徐 俊 李林曙 编

线性代数

学习指导书

XIAN XING DAI SHU

中央广播电视大学出版社

线性代数

学习指导书

UAN XING DAI SHU

线性代数学习指导书

徐　俊　李林曙　编

中央广播电视大学出版社

(京)新登字 163 号

线性代数学习指导书

徐 俊 李林曙 编

中央广播电视大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国人民解放军第一二〇二工厂印刷

开本850×1168 1/32 印张5.75 129千字
1993年2月第1版 1993年5月第1次印刷
印数 1—30000
定价 3.90 元
ISBN 7-304-00757-5/O.59

前　言

本书是电大工科各类专业学生学习“线性代数”课程的辅导书，是施光燕教授编写的主教材《线性代数》(中央广播电视大学出版社出版)的配套教材，内容包括：行列式，矩阵，线性方程组，矩阵的特征值、特征向量、二次型。

本书第一、四章由徐俊编写，第二、三章由李林曙编写。

为适应远距离教育和成人教育的特点，本书在编写格式、体例及内容编排上较以往同类辅导书作了较大的改变，以求主、辅教材间的联系更加密切，利于自学和教学，使本书真正起到辅导的作用。

本书是以主教材中每一节为一辅导单元。每一辅导单元由以下各部分组成：

一、主要内容

按主教材《线性代数》的顺序，列出各小节的基本概念、基本结论及基本计算等主要内容。

二、计算方法

为突出本课程计算的重要性，特列出最基本的计算方法，以使学生熟练掌握本课程的中心内容。

三、例题分析

通过对一些典型例题的分析、讲解，使学生弄清概念，掌握基本计算方法，并能应用基本结论和概念做一些简单的推理证明。

四、练习题

是为便于学生及时消化、掌握例题所述基本计算方法而编写的。

在每一节的辅导中(多数在节末),我们适时地给出一些思考题,以利学生进一步理解基本概念,熟练掌握基本的计算方法。

在每一章末我们编选了一份包含各种题型的综合练习题;在全书末还编选了两份模拟试题。以供学生复习、巩固所学知识,检查学习效果。

书末附有所有练习题、综合练习题和模拟试题的参考答案或提示。

此外,本书前面还附有本课程的教学大纲,明确提出本课程及各章(前三章。第四章为选学或参考内容)的教学要求的重点。

本书也可供职大、业大、函大等成人高校及其它自学“线性代数”课程的读者使用。

我们希望本书能有助于初学“线性代数”的读者加深对教材内容的理解,尽快掌握基本的计算方法,逐步培养分析问题和解决问题的能力。

对书中存在的错误和不妥之处,恳请读者批评指正。

编　者

1992年10月

目　录

全国广播电视大学《线性代数》(工科大专)教学大纲

第一章　行列式

§1　n 阶行列式的定义

§2　行列式的性质

§3　克莱姆法则

第二章　矩　阵

§1　矩阵和矩阵的运算

矩阵的概念,矩阵的加法,数乘矩阵.矩阵的乘法,矩阵的转置。

零矩阵,单位矩阵,数量矩阵,对角矩阵,上三角矩阵,对称矩阵,正交矩阵。

§2　逆矩阵

可逆矩阵的定义,性质,矩阵的行列式,矩阵可逆的充分必要条件,伴随矩阵,矩阵的初等行变换,矩阵的求逆。

§3　分块矩阵

第三章　线性方程组

§1　消元法解线性方程组

阶梯形方程组,阶梯形矩阵,线性方程组解的几种情况,线性方程组的三个基本问题。

§2　n 维向量

向量的线性运算,向量组线性相关与线性无关的定义。

§3 向量组的秩和矩阵的秩

极大线性无关组，向量组的秩和矩阵的秩的计算，向量空间的基，维数。

§4 线性方程组的相容性

线性方程组有解判别定理，解的情况讨论，齐次线性方程组有非零解的充分必要条件。

§5 线性方程组解的结构

齐次线性方程组解的性质，基础解系，一般线性方程组解的性质及解的结构。

全国广播电视大学《线性代数》(工科大专)教学大纲说明书

一、课程的目的和任务

线性代数是全国广播电视大学工科大专各专业的一门重要的基础课,是为培养适应四个现代化需要的大专层次的应用工程技术人员而设的一门必修课,通过该课程的学习,使学生了解有关线性代数的基本概念,掌握线性代数的基本计算方法,为后续课程作好必要的准备。

