), t \in T\}$  称为连续过程。

在随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  中, 参数  $T$  可取的数为无穷多,  $\{X(t)\}$  应认为是无穷维向量。但是, 在实际分析问题时, 是把它限定在有限维的范围内。一般, 如果一个随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  的有限维分布函数已知, 则认为随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  在统计上完全被表征。换句话说, 一个随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  的概率统计性质, 可以用该过程的有限维分布函数来表达。它的描述方法如下:

设  $\{X(t), t \in T\}$  是一随机过程。假设对任何  $k$  和任意  $t_i \in T$ , 能够确定多维随机变量

$$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$$

的概率分布, 其联合概率分布函数

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k) &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \\ &\leq x_2, \dots, X(t_k) \leq x_k\} \end{aligned} \quad (1-1)$$

叫随机过程的有限维分布函数。

在实际应用中, 确定一个随机过程的任何  $k$  维联合分布函数是非常困难的, 往往只能给出过程的一维或二维概率分布情况。有时仅能确定随机过程的数字特征。

一般要讨论的数字特征有:

(1) 数学期望。其定义为

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_R X(t, \omega) dF(x; t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t) dx = m(t) \end{aligned} \quad (1-2)$$

其中  $f(x; t)$  是概率密度函数。显然, 期望是  $t$  的函数。

(2) 均方值。其定义为

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x; t) dx \quad (1-3)$$

(3) 方差。其定义为

$$\begin{aligned} D[X(t)] &= E[X(t) - EX(t)]^2 \\ &= E[X^2(t)] - [EX(t)]^2 \end{aligned} \quad (1-4)$$

(4) 自相关函数。其定义为

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (1-5)$$

(5) 互相关函数。

对于两个随机过程  $\{X(t)\}$ ,  $\{Y(t)\}$ , 定义它们的互相关系数函数为

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y; t_1, t_2) dx dy \end{aligned} \quad (1-6)$$

(6) 协方差函数。

对于一个过程  $\{X(t), t \in T\}$ , 其自协方差定义为

$$\begin{aligned} \text{COV}[X(t_1), X(t_2)] &= E\{[X(t_1) - EX(t_1)][X(t_2) - EX(t_2)]\} \\ &= R_X(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2) \end{aligned} \quad (1-7)$$

对于两个过程  $\{X(t), t \in T\}$  和  $\{Y(t), t \in T\}$ , 其互协方差定义为

$$\text{COV}[X(t_1), Y(t_2)]$$

$$\begin{aligned} &= E\{[X(t_1) - EX(t_1)][Y(t_2) - EY(t_2)]\} \\ &= R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2) \end{aligned} \quad (1-8)$$

### 1-1-2 平稳随机过程

随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 称为强平稳过程, 如果从 $T$ 中任取 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $\tau > 0$ ,  $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$ 和 $\{X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_n + \tau)\}$ 具有相同的联合分布

$$\begin{aligned} &P[X(t_1) \leq a_1, X(t_2) \leq a_2, \dots, X(t_n) \leq a_n] \\ &= P[X(t_1 + \tau) \leq a_1, X(t_2 + \tau) \leq a_2, \dots, \\ &\quad X(t_n + \tau) \leq a_n]。 \end{aligned} \quad (1-9)$$

强平稳过程又叫狭义平稳过程, 或叫严平稳过程, 它具有以下特点:

(1)  $E[X(t)] = m$ , 即均值是个与 $t$ 无关的常数。

(2) 自相关函数 $R(t_1, t_2) = R(t_2 - t_1)$ , 若记 $\tau = t_2 - t_1$ , 则 $R(t_1, t_2) = R(\tau)$ 。可见, 自相关函数仅依赖于 $t_2 - t_1$ 差值 $\tau$ , 而与起始时间 $t_1$ 无关。

强平稳过程的限制太严, 而在实际问题中并不要求这样严的限制, 只要涉及一阶、二阶矩就够了, 所以对大多数问题常以较宽的条件对平稳过程定义如下。

如果过程 $\{X(t), t \in T\}$ 满足:

$$(1) E[X(t)] = \text{常数} \quad (1-10)$$

$$(2) E[X(t_1)X(t_2)] = R(\tau) \quad (\text{式中 } t_2 - t_1 = \tau) \quad (1-11)$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为广义平稳过程, 或弱平稳过程, 又称宽平稳过程。

从定义可知, 弱平稳过程只要求一阶矩和二阶矩与  $t$  无关, 而没有对联合概率分布提出要求。因而, 在二阶矩存在的条件下, 强平稳过程就是弱平稳过程, 反之则不成立。

对于平稳过程, 可以证明相关函数和协方差函数具有如下性质。

自相关函数性质:

$$(1) R(0) = E[X^2(t)] \geq 0 \quad (1-12)$$

$$(2) R_X(\tau) = R_X(-\tau) \quad (1-13)$$

$$(3) |R(\tau)| \leq R(0) \quad (1-14)$$

(4) 正定性: 对于任意  $n$  和任意实数  $a_j, j=1, 2, \dots, n$ , 则有

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R(t_j - t_k) a_j a_k \geq 0 \quad (1-15)$$

(5) 若  $R(\tau)$  在  $\tau=0$  处连续, 则  $R(\tau)$  处处连续。

互相关函数性质:

$$(1) R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (1-16)$$

$$(2) |R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_X(0)R_Y(0)} \quad (1-17)$$

$$(3) |R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_X(0) + R_Y(0)] \quad (1-18)$$

自协方差函数性质:

