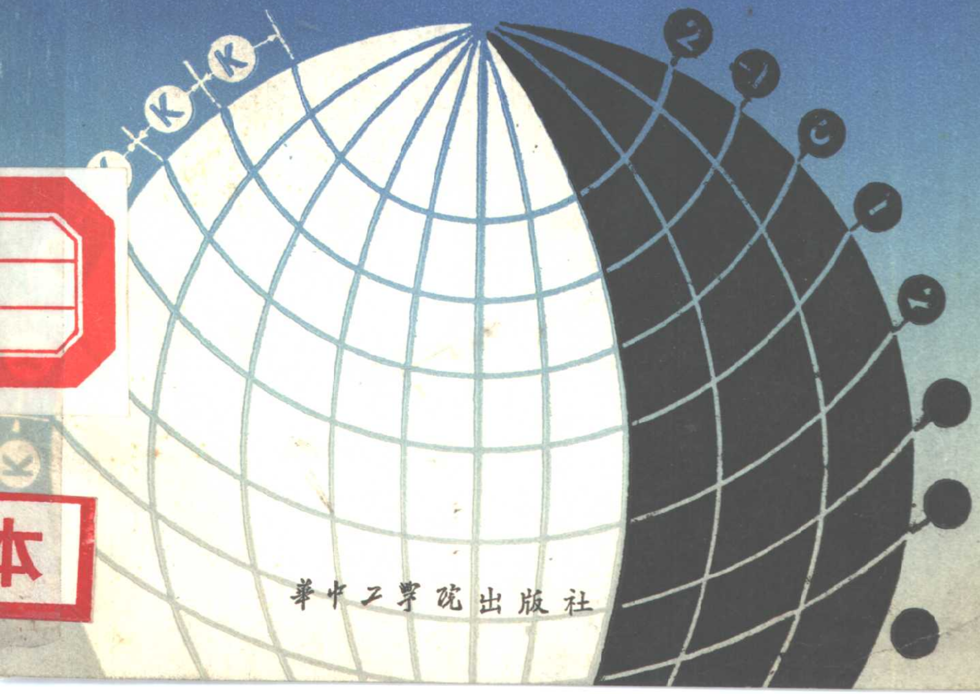
薄壳力学的数值计算

成鸿学 郭建华 包亦望 编著



華中工學院出版社

薄壳力学的数值计算

成鸿学　郭建华　包亦望　编著

華中工學院出版社

内 容 简 介

本书采用差分法及加权残数法系统地分析了工程中薄壳的强度问题和线性稳定问题，推导了各种薄壳（圆柱壳、圆锥壳、球壳、扁壳等）的基本微分方程，介绍了一些实例计算，并编制了部分有关程序。

本书可供固体力学研究生和力学专业学生以及工程技术人员参考。

薄壳力学的数值计算

成鸿学　郭建华　包亦望　编著

责任编辑　叶翠华

华中工学院出版社出版发行

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所经销

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：9　字数：199,000

1986年11月　第1版　1986年11月第1次印刷

印数：1—1,500

统一书号：15255—082　定价：1.55 元

序　言

在航空及宇航的飞行器、船舶、潜艇、桥梁、大型建筑、化工容器和原子反应堆等工程结构中，经常采用壳体结构。一般工程结构都是三维的物体。而壳体这类结构的特点是其中的一维即它的厚度比其余的二维小得多，因此常用的壳体又称为薄壳。

人类很早就在使用壳体结构，并对其受力分析逐渐积累了一定的经验。自十九世纪初叶以来，经过许多著名数学力学家如柯西、波桑、纳维叶、拉格朗日、克希霍夫、铁摩辛柯等人的研究，壳体的计算和分析理论得到了很大的发展和完善。由于薄壳结构具有造型美观、用料经济等许多突出的优点，其应用范围也愈加广泛，壳体的力学分析越来越重要，因此在许多有关的专业中把壳体理论作为必修的课程。但是薄壳的几何形状比较复杂，按照过去经典理论所建立起来的基本微分方程，在多数情况下是很难得到精确解的，因此人们常常采用近似解法。近年来，由于电子计算机的出现和迅速发展，一些近似的计算方法如差分法、有限单元法等也逐渐发展、形成和完善起来，并且愈来愈显示出它们的优越性和重要性。作者根据多年来的研究成果，以及对研究生讲授的"薄壳近似计算"、"程序设计"等课程的教学经验，编写成本书。

本书共十一章，除在第一章中介绍了弹性薄壳力学的基本理论和基本微分方程的推导外，在其他各章中着重介绍了用差分法和加权残数法计算各种薄壳（圆柱壳、圆锥壳、扁壳）的强度和线性稳定问题的原理和方法。在差分法中，介绍了用变步长的差分法。在加权残数法中，作者采用了五次和九次B样条函数构造的基函数作为试函数，分析了等厚度和变厚度薄壳的强度和稳定问题，所得结果具有计算精度高、编制程序简单、耗用机时很少（例如计算一个壳体稳定问题，只需几秒钟到几

