$$X=(I-A)^{-1}Y$$

投入产出核算及应用

中国统计出版社

（京）新登字041号

投入产出核算及应用

TOURU CHANCHU HESUAN JI YINGYONG

廖明球　主　编

李德涵　副主编

*

中国统计出版社出版

（北京三里河月坛南街38号 100826）

湖南省统计局机关印刷厂印刷

850×1168毫米　32开本　8.125印张　21万字

1992年6月第1版　1992年6月长沙第1次印刷

印数：1—4000

ISBN 7—5037—0731—3/C·444

定价：8.20元

前　　言

投入产出核算是国民经济核算体系的一个重要组成部分，它无论对宏观管理还是微观管理都有着重要作用。

近年来，我国研究和应用投入产出核算者愈来愈多，无论是在理论方面还是在实践方面都有长足进步。在同行们的影响下，我们将十余年从事投入产出工作、学习所得编写成这本小册子，曾作为向基层单位的培训教材试用，现奉献给读者，以推动投入产出核算与应用。

参加本书编写的有：第一章：周春雷；第二章：廖明球；第三章一、二节：龚元珍，三节：廖明球；第四章：唐双全；第五章：伍孝志；第六章：陈雪春；第七章：周春雷；第八章：廖明球。全书由廖明球任主编、李德涵任副主编，负责统编定稿。

本书的出版，得到了湖南省统计局领导和国家统计局有关方面的大力支持，这里一并致谢。

编　者

1992 年 4 月

目　　录

第一章　投入产出分析的数学基础

投入产出分析，是经济学和数学相互渗透的产物，是以产品部门为结构单位的经济网络系统理论体系。为了比较完整、准确地描述国民经济各部门投入与产出网络系统，应当用经济系统化、模型化和数量化的理论，深入研究它们之间内在的数量关系。用系统工程理论和数学方法解决经济问题，有助于推动计划统计工作走向科学化。

初学投入产出分析的同志，要达到能够较好地设计和运用投入产出经济数学模型，首先应该掌握有关的工程数学理论，其重点是线性代数：行列式和矩阵。我们的目的是利用工程数学理论解决经济问题，故只要了解行列式和矩阵的概念、性质、运用方法就够了。对于有这一数学基础的同志，则可跳过本章，直接阅读后面各章。

第一节　行列式

在人们的实践活动中，无论是自然界还是社会界，一些变量之间的关系总可以直接或近似地表现为线性函数关系。故在经济领域，线性函数是一个非常重要，十分有用的问题。所谓线性代数主要是研究线性函数关系的一门学科，在线性代数中，线性方程组是最基础最重要的部分，而行列式是解大型线性方程组的重要工具。

一、行列式的概念

(一)一元一次方程

什么是方程？我们先看一个式子

$x-2=3$

这是一个等式，在这个式子中，2、3 是已知数，即等式中已给定的数，x 是未知数，需要根据与等式里已知数之间的关系来确定数值的数。

象这样含有未知数的等式，就叫方程，如

$3y=2$，$x^2=36$，$2x+y=16$ 都是方程，能满足等式方程成立的未知数的值就叫做方程的解，对于上述四个方程，它们的解分别是：

$$x=5,\ y=2/3,\ x=\pm6,\ \begin{cases}x=5,\ 2\cdots\\ y=6,\ 12\cdots\end{cases}$$

方程式中只含有一个未知数的称为一元方程，未知数的乘方次数为一次的称为一次方程，两者结合起来，就是

$x-2=3$　　一元一次方程

$3y=2$　　一元一次方程

$x^2=36$　　一元二次方程

$2x+y=16$　　二元一次方程

在投入产出分析中，只研究一次方程。对于一次方程，也可称为线性方程。

(二)二元一次方程组与二阶行列式

我们已看到的 $2x+y=16$ 是一个二元一次方程，它的解有无穷多个，即是不确定的。为解决实际问题，使它们有确定的解，二元一次方程经常成组出现，如

$$\begin{cases}2x+y=16\\ x-2y=3\end{cases}\qquad\begin{cases}x+y=12\\ 3x-y=8\end{cases}$$

象这样由含有两个相同未知数的两个二元一次方程叫做二元一次方程组，这两个方程组分别有唯一的解：

$$\begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=5 \\ y=7 \end{cases}$$

现在我们来看第一个方程组是怎样求解的。

$$\begin{cases} 2x+y=16 & (1) \\ x-2y=3 & (2) \end{cases}$$

用消元法求解：

(1)－(2)×2　有

$5y=10 \qquad y=2$

(2)＋(1)×2　有

$5x=35 \qquad x=7$

还可以列举出各种其它解法，为了研究二元一次方程组解的一般特点和规律，把二元一次方程组通常写成如下形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=c_1 & (3) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=c_2 & (4) \end{cases}$$

x_1，x_2 是未知数，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}，分别是 x_1，x_2 的系数。a_{11} 表示为第 1 个方程第 1 个变量 x_1 的系数，其它类似。c_1，c_2 是常数，如方程组(1)，(2)中，$x_1=x$，$x_2=y$，$a_{11}=2$，$a_{12}=1$，$a_{21}=1$，$a_{22}=-2$，$c_1=16$，$c_2=3$，对一般形式(3)，(4)求解。