设  $\text{COV}[X(t_i), X(t_j)] = b_X(t_i, t_j)$ , 则有如下性质:

$$(1) b_X(s, t) = b_X(t, s) \quad (1-19)$$

(2)  $b_X(s, t)$  是正定的;

$$(3) |b_X(s, t)|^2 \leq b_X(s, s) \cdot b_X(t, t) \quad (1-20)$$

$$(4) b_X(s, t) = b_X(\tau), \text{ 其中 } \tau = t - s \quad (1-21)$$

这些性质从定义式及平稳过程特点出发不难证得，这里就不再赘述了。

### 1-1-3 高斯过程和独立增量过程

一个随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  成为高斯过程(或正态过程)的条件是: 对任意  $k$  和任何  $t_i \in T$ , 随机变量  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$  有联合正态分布  $N(\mathbf{m}, B)$ , 其中期望值向量  $\mathbf{m}$  的第  $i$  元素是  $m_i = EX(t_i)$ , 协方差矩阵  $B$  的第  $i, j$  元素  $b_{ij}$  为

$$b_{ij} = \text{COV}[X(t_i), X(t_j)] = E[X(t_i) - m_i][X(t_j) - m_j] \quad (1-22)$$

如果引入由

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k) \quad (1-23)$$

和

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

定义的期望值向量  $\mathbf{m}$  和矩阵  $B$ , 其中  $B$  是  $k$  阶正定对称矩阵, 以  $B^{-1} = (r_{ij})$  表示  $B$  的逆矩阵, 以  $|B|$  表示  $B$  的行列式的值。则正态过程的  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$  的联合分布密度函数可表征为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |B|^{1/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k r_{ij} (x_i - m_i) (x_j - m_j) \right\} \quad (1-25)$$

用矩阵符号, 令  $Q^T$  表示  $Q$  的转置矩阵, 则式(1-25)可改写为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |B|^{1/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(X - \mathbf{m})B^{-1}(X - \mathbf{m})^T\right\} \quad (1-26)$$

由(1-26)式可见, 正态过程完全由两个函数

$$(\mathbf{m}_i) = (EX(t_i)) \quad (1-27)$$

和

$$B = (b_{ij})$$

来确定, 上两式分别是期望值向量和协方差矩阵。对于平稳正态过程, 期望值是常数, 协方差  $b_{ij} = \text{COV}[X(t_i), X(t_j)]$  仅取决于  $(t_i - t_j)$ 。

如果随机变量  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$  之间两两互不相关, 即  $b_{ij} = 0$ , 那么

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right\} \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}\right\} \\ &= \prod_{i=1}^k f(x_i, t_i) \end{aligned} \quad (1-28)$$

式中  $\sigma_i^2 = E[X(t_i) - EX(t_i)]^2$

式(1-28)表示, 如果正态过程各随机变量  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$  两两互不相关, 那么, 它们亦相互独立。

还可以看到, 由于正态过程的分布密度函数由期望值向量和协方差矩阵所唯一确定, 所以, 如果正态过程是弱平稳的, 则此正态过程也必定是强平稳的。

下面叙述独立增量过程。

如果  $\{X(t), t \in T\}$  满足:

(1)  $P[X(t_0)=0]=1$ , 即起始值恒为零;

(2) 对任意  $0=t < t_1 < t_2 < \dots < t_n \dots$ , 增量  $X(t_1) - X(t_0)$ ,  $X(t_2) - X(t_1)$ ,  $\dots$ ,  $X(t_n) - X(t_{n-1})$ ,  $\dots$  是相互独立的随机变量, 则称  $\{X(t), t \in T\}$  是一独立增量过程。

设  $Y_i = X(t_i) - X(t_{i-1})$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , 则  $Y_i$  的分布函数是  $t_i$  和  $t_{i-1}$  的函数, 可写为  $F(y_i, t_i, t_{i-1})$ , 相应的特征函数和密度函数分别为  $\varphi(z, t_i, t_{i-1})$  和  $f(y_i, t_i, t_{i-1})$ 。那么任一个这样的三元函数, 例如  $F(y_i, t_i, t_{i-1})$  就完全可以确定一个独立增量过程。因为这个过程的任意  $n$  维分布函数  $F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$  总可用这种三元函数来表达。当然, 并不是任意符合分布函数的  $F$  均可用来描述一个独立增量过程。从关系式

$$Y_i + Y_{i-1} = X(t_i) - X(t_{i-2}) \quad (1-29)$$

和  $Y_i, Y_{i-1}$  的独立性可知,  $X(t_i) - X(t_{i-2})$  的分布密度函数是  $Y_i$  和  $Y_{i-1}$  的密度函数的卷积; 而  $X(t_i) - X(t_{i-2})$  的特征函数则是  $Y_i$  和  $Y_{i-1}$  的特征函数的乘积。但  $X(t_i) - X(t_{i-2})$  的特征函数必须具有  $\varphi(z, t_i, t_{i-2})$  的形式, 这就要求用来确定独立增量过程的特征函数必须具有可分性, 就是说, 一个特征函数可以分解为两个同类型的特征函数之积。对于  $t \in T$ , 而  $T$  是连续区间时, 这个可分性应是无限的。

可以证明, 具有独立增量的随机过程  $\{X(t), t \in T\}$  可用它的一维分布 [即  $X(t_i), t_i \in T$  的分布] 和增量分布 [即  $X(t_i) - X(t_s), t_s < t_i, t_s, t_i \in T$  的分布]  $F(y_i, t_i, t_s)$  在统计上完全描述清楚。