十秒钟）等一系列优点。

为了便于读者学习参考，在本书最后一章中，对圆柱形壳体的强度计算和壳体的稳定问题作了程序设计，编制了相应的程序。

在本书的编写过程中，李家汴同志和张骢同志计算了许多例题。华中工学院出版社为本书的出版给予了大力的支持。宋天霞副教授审阅了全书。在此表示深切的感谢。

由于作者水平有限，时间又较匆忙，书中一定有不少缺点和错误，敬请读者批评指正。

作者

于武汉工业大学

1985年8月

封面设计：王立革

统一书号：15255-082
定　　价：1.55 元

目　录

第一章　弹性薄壳的一般理论

第一节　基本概念与基本假设

两个曲面所限定的物体，如果这两曲面之间的距离比曲面的尺寸为小，就称为壳体。这两个曲面称为壳面。距两壳面等远的点的轨迹，称为壳体的中间曲面。

在中间曲面上的任意一点，作中间曲面的垂线，此垂线被两个曲面所截割的一段长度称为壳体的厚度，以 t 表示。一般地说，壳体可以是等厚度的，也可以是变厚度的。我们主要讨论等厚度的壳体，也讨论某些变厚度的壳体。

壳体理论是弹性力学的一个分支，它的主要任务是，研究壳体在已知载荷作用下的位移和内力的问题。通常为便于研究，假设壳体的材料都是各向同性的，并且服从虎克定律；其中间曲面上各点的位移比起壳体的厚度来说要小得多。其次是壳体的厚度 t 与其中间曲面的曲率半径之比值和1比较也小得多，因而可以忽略不计。

因为只讨论厚度较小的薄壳，所以采用了克希霍夫（Kirchhoff）的假设：

（1）壳体在中间曲面上的直法线素在变形后仍保持为直线，并且垂直变形后的曲面，其原来长度仍保持不变。

（2）壳体变形后，垂直于壳体中间曲面的应力分量与其他应力相比较，其值很小可以略去不计。

由于采用了上述假设，在研究壳体变形问题时，只要研究壳体中间曲面的变形就可以了。

第一章　弹性薄壳的一般理论

第一节　基本概念与基本假设

两个曲面所限定的物体，如果这两曲面之间的距离比曲面的尺寸为小，就称为壳体。这两个曲面称为壳面。距两壳面等远的点的轨迹，称为壳体的中间曲面。

在中间曲面上的任意一点，作中间曲面的垂线，此垂线被两个曲面所截割的一段长度称为壳体的厚度，以 t 表示。一般地说，壳体可以是等厚度的，也可以是变厚度的。我们主要讨论等厚度的壳体，也讨论某些变厚度的壳体。

壳体理论是弹性力学的一个分支，它的主要任务是，研究壳体在已知载荷作用下的位移和内力的问题。通常为便于研究，假设壳体的材料都是各向同性的，并且服从虎克定律；其中间曲面上各点的位移比起壳体的厚度来说要小得多。其次是壳体的厚度 t 与其中间曲面的曲率半径之比值和1比较也小得多，因而可以忽略不计。

因为只讨论厚度较小的薄壳，所以采用了克希霍夫（Kirchhoff）的假设：

（1）壳体在中间曲面上的直法线素在变形后仍保持为直线，并且垂直变形后的曲面，其原来长度仍保持不变。

（2）壳体变形后，垂直于壳体中间曲面的应力分量与其他应力相比较，其值很小可以略去不计。

由于采用了上述假设，在研究壳体变形问题时，只要研究壳体中间曲面的变形就可以了。

第二节　曲线坐标和正交曲线坐标[1]~[4]

一、曲线坐标

三维空间的某一点m的位置（见图 1-1），可以由一固定点o对点m所作的向径$\boldsymbol{R}$来决定。在直角坐标系（$oxyz$）中，向径$\boldsymbol{R}$可写成

$$\boldsymbol{R}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$分别表示沿ox、oy、oz轴的单位矢量。

在弹性力学壳体计算中，为了更便于研究问题，常采用曲线坐标α、β、γ。

由于某一点m对应着α、β、γ三个坐标，所以其中的每一个坐标都是向径$\boldsymbol{R}$的函数，同样地也都是这个向径的分量x、y、z的函数，即

$$\left.\begin{aligned}\alpha(\boldsymbol{R})&=\alpha(x,y,z),\\ \beta(\boldsymbol{R})&=\beta(x,y,z),\\ \gamma(\boldsymbol{R})&=\gamma(x,y,z).\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