二、课程的基本要求

1. 理解或了解下列基本概念,性质和定理:n 阶行列式,矩阵,逆矩阵,对称矩阵,正交矩阵,向量组的线性相关与线性无关,向量组的秩,极大线性无关组,矩阵的秩,线性方程组的相容性定理,齐次线性方程组有非零解的充分必要条件,基础解系,线性方程组解的结构。

2. 掌握下列法则和基本计算方法:克莱姆法则,行列式的计算,矩阵的运算,逆矩阵的求法,矩阵的分块及分块运算,消元法解线性方程组,求线性方程组的基础解系,线性方程组的全部解,求矩阵的秩和向量组的秩。

三、各章的基本要求,重点,难点及教学建议

第一章　教学要求

1. 理解 n 阶行列式的递归定义

2. 掌握利用性质计算行列式的方法。

3. 了解克莱姆法则的条件,结论。

重点:利用性质计算行列式。

教学建议:用例证说明性质,不作证明,计算以四、五阶数

字行列式为主。

第二章　教学要求

1. 熟练掌握矩阵的运算和矩阵的初等行变换。

2. 知道零矩阵，对角矩阵，上三角矩阵，对称矩阵，正交矩阵等特殊矩阵的定义和性质。

3. 理解可逆矩阵和逆矩阵的概念及性质，理解矩阵可逆的充分必要条件。

4. 熟练掌握求逆矩阵的伴随矩阵法和初等行变换法。

5. 掌握矩阵的分块及分块的运算。

重点：矩阵的乘法，求逆矩阵。

难点：矩阵的乘法，求逆逆阵的伴随矩阵法和初等行变换法。

教学建议：教学中可做一些利用矩阵性质进行的简单证明题。

第三章　教学要求

1. 掌握向量的线性运算，理解向量组线性相关与线性无关的概念。

2. 理解向量组和矩阵的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组，知道向量空间的基底和维数的概念。

3. 理解线性方程组的相容性定理，理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件，理解基础解系的概念。

4. 掌握解线性方程组的消元法。

5. 掌握齐次线性方程组全部解的求法。

6. 理解一般线性方程组解的结构，熟练掌握求非齐次线性方程组全部解的方法。

重点：线性方程组相容性的概念，矩阵秩的概念，求线性方程组的全部解。

难点：线性相关性的概念，基础解系的概念。

四、学时分配

章.节	电视授课	面　　授
1.1	1	0
1.2	2	0
1.3	1	0
2.1	4	0
2.2	3	0
2.3	1	0
3.1	2	0
3.2	3	0
3.3	4	0
3.4	3	0
3.5	3	0
总计	27	0

习题课学时按 1：1 设置。

五、教学环节

1. 教材

考虑到远距离教育的特点，根据教学大纲编好教材（包括辅导教材），教材中对概念叙述要确切，论证要清楚尽可能详尽而又要突出重点，力求写得通俗易懂，深入浅出，兼顾成人的特点，便于自学，例题解法要规范化，通过例题叙述解题的基本方法和技巧。

2. 电视讲授

电视课是本课程教学的主要环节，也是学生获得线性代

数知识的重要媒介之一。电视课主要讲授基本概念、基本理论和基本计算方法。讲授中应条理清楚，注意启发式，在讲授知识的同时，要重视对学生能力的培养，例如逻辑推理能力、抽象思维能力和计算能力。

