教育部高职高专规划教材

经济应用数学——
概率论与数理统计

田应辉　阳　妮　冷志魁　编

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学——概率论与数理统计/田应辉等编.
—北京：高等教育出版社，2002.7

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-04-010830-5

Ⅰ.经… Ⅱ.田… Ⅲ.①经济数学-高等学校：技术学校-教材②概率论-高等学校：技术学校-教材③数理统计-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 016937 号

经济应用数学——概率论与数理统计
田应辉 阳妮 冷志魁 编

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京铭成印刷有限公司

开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2002 年 7 月第 1 版
印　　张	6.875	**印　　次**	2002 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	160 000	**定　　价**	9.10 元

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分. 改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材. 但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要. 为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》)，通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”.

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成. 出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程. 计划先用2~3年的时间，在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2~3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专教育教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的，

适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2000年4月3日

前　言

相对于本科教育的教材建设来说，高职高专教育的教材建设还很落后，从整体上看，缺乏具有高职高专教育特色的教材．为适应高职高专教育的发展需要，急需编写适用的、有特色的教材．本教材正是针对这一需要编写的．

本书是教育部高职高专规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》中对概率论与数理统计的教学要求编写的，可作为高职高专经济类与管理类专业的教材．全书共分七章，前三章为概率论，后四章为数理统计．本书力求体现高职高专教育的特色，理论以必需、够用为度，突出实用性，许多概念、定理尽量采用高职高专学生容易理解的方式叙述，并结合财经类专业的特点，选用了一定数量的经济应用方面的实例．

本书第一、二章由田应辉编写，第三、四、七章由冷志魁编写，第五、六章由阳妮编写．全书由田应辉统稿．

本书承蒙华中师范大学数学系教授赵东方在百忙中对初稿进行审阅，高等教育出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤劳动，在此表示衷心感谢．

限于编者水平，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正．

编者

2001 年 10 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

第1节　随 机 事 件

一、随机事件的概念

在现实世界中，存在着两类性质不同的现象：一类是确定性现象，即在一定条件下，必然会出现某一结果，例如，纯水在一个大气压下加热到100℃必然沸腾；另一类是随机现象，即在一定条件下，可能出现的结果不止一个，且预先无法确定出现哪个结果，例如，抛一枚硬币，可能正面向上，也可能反面向上，且抛之前不能确定哪面向上．概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的一个数学分支．因为随机现象普遍存在，所以概率论与数理统计应用十分广泛．

要研究随机现象，就要对它进行观察或试验，这个过程称为随机试验．例如，抛一枚硬币并观察哪面向上的过程，抽查产品看其是否合格的过程，都是随机试验．随机试验具有下列三个特点：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是已知，并且不止一个；

（3）每次试验总出现这些可能结果中的一个，但试验之前不能确定出现哪个结果．

随机试验的每个可能结果称为一个基本事件或样本点．全体基本事件的集合称为样本空间，记作 Ω．

例1　在抛硬币的试验中，如果用 ω_1 表示“正面向上”这一结果，用 ω_2 表示“反面向上”这一结果，则这个随机试验的

样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}.$$

例 2 一袋中有 10 个外形相同的球，分别标有号码 1，2，…，10，从袋中任取一球，用 ω_i 表示“取得第 i 号球”（$i = 1, 2, \cdots, 10$），则这个试验的样本空间为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\}.$$

例 3 抽取某种电子元件作寿命试验，用 t 表示“电子元件的寿命为 t 小时”，则这一试验的样本空间为 $\Omega = (0, +\infty)$.