相反，既然某一点m的向径$\boldsymbol{R}$可由给出的α、β、γ三个数决定，那么它也是这三个变数的函数，这个向径的分量x、y、z将是曲线坐标的函数，即

$$\left.\begin{aligned}x&=x(\alpha,\beta,\gamma),\\ y&=y(\alpha,\beta,\gamma),\\ z&=z(\alpha,\beta,\gamma).\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

当方程(1-2)中α为某一常数时，将得到关于x、y、z的曲面方程。不同的曲面对应着不同的α值，即当α不断改变时，将形成在曲线坐标系中完全确定了的以α为常数的曲面族。同理，当β为常数时，形成第二曲面族，γ为常数时，形成第三

曲面族。

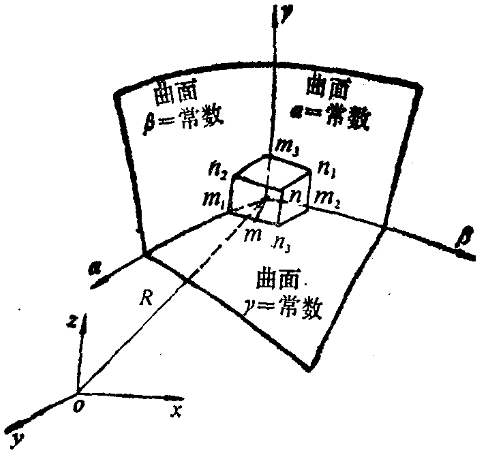


图1-1

上述三个曲面族的每一个族中，都有一个曲面通过空间的某一点m。这三个曲面(分别对应着三个确定的α、β、γ值)，称为坐标曲面。它们的交线（也通过m点），称为坐标线。显然，在三维空间中，这样的坐标线有三根。其中，带有流动坐标α的一根坐标线是曲面$\beta=$常数和$\gamma=$常数的交线；带有流动坐标β的坐标线是曲面$\gamma=$常数和$\alpha=$常数的交线；带有流动坐标γ的坐标线是曲面$\beta=$常数和$\alpha=$常数的交线。

二、拉梅系数

若空间某一点m的曲线坐标为（α、β、γ）(见图1-1)，向径为$\boldsymbol{R}$，则与其相距无限小的另一点n的曲线坐标为($\alpha+d\alpha$、$\beta+d\beta$、$\gamma+d\gamma$)，向径为$\boldsymbol{R}+d\boldsymbol{R}$。向径的增量

$$d\boldsymbol{R}=\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}d\alpha+\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}d\beta+\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}d\gamma. \qquad (1\text{-}4a)$$

令弧长$\widehat{mm_1}=ds_1$、$\widehat{mm_2}=ds_2$、$\widehat{mm_3}=ds_3$；并在点m分

别沿α、β、γ的切线方向取三个单位矢量 $\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$、$\boldsymbol{b}_3$，当点m由m移到m_1时，α改变了$d\alpha$，而β、γ不改变，向径的增量

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}d\alpha = ds_1\boldsymbol{b}_1. \qquad (1\text{-}4b)$$

矢量$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}$在$x$、$y$、$z$轴上的投影为$\frac{\partial x}{\partial \alpha}$、$\frac{\partial y}{\partial \alpha}$、$\frac{\partial z}{\partial \alpha}$，其值为

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}\right| = H_1 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

同理，有

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}\right| = H_2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}\right| = H_3 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (1\text{-}5)$$

由式(1-4b)和式(1-5)，得

$$ds_1 = H_1 d\alpha, \quad ds_2 = H_2 d\beta, \quad ds_3 = H_3 d\gamma; \qquad (1\text{-}6)$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}. \qquad (1\text{-}7)$$

由式(1-7)可知，向径对弧长参数的微分是单位向量[5]。

H_1、H_2、H_3称为拉梅系数，它们分别表示当每个曲线坐标单独改变时，该坐标线的弧长增量与该坐标的增量两者之间的比值。

三、m、n两点之间的距离ds

由图1-1和式(1-4a)，可知

$$ds^2 = |d\boldsymbol{R}|^2 = \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}d\gamma\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}\right)^2 d\beta^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}\right)^2 d\gamma^2$$

$$+2\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}d\alpha d\beta+2\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}d\beta d\gamma$$

$$+2\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}d\gamma d\alpha.$$

在正交曲线坐标中，由于

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}=0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}=0,\quad \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}=0,\tag{1-8a}$$

所以

$$ds^2=\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha^2+\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \beta}\right)^2 d\beta^2+\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \gamma}\right)^2 d\gamma^2$$

$$=H_1^2 d\alpha^2+H_2^2 d\beta^2+H_3^2 d\gamma^2.\tag{1-8b}$$

四、拉梅系数之间的关系

在正交曲线坐标中，三个拉梅系数 H_1、H_2、H_3 应当满足六个微分方程。

由第二类克利斯多夫符号[5]

