LM
朗曼专题

北京朗曼教学与研究中心教研成果

• 学科专题研究系列丛书 •

主编 李振亚 汪尊国

# 数学专题

ShuXueZhuanTiYanJiu

# 研究

总主编 宋伯涛

## 排列、组合和概率

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

# 排列、组合和概率

主编　李振亚　汪尊国

中国青年出版社

责任编辑:李 培 广
封面设计:Paul Song

排列、组合和概率
主编 李振亚 汪尊国
*
中国青年出版社出版 发行
社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708
三河欣欣印刷有限公司印刷 新华书店总经销
*
850×1168 1/32 7印张 190千字
2001年8月北京第1版 2001年8月北京第1次印刷
定价:8.00元
ISBN 7-5006-4547-3/O·28

# 敬告读者

《学科专题研究》系列丛书为作者精心之作，作者值此出版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《学科专题研究》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上“朗曼专题”、“北京朗曼教学与研究中心教研成果”等字样，以防假冒。凡以《朗曼专题》及“宋伯涛总主编”名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局 100101－89 号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编 100101。
本中心 E-mail:SPTJWLSQ@163bj.com

# 出 版 前 言

展望二十一世纪教育发展的未来，必将是以学生素质全面发展为前提，通过减轻学生过重的学业负担，还学生一个宽松的、有更多自由选择、自主学习的发展空间。从而做到有效地培养学生的创新意识和实践能力。这将是教育改革的一种必然趋势。为此，国家教委进行高考课程改革，推广试用新教材。在这种情况下，我们的助学用书如何适应这一变化，并与素质教育的要求相匹配呢？基于这样的思考与愿望，我们按照新教材的体系，将新教材中有关章节的内容有机组合，编写一套既相互联系，又自成体系的《数学专题研究》系列丛书。

本丛书共 13 分册，分别为：1. 集合与简易逻辑；2. 函数及其性质；3. 数列、极限、数学归纳法；4. 三角函数；5. 向量；6. 方程与不等式；7. 排列、组合和概率；8. 直线、平面、简单几何体；9. 直线与二次曲线；10. 怎样解高中数学选择题；11. 怎样解高中数学应用题；12. 高中数学解题方法集锦；13. 高中数学重点问题详析。

本丛书在编写过程中，始终坚持以高中新教材为基础、以高考的内容和要求为主线、还兼顾拓展学生视野和进行强化训练，并有意识地引导学生亲历“做数学”的过程，并且最终得出结论。因为，与具体的知识、技能相比，探索知识的过程有利于开发学生的潜能。也可以这样说，本丛书在数学教学《大纲》的基础上，本着源于教材且高于教材的要求进行编写，并以典型常规题、创新开放题及实践应用题为线索，进行精析和指导，并且坚持了以学生为主体，以学生能力发展为根本的理念，便于学生展开自学和自练。

本丛书使用的数学符号以新教材为准，在知识点的归类讲解与拓展方面兼顾了两套教材，并在书后附上新教材与统编教材中相异数学符号对照表，供读者对照使用。

由于作者水平有限，且时间仓促，书中难免存有不尽人意之处，敬请广大读者不吝指教。

宋伯涛

2001 年 8 月于北师大

# 目　　录

# 一、排列组合

## 第一节 加法原理与乘法原理

**【知识要点】**

1. 加法原理 完成一件事，有几类办法，在第1类办法中有$m_1$种不同的方法，在第2类办法中有$m_2$种不同的办法……在第$n$类办法中有$m_n$种不同的方法. 那么完成这件事共有

$N=m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n$种不同的方法.

2. 乘法原理 完成一件事，需要分成$n$个步骤，做第1步有$m_1$种不同的方法，做第2步有$m_2$种不同的方法……做第$n$步有$m_n$种不同的方法. 那么完成这件事共有

$N=m_1\times m_2\times\cdots\cdots\times m_n$种不同的方法.

**说明**：1. 加法原理和乘法原理是排列组合问题的最基本的原理，是我们推导排列数，组合数公式的理论依据，也是我们解排列、组合问题的基本思想方法.

2. 要分清两个基本原理的条件和结论，抓住它们的异同，正确运用两个原理.

两个原理的共同点是，它们都是讨论做一件事，确定完成这件事所有不同方法的种数. 不同点是，加法原理和"分类"有关，而乘法原理和"分步"有关. 如果完成某件事情有$n$类办法，这$n$类办法相互之间是独立的，无论哪一类办法中的哪一种方法都能独立完成这件事情，那么求完成这件事情的方法总数时就用加法原理. 如果完成某件事情有$n$个步骤，而这$n$个步骤缺一不可(每个步骤的各种方法各不相同，只能完成此步骤)，当且仅当这$n$步骤都完成后，这件事才能完成. 那么求完成这件事情的方法总数时就用乘法原理.

3. 在解决具体的应用问题时，首先必须弄清是"分类"还是"分

步”,其次是根据问题的特点确定一个“分类”或“分步”的具体标准.

4. 一些简单的问题单独应用加法原理或乘法原理就可以解决.较复杂的问题往往需要综合运用这两个原理才能解决,一般先将完成一件事的方法进行分类,然后再将各类办法进行分步.

**【例题精讲】**

**例 1** 某中学高一年级数学兴趣小组有 6 名男生,4 名女生,高二年级数学兴趣小组有 4 名男生,3 名女生,高三年级数学兴趣小组有 5 名男生,5 名女生.

(1)若从中选派一名学生代表学校参加市数学竞赛,有多少种不同选法?