在随机试验中，通常除关心基本事件的出现情况外，还关心一些更复杂的事件的出现情况．例如，在例 2 中，除关心取得哪号球外，我们可能还关心“取得的球的号码为奇数”这一事件是否出现(或发生)．如果我们用 A 来表示这一事件，那么，当且仅当取得的球的号码为 1，3，5，7，9 之一时，A 出现．即当且仅当基本事件 ω_1，ω_3，ω_5，ω_7，ω_9 之一出现时，A 出现．于是，我们可以将 A 表示为

$$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9\},$$

并且当且仅当 A 包含的某个基本事件出现时，A 出现．

定义 1 样本空间 Ω 的某个子集称为一个随机事件，简称事件．通常用大写英文字母表示随机事件．对于随机事件 A，当且仅当 A 包含的某个基本事件出现时，称 A 出现(或发生)．

我们把基本事件 ω 与事件 $\{\omega\}$ 等同看待．这样，基本事件也是随机事件．空集 $\varnothing$ 作为样本空间 Ω 的特殊子集，也是一个事件，它在每次试验中都不会发生，称之为不可能事件．Ω 本身也是 Ω 的子集，故也是一个事件，它在每次试验中都发生，称之为必然事件．

二、事件间的关系与运算

由于事件被定义为样本空间的子集，因此，事件间的关系与运算实际上就是集合间的关系与运算，但我们必须学会用概率论的语言来描述它们．

1. 事件的包含　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的每个样本点都在 B 中，则称 A 包含于 B，或 B 包含 A，记作 $A \subseteq B$.

2. 事件的相等　如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，即 A 与 B 包含完全相同的样本点，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A = B$.

3. 事件的和　"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"这一事件称为 A 与 B 的和，记作 $A + B$. $A + B$ 是由事件 A 与事件 B 的所有样本点构成的集合.

类似地，"事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生"这一事件称为 A_1，A_2，…，A_n 的和，记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

4. 事件的积　"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件称为 A 与 B 的积，记作 AB. AB 是由事件 A 与 B 的所有公共样本点构成的集合.

类似地，"事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生"这一事件称为 A_1，A_2，…，A_n 的积，记作 $A_1A_2\cdots A_n$.

5. 事件的差　"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为 A 与 B 的差，记作 $A - B$. $A - B$ 是由属于事件 A 但不属于事件 B 的那些样本点构成的集合.

6. 互不相容事件　如果事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容.

如果事件 A_1，A_2，…，A_n 中任意两个都互不相容. 则称它们两两互不相容.

7. 逆事件　设 A 是一个事件，称事件 $\Omega - A$ 为 A 的逆事件，记作 $\bar{A}$，即 $\bar{A} = \Omega - A$. 显然，事件 A 与它的逆事件 $\bar{A}$ 满足

$$A + \bar{A} = \Omega, \quad A\bar{A} = \varnothing.$$

8. 完备事件组　如果事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，且 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$，则称 A_1，A_2，…，A_n 构成一个完备事件组.

上述事件的关系及运算可以用直观示意图来表示，见图 1 - 1.