由(3)×a_{22}－(4)×a_{12}　有

$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=c_1a_{22}-c_2a_{12}$

由(4)×a_{11}－(3)×a_{21}　有

$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=c_2a_{11}-c_1a_{21}$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时

方程组(3)，(4)有唯一解

$$x_1=(c_1a_{22}-c_2a_{12})/(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \qquad (5)$$

$$x_2=(c_2a_{11}-c_1a_{21})/(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \qquad (6)$$

用上述方法可以解象这样的简单线性方程组，但比较繁杂而且不易记忆，为此，引进行列式概念。

定义 1　　二阶行列式

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}=c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}$$

行列式$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$的横向叫行，纵向叫列，其中的数 c_{11}，c_{12}，c_{21}，c_{22}叫做行列式的元素，元素 c_{ij}的右下边 i 表示 c_{ij}所在行数，j 表示 c_{ij}所在列数，c_{12}就是第 1 行第 2 列交点的元素，该行列式含有二行二列，故称为二阶行列式。

由定义 1 可知，行列式表示一个数，其值等于主对角上的元素之积减去次对角线上的元素之积。

根据定义 1，(5)，(6)中的分子可以分别写成

$$c_1a_{22}-c_2a_{12}=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$c_2a_{11}-c_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{12} & c_2 \end{vmatrix}$$

分母相同，均为

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

若令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

由 D 中可以看到，行列式 D 各元素是未知数 x_1、x_2 的系数项，系数位置与方程组位置相对应，称为方程组的系数行列式。

$D_1=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 是以常数项代替 x_1 的系数项所在列。

$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$ 是以常数项代替 x_2 的系数项所在列。

这样一来，(5)、(6)式可以分别表示为：

$x_1=D_1/D \qquad x_2=D_2/D \qquad\qquad (7)$

于是有定理 1

当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(3)、(4)有唯一解，且其解为(7)

根据定理 1 解二元一次线性方程组就简单且便于记忆了。

例 1　用行列式解方程组(1)(2)

$$\begin{cases} 2x+y=16 \\ x-2y=3 \end{cases}$$

解：$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2\times(-2)-1\times 1=-5\neq 0$

所以方程组有解

$D_1=\begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=16\times(-2)-1\times 3=-35$

$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\times 3-1\times 16=-10$

$x_1=D_1/D=-35/-5=7$

$x_2=D_2/D=-10/-5=2$

即方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1=7 \\ x_2=2 \end{cases}$$

(三)三元一次线性方程组与三阶行列式

由含有三个相同未知数的三个一次方程组成的方程组叫做三元一次方程组，方程组所包括的方程，不一定全是三元一次方程，也可能是二元一次的，或一元一次的，如

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1\\x_1-5x_2+3x_3=2\\x_1-x_2+x_3=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1+x_3=6\\x_1+x_2=5\\\qquad x_3=7\end{cases}$$

均是三元一次线性方程组

三元一次线性方程组的一般表达式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=c_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=c_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=c_3\end{cases}\qquad(8)$$

三个未知数为 x_1，x_2，x_3，三个常数项为 c_1，c_2，c_3，系数 a_{ij}，$i=1,2,3$，$j=1,2,3$，表示为第 i 方程第 j 个未知数 x_j 的系数项。

解三元一次方程组，通常也是用消元法来求解的，这里同样的研究用行列式来求解的方法，为此，先引进三阶行列式的概念。

定义 2　三阶行列式

$$\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{vmatrix}=c_{11}c_{22}c_{33}+c_{12}c_{23}c_{31}+c_{13}c_{32}c_{21}$$
$$-c_{31}c_{22}c_{13}-c_{32}c_{23}c_{11}-c_{33}c_{21}c_{12}$$

该式含有三行三列，所以叫做三阶行列式，是 6 个项(三个系数乘积)的代数和。

它的计算法则是：把三阶行列式的第 1、2 列重写于右侧，这

样三阶行列式所代表的六项代数和就由表中六条对角线来表示，其中实对角线上三个数之积取正号，虚对角线上三个数之积取负号。

$$\left|\begin{array}{ccc:cc} (+) & (+) & (+) & & \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{31} & c_{32} \\ (-) & (-) & (-) & & \end{array}\right.$$

例 2　　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解：
$$\left|\begin{array}{ccc:cc} 2 & -4 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