3. 面授辅导

辅导课是一个重要的教学环节，它应配合电视课，巩固和消化电视课所讲授的内容，根据本课程的教学要求，加强对重点，难点内容的讲授和训练，同时注意培养自学能力。

辅导课可采用讲解、讨论、答疑等形式，不要简单重复电视课内容，要力求生动活泼，注重调动学生独立思考的积极性。

4. 阅读与自学

阅读教材是培养学生自学能力的重要手段，在电视课及辅导课上，要给学生布置应阅读的教材章节，并指导学生认真阅读。

5. 作业

学生应独立完成作业，它是平常检查学习效果的方法，也是巩固及掌握所讲授过的知识不可缺少的手段，每次电视课后，要给学生布置一定数量的作业，对作业中出现的问题应在辅导课中讲授，典型问题应组织讨论。

6. 阶段测验与期终考试

阶段测验可由省(市)电大或教学班主持，测验题目要全面，能基本包括一个阶段学习的主要内容，而且正确反应教学大纲的要求。

期终考试由中央电大统一命题，统一评分标准，统一考试时间，考试范围是大纲所规定的全部内容，评定电大成绩以期终考试成绩为准，凡及格者取得学分。

第一章　行列式

本章重点：利用行列式的性质计算行列式。

§1.1　n 阶行列式的定义

一、主要内容

（一）二、三阶行列式

1．式子

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式

2．式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式

（二）n 阶行列式的定义

1．由 n^2 个数排成 n 行 n 列 。

即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。

2. 行列式是一个算式，其结果为一个数。

3. n 阶行列式划去第 i 行、第 j 列，即划去元素 a_{ij} 所在的行和所在的列，其余元素所构成的$(n-1)$阶行列式 M_{ij} 称为 a_{ij} 的余子式。

4. a_{ij} 的代数余子式记为：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

二、计算方法

(一)二、三阶行列式

1.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13}$$

$$+ a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

3. 上述计算方法称“对角线法”，它对四阶以上行列式是不适用的。

(二)n 阶行列式

1. $D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$

上式称为按第一行展开计算行列式的公式。

2. 按任意一行(如 i 行)展开计算行列式的方法为：

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

3. 上述公式中 A_{1j} 或 A_{ij} 如果在三阶以上，一直使它们降到是三阶（或二阶）行列式时便可利用三阶（或二阶）计算方法直接计算，从而得出 D_n 的结果。

三、例题分析

例 1 计算

$$\begin{vmatrix} 2\cos^2\alpha & 2\sin^2\alpha-1 \\ 2\cos^2\alpha-1 & 2\sin^2\alpha \end{vmatrix}$$

解 这是一个二阶行列式，直接按其定义计算方式（即对角线法）写成代数和的形式，然后利用三角函数的运算进行化简，得出结果。

$$\begin{vmatrix} 2\cos^2\alpha & 2\sin^2\alpha-1 \\ 2\cos^2\alpha-1 & 2\sin^2\alpha \end{vmatrix}$$

$$=4\cos^2\alpha\sin^2\alpha-(2\sin^2\alpha-1)(2\cos^2\alpha-1)$$

$$=4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha-1=1$$

从上例看出二阶（或三阶）行列式，不论其组成元素是数，或是三角函数、对数、甚至代数式，其计算均可先用对角线法化行列式为代数和，然后再利用元素本身性质进行代数运算，计算结果。

思考题 1 由二、三阶行列式的展开后的项数看出 n 阶行列式的展开应有多少项？每一项是多少元素组成的乘积？每项都是取自不同行、不同列的元素应如何去理解？

例 2 计算下列四阶行列式

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}$

解　这两个四阶行列式均可用定义直接计算。但不难发现这两个行列式只是第一行和第二行中各元素对调了，而第三行与第四行则元素完全相同。这样的两个行列式其计算结果会怎样呢？

(1)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \\ 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \\ 1 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+0+4(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix}$$

$$=2\times(-120+70)+0+0+(-4)(-20+210)$$

$$=-860$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$