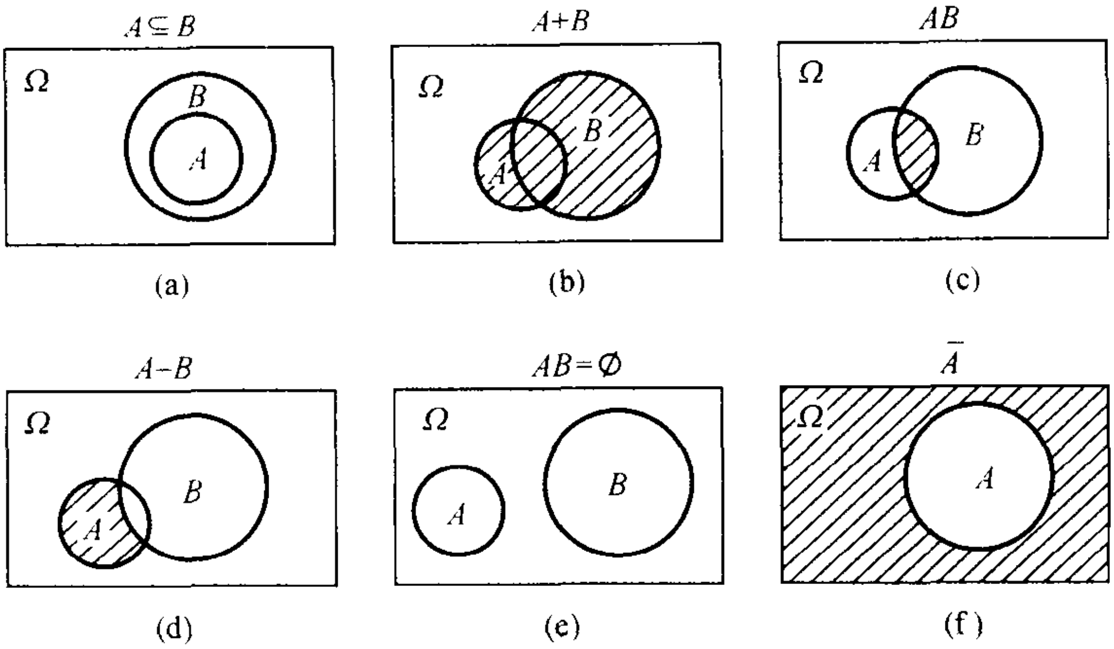

图 1－1

可以证明，事件的运算满足下列运算规律：

(1) 交换律　$A+B=B+A$，$AB=BA$；

(2) 结合律　$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律　$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$；

(4) 摩根律　$\overline{A+B}=\bar{A}\,\bar{B}$，$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$；

(5) $A-B=A\bar{B}$，$\bar{\bar{A}}=A$.

例 4　设 A，B，C 是三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

(1) A，B 发生，但 C 不发生；

(2) A，B，C 至少有一个发生；

(3) A，B，C 至少有两个发生；

(4) A，B，C 恰有一个发生；

(5) A，B，C 恰有两个发生；

(6) A，B，C 都不发生．

解 (1) $AB\overline{C}$;

(2) $A+B+C$;

(3) $AB+AC+BC$;

(4) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$;

(5) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 5 设 A_1 表示“第一次射击射中靶子”，A_2 表示“第二次射击射中靶子”，A_3 表示“第三次射击射中靶子”.

(1) 试用语言表述下列事件：

$\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$，$\overline{A_1+A_2}$，$A_1A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2A_3$；

(2) 用 A_1，A_2，A_3 表示下列事件：“三次射击中最多有一次射中靶子”，“三次射击中第一次不中而后两次中至少有一次射中”.

解 (1) $\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$ 表示“三次射击中至少有一次没有射中靶子”，$\overline{A_1+A_2}$ 表示“前两次射击都没射中靶子”，$A_1A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2A_3$ 表示“三次射击中恰好接连两次射中靶子”；

(2) 事件“三次射击中最多有一次射中靶子”可表为 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 或 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，事件“三次射击中第一次不中而后两次中至少有一次射中”可表为 $\overline{A_1}(A_2+A_3)$.

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间及下列事件的集合表示：

(1) 掷一颗骰子，出现奇数点；

(2) 从 0，1，2 三个数字中有放回地抽取两次，每次取一个 . A：“第一次取出的数字是 0”，B：“第二次取出的数字是 1”，C：“至少有一个数字是 2”；

(3) 将两个球随机地放到三个盒子中，第一个盒子中至少有一球 .

2. 向指定的目标连续射四枪，用 A_i 表示“第 i 次射中目标”（$i=1,2,$

3,4)，试用 A_1，A_2，A_3，A_4 表示下列各事件：

(1) 四枪中至少有一枪射中目标；

(2) 四枪中恰好有两枪射中目标；

(3) 前两枪都射中目标，而后两枪都未射中目标；

(4) 四枪都未射中目标；

(5) 四枪中至多有一枪射中目标.

3. 在某系的学生中任选一名学生，用 A 表示“被选者是男生”，B 表示“被选者是三年级学生”，C 表示“被选者是运动员”.