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{\alpha k}\left(\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial u^i}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha}\right)\tag{1-9}$$

和单位向量的微分

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}_i}{\partial u^j}=\Gamma_{ij}^{1}k_1+\Gamma_{ij}^{2}k_2+\Gamma_{ij}^{3}k_3,$$

式中，$g_{11}=H_1^2$， $g_{22}=H_2^2$， $g_{33}=H_3^2$， $g_{12}=g_{21}=0$， $g_{23}=g_{32}=0$， $g_{13}=g_{31}=0$， $g^{11}=\frac{1}{H_1^2}$， $g^{22}=\frac{1}{H_2^2}$， $g^{33}=\frac{1}{H_3^2}$；

再根据下列混合微分等式

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_1}{\partial \alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_1}{\partial \beta}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_2}{\partial\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_2}{\partial\gamma}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_3}{\partial\gamma}\right)=\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial \boldsymbol{b}_3}{\partial\alpha}\right);$$

便可以求出H_1、H_2、H_3应当满足的六个微分方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\right)+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}=0,\\
&\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}=0,\\
&\frac{\partial^2 H_1}{\partial\beta\partial\gamma}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}=0,\\
&\frac{\partial^2 H_2}{\partial\gamma\partial\alpha}-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}=0,\\
&\frac{\partial^2 H_3}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}=0.
\end{aligned}\right\}$$

(1-10)

第三节 壳体的变形分量方程

在空间正交曲线坐标中，弹性体内任一点m沿曲线坐标α、β、γ的切线方向的位移分量分别用u_1、u_2、u_3来表示，正应变用e_1、e_2、e_3来表示，剪应变用e_{12}、e_{23}、e_{31}来表示。下面研究壳体内用三个位移分量表示的变形分量方程。

一、曲线单元体

为了建立位移和变形之间的关系式，在点m附近取出一个无限小的曲线六面体即单元体(图1-2)，它的八个顶点为m、m_1、m_2、m_3、n、n_1、n_2、n_3。八个顶点在变形前的坐标为：

$$
\left.\begin{array}{llll}
m: & \alpha & \beta & \gamma, \\
m_1: & \alpha+d\alpha & \beta & \gamma, \\
m_2: & \alpha & \beta+d\beta & \gamma, \\
m_3: & \alpha & \beta & \gamma+d\gamma, \\
n: & \alpha+d\alpha & \beta+d\beta & \gamma+d\gamma, \\
n_1: & \alpha & \beta+d\beta & \gamma+d\gamma, \\
n_2: & \alpha+d\alpha & \beta & \gamma+d\gamma, \\
n_3: & \alpha+d\alpha & \beta+d\beta & \gamma.
\end{array}\right\} \qquad (1\text{-}11)
$$

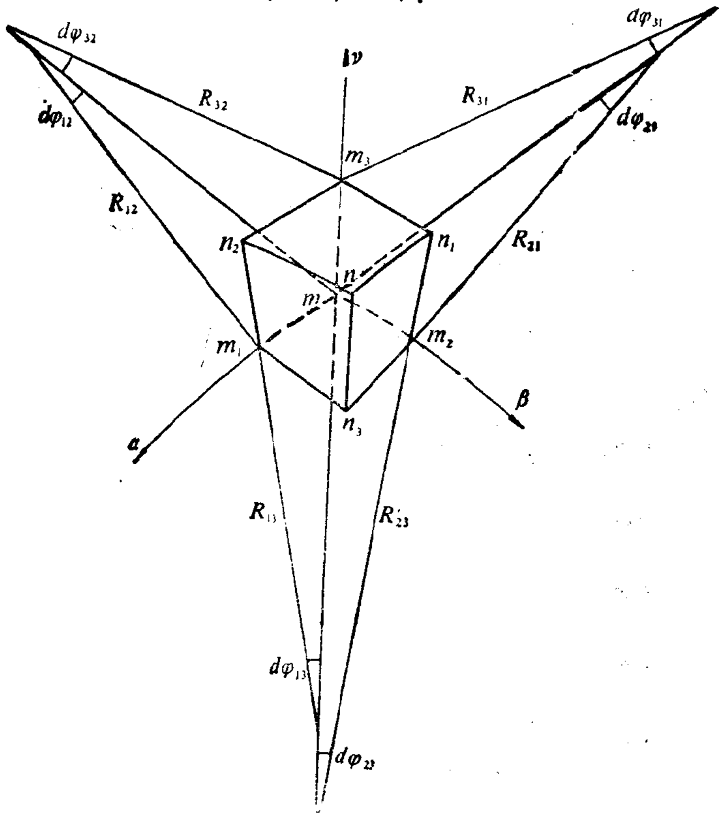


图 1-2