$=2\times(-5)\times1+(-4)\times3\times1+1\times1\times(-1)-1\times(-5)$

$\times1-2\times3\times(-1)-(-4)\times1\times1$

$=(-10)+(-12)+(-1)-(-5)-(-6)-(-4)$

$=-8$

所以该行列式的值等于-8

方程组(8)的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

以常数项代替 D 中第 1 列：

$$D_1=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

以常数项代替 D 中第 2 列

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

以常数项代替 D 中第 3 列

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

于是我们有以下结论

定理 2，当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(8)有唯一解且其解为

$$\begin{aligned} x_1&=D_1/D \\ x_2&=D_2/D \qquad \cdots\cdots(1\cdot 1\cdot 1) \\ x_3&=D_3/D \end{aligned}$$

有了定理 2，解三元一次方程组就容易了。

例 3　　解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1 \\ x_1-5x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$$

解：系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$$

所以，该方程组有唯一解，由

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=9$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=6$$

得到其解为

$$x_1=D_1/D=-\frac{11}{8}$$

$$x_2=D_2/D=-\frac{9}{8}$$

$$x_3=D_3/D=-\frac{3}{4}$$

(四)行列式的余子式

把行列式中某个元素所在的行和列划去，剩下的所有元素组成的行列式叫做该元素的余子式，这是简化行列式的有效方法，有着重要的用途。

例如：行列式 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 中

a_{11}的余子式 $M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

a_{21}的余子式 $M_{21}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

a_{23}的余子式 $M_{23}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$

因行列式中的元素 a_{ij} 右下标 i 表示 a_{ij} 所在行数，j 表示 a_{ij} 所在的列数，则 a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得到的新式子，叫做这个元素的代数余子式，用 A_{ij} 表示。

如三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中的元素

a_{11} 的代数余子式记为

$A_{11}=(-1)^{1+1}\quad M_{11}=M_{11}$

a_{21} 的代数余子式记为

$A_{21}=(-1)^{2+1}\quad M_{21}=-M_{21}$

a_{23} 的代数余子式记为

$A_{23}=(-1)^{2+3}\quad M_{23}=-M_{23}$

结论(1)：三阶行列式的值等于任何一行或任何一列中各元素与它们的代数余子式乘积的和。

例 4　计算三阶行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

解：设该行列式为 D

1)按三阶行列式的定义计算

$D=-41$

2)按第一行展开

$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$=1\times(-4+6)+(-1)\times(-1)(-2-9)+2\times(-4-12)$

$=2-11-32=-41$

3)按第二列展开，则有

$$D=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}$$

$$=(-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & -1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{vmatrix}$$

$$+(-2)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)(-2-9)+4\times(-1-6)+(-2)(-1)(3-4)$$

$$=-11-28-2=-41$$

结论(2) 三阶行列式的某一行或某一列中各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和为0。

还是看例4

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}$$

$$=1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\-2 & -1\end{vmatrix}+(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{vmatrix}$$

$$+2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\3 & -2\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)(1+4)+(-1)(-1-6)+2\times(-1)(-2+3)$$

$$=-5+7-2=0$$

从上述例子可以看出，这两个结论有助于计算，把三阶行列式转化为二阶行列式。

(五)n元一次方程组与n阶行列式

对于二元、三元一次方程组，当系数行列式不等于0时，可以很简单地表示出方程组的解，当然用消元法求解二元一次方程组是很容易的事，但是对于三元以上的线性方程组，消去未知数就比较麻烦，因此，我们接着讨论如何用行列式来求解一般的n元线性方程组。设含有n个未知数的线性方程组一般形式如下：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=c_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=c_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=c_n
\end{cases} \qquad (9)
$$

引入 n 阶行列式的定义

定义 3，由 n^2 个数按行列排列成 n 行 n 列组成的式子

$$
\begin{vmatrix}
c_{11} & c_{12}\cdots\cdots c_{1n} \\
c_{21} & c_{22}\cdots\cdots c_{2n} \\
\vdots & \\
c_{n1} & c_{n2}\cdots\cdots c_{nn}
\end{vmatrix}
$$

称为 n 阶行列式，严格的定义见高等代数教材。

对于方程组(9)则有系数行列式

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\
\vdots & \\
a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

(克莱姆法则)定理 3　　线性方程组(9)，如果它的系数行列式 D 不等于 0，那么它有唯一的解，且其解的形式为

$$
\begin{aligned}
&x_1=D_1/D \\
&x_2=D_2/D \\
&x_i=D_i/D \qquad \cdots\cdots(1\cdot1\cdot2) \\
&\vdots \\
&x_n=D_n/D
\end{aligned}
$$

D_1 是把行列式 D 的第 1 列换成常数项 c_1、$c_2\cdots\cdots c_n$ 得到的行列式，D_i 是把行列式 D 的第 i 列换成 $c_1\cdots\cdots c_n$ 得到的行列式。

克莱姆定理的优点是用方程的系数与常数项组成的行列式明显地表达出方程组的解，对我们分析、解决实际问题十分方便。但是 n 阶行列式又该如何具体计算呢？这就需要了解 n 阶行列式的