(1) 说出事件 $AB\overline{C}$ 及 $\overline{A}BC$ 的含义；

(2) 什么条件下 $ABC=C$ 成立；

(3) 什么条件下 $C\subseteq B$ 成立；

(4) 什么条件下 $\overline{A}=B$ 成立.

第2节　随机事件的概率

一、概率的统计定义

随机事件在一次试验中，可能发生，也可能不发生，带有不确定性，但在多次重复试验中，却呈现出明显的规律性.

历史上，有人进行过抛掷硬币的试验来观察“正面向上”这一事件发生的规律，表 1-1 是试验结果的记录.

表 1-1　抛掷硬币试验结果记录表

试验者	抛掷次数	正面向上次数	频率
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维纳	30 000	14 994	0.499 8

又如，有人利用电子计算机模拟“从 0，1，2，…，9 中任意取出一个数字”这一随机试验，观察事件“取出的是数字 1”发生的规律. 表 1-2 列出了 10 个 2 000 次的观察结果.

表 1-2 观察结果表

观察次数	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000
“1” 出现次数	194	203	218	185	212
频　率	0.097 0	0.101 5	0.109 0	0.092 5	0.106 0
观察次数	2 000	2 000	2 000	2 000	2 000
“1” 出现次数	205	183	204	204	205
频　率	0.102 5	0.091 5	0.102 0	0.102 0	0.102 5

在观察随机事件 A 时，设进行了 n 次试验，其中事件 A 发生了 μ 次，则 $\frac{\mu}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率，记作 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$.

容易证明，频率有下列性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；(2) $f_n(\varnothing)=0$；(3) $f(\Omega)=1$.

从上面的试验记录可以看出，在多次重复试验中，同一事件发生的频率虽然并不完全相同，但却在一个确定的数值附近摆动，而呈现出一定的稳定性(前一例摆动于 0.5 附近，后一例摆动于 0.1 附近)，而且随着试验次数的增加，这种现象愈加显著．频率的这种稳定性，揭示出一个随机事件发生的可能性有一定的大小可言：频率稳定于较大的数值，表示相应事件发生的可能性较大，频率稳定于较小的数值，表示相应事件发生的可能性较小，而频率所接近的这个确定数值就是相应事件发生可能性大小的一个客观的定量的度量，称为相应事件的概率．

定义 1 在大量(n 次)重复试验中，事件 A 发生的频率 $f_n(A)=\frac{\mu}{n}$ 一定在某个确定的数值 p 附近摆动，而呈现出一种稳定性．数值 p 的大小反映了事件 A 发生的可能性大小，数值 p 称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

这个定义称为概率的统计定义.

由频率的性质，可知概率有下列性质：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；(2) $P(\varnothing)=0$；(3) $P(\Omega)=1$.

二、概率的古典定义

概率的统计定义是描述性的，比较直观，但不够严密，而且不可能都做大量的试验去得出每个事件的频率稳定值．对一些比较简单的随机现象，人们根据某种等可能性来定义概率．概率的古典定义就属于这种情况．

有许多随机试验具有下列两个特点：

（1）试验的全部可能结果(即基本事件)是有限个，即样本空间是有限集；

（2）各基本事件出现的可能性相同．

这种随机试验是概率论发展早期的研究对象，称为古典随机试验，或称为古典概型．例如，抛掷一枚均匀硬币的试验，从一批产品中任意抽查一件的试验，都是古典概型．

定义 2　在古典概型中，如果基本事件总数为 n，事件 A 包含其中的 m 个基本事件，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

例 1　同时抛掷两枚均匀硬币，求落下后恰有一枚正面向上的概率．

解　用 A 表示"恰有一枚正面向上"这一事件．抛两枚硬币，有四个基本事件：(正,正)，(正,反)，(反,正)，(反,反)．由于硬币均匀，各基本事件出现的可能性相同．事件 A 由其中的两个基本事件(正,反)与(反,正)组成，所以 $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

例 2　一批产品由 8 件正品和 2 件次品组成，从中任取 3 件，求：(1)这三件产品全是正品的概率；(2)这三件产品中恰有一件次品的概率；(3)这三件产品中至少有一件次品的概率．

解　用 A，B，C 分别表示取出的三件产品"全是正品"，"恰有一件次品"，"至少有一件次品"．

从 10 件产品中任意取出 3 件，共有 C_{10}^{3}种等可能的取法，即

有 C_{10}^3 个等可能的基本事件.

(1) 这三件产品全是正品的取法有 C_8^3 种，所以

$$P(A)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15};$$

(2) 这三件产品恰有一件次品的取法有 $C_8^2C_2^1$ 种，所以

$$P(B)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15};$$

(3) 这三件产品至少有一件次品的取法有 $C_8^2C_2^1+C_8^1C_2^2$ 种，所以

$$P(C)=\frac{C_8^2C_2^1+C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}.$$

例 3 10 个人抽两张球票(即 10 个签,其中两个写着“有”字，八个写着“无”字)，一个一个依次抽取(取后不放回)，求第 k ($1\leqslant k\leqslant 10$)个人抽到球票的概率.

解 用 A 表示事件“第 k 个人抽到‘有’字签”. 我们把 10 个人抽的签排成一排，作为一个基本事件，则基本事件总数为全排列数 P_{10}，并且，各基本事件出现是等可能的. 第 k 个人抽到“有”字签，相当于第 k 个位置排“有”字签，共有 $C_2^1P_9$ 种排法，所以

$$P(A)=\frac{C_2^1P_9}{P_{10}}=\frac{2\cdot 9!}{10!}=\frac{2}{10}.$$

概率的统计定义和古典定义都有它们的不足和局限性，统计定义较直观，但不够严密；古典定义只适用于古典概型. 随着数学工具的发展及人们对概率概念认识的加深，提出了概率的公理化定义，从数学的角度讲，这个定义是最好的，它为概率论的发展奠定了坚实的基础，概率的所有性质都可以从这个定义严格地推导出来，但公理化定义较抽象，这里就不再介绍.

三、概率的基本性质及加法公式

从概率的古典定义，容易推出概率的下列性质及加法公式.

性质 1　对任意事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

性质 2　$P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$.

性质 3　如果事件 A，B 满足 $A \subseteq B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$.

定理 1（概率的加法公式）　对任意两个事件 A，B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

推论 1　如果事件 A，B 互不相容，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

推论 1 可以推广到多个事件情形，即如果事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

推论 2　对任意事件 A，有 $P(A)+P(\overline{A})=1$.

推论 3　如果事件 A，B 满足 $A \subseteq B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

例 4　甲、乙两人同时向目标射击，甲射中目标的概率为 0.8，乙射中目标的概率为 0.85，两人同时射中目标的概率为 0.68. 求目标被射中的概率.

解　用 A 表示“甲射中目标”，B 表示“乙射中目标”，则

$$P(A)=0.8,\quad P(B)=0.85,\quad P(AB)=0.68.$$

“目标被射中”就是 $A+B$. 由概率的加法公式，有

$$\begin{aligned}P(A+B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=0.8+0.85-0.68\\&=0.97.\end{aligned}$$

例 5　袋中装有 4 个黑球和 1 个白球，每次从袋中随机地摸出一球，并换入一个黑球，连续进行. 求第 3 次摸到黑球的概率.

解　用 A 表示事件“第 3 次摸到黑球”，则 $\overline{A}$ 表示事件“第 3 次摸到白球”. 先计算 $\overline{A}$ 的概率.

这是一种有放回的摸球，连续摸 3 次球，基本事件总数为 $5\times5\times5=125$. 事件 $\overline{A}$ 相当于“第 1 次和第 2 次都摸到黑球，第 3