(2)若从每个年级中各选一名学生代表学校参加市数学竞赛,有多少种不同选法?

(3)若从两个年级中各选一名学生代表学校参加市数学竞赛,有多少种不同选法?

(4)若从每个年级中各选出一名男生一名女生,有多少种不同选法?

(5)若从三个年级中选出一名男生一名女生,且男女生不同年级,有多少种不同选法?

**分析**:(1)要完成的事是“选派一名学生”,无论是哪个年级的学生都可以作为选派对象,因此是分类问题,应用加法原理.

(2)要完成的事是“高一、高二、高三年级各选派一名学生”,因此,选出一个年级中的一名学生只完成了这件事的一部分,只有三个年级的学生都选定以后才完成这件事,因此是分步问题,应当用乘法原理.

(3)要完成的事是“选派两个不同年级的学生各一名”,因此要分情况考虑,即先考虑是选哪两个年级的学生,选高一、高二年级学生各 1 人,或选高二、高三年级学生各 1 人,或选高三、高一年级学生各 1 人,其中每一种选法都能完成这一件事,而每一种选法都应分步完成,可应用乘法原理,完成此事共有三种选法,因此这些选法的种类之间还应运用加法原理.

(4)要完成的事是“从每个年级选派一男一女两名学生”,因

此，可分三步完成，即第一步、第二步、第三步是分别选出高一年级、高二年级、高三年级男、女学生各一名．每一步中又须分成两步，第一步选出男生一名，第二步选出女生一名，因此，每一步中都应运用乘法原理，三步完成此事，仍然应运用乘法原理．

(5)要完成的事是：选出一名男生，一名女生，且男女生不同年级"因此先要分情况考虑，即先考虑从哪个年级选派男生，有三种可能选法，而每种选法中，先选男生后选女生分两步完成，应运用乘法原理，三种选法的种类之间还应运用加法原理．

**解**：(1)根据加法原理高一、高二、高三年级分别有 10、7、10 种不同的选派学生的方法，再根据加法原理，不同的选法种数是

$N=10+7+10=27$(种)

**答**：选派一名学生代表参加市数学竞赛有 27 种不同的选法．

(2)根据加法原理高一、高二、高三年级各选派一名学生的不同选法分别是 10，7，10 种，再根据乘法原理，不同的选法种数是

$N=10\times7\times10=700$(种)

**答**：从每个年级中各选一名学生代表，有 700 种不同的选法．

(3)根据乘法原理，高一、高二年级，高二、高三年级，高三、高一年级各选派一名学生的不同选法分别是 $10\times7$，$7\times10$，$10\times10$ 种，再根据加法原理，不同的选法种数是

$n=70+70+100=240$(种)

**答**：从两个年级中各选一名学生代表，有 240 种不同的选法．

(4)根据乘法原理，高一、高二、高三年级各选出一名男生、一名女生的不同选法分别是 $6\times4$，$4\times3$，$5\times5$ 种，再根据乘法原理，不同的选法种类是

$N=24\times12\times25=7200$(种)

**答**：从每个年级中各选出一名男生一名女生，有 7200 种不同的选法．

(5)从高一年级选取男生有 6 种选法，女生则从高二、高三年级中选取，有 8 种选法，根据乘法原理，此种选法有 48 种．从高二年级选取男生，女生则从高三、高一年级中选取，根据乘法原理，此种选法有 36 种．从高三年级选取男生，女生则从高一、高二年级中选取，根据乘法原理，此种选法有 35 种．再根据加法原理，不同选法的种数是

$N=48+36+35=119$(种)

**答**:从三个年级中选出一名男生、一名女生,且男女生不同年级,有119种不同的选法.

**说明**:(1)这是一道综合运用加法原理和乘法原理的题目,在解题时首先要搞清要完成的事是什么,然后再根据题意,弄清哪些情况能完成这件事,再确定有几类办法可以完成此事,最后对各类办法进行正确分步.

(2)在运用加法原理求解时,应先对完成这件事的办法作出一个分类,使各类办法之间是彼此独立的,且使任何一类办法中的任何一种方法都可以一次性把事件本身完成;其次要分析每一类办法中各有几种方法,把每类办法中的方法种数相加,就可得到完成事件的方法总数.因此,使用加法原理的关键是找一个分类的依据,作出正确的分类,而分类的基本要求是做到不重复,不遗漏.

在运用乘法原理时,应先分析完成这件事需分几个步骤,其中每个步骤都是不可缺少的,且只有依次完成这些步骤,才能完成这件事;其次是研究完成每一个步骤有多少种方法,把每个步骤中的方法数相乘,就可得到完成事件的方法总数.因此,使用乘法原理的关键是确定必须的步骤.

**例2** 现有3名学生和4个课外小组,试分别回答下列问题

(1)每名学生都只参加一个课外小组,有几种不同的方法?

(2)每名学生都只参加一个课外小组,而且每个小组至多有一名学生参加,有几种不同的方法?

(3)每个小组至少有一名学生参加,每名学生参加几个课外小组不限,有几种不同的方法?

**分析**:(1)以谁为主来考虑是解决此类问题的关键.在(1)中如果以课外小组为主考虑,那么每一个课外小组就可能分配到0个、1个、2个、3个学生,即第一小组共有

$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=2^3=8$ 种分配方法.

而第二小组的分配情况是随着第一小组分配情况的变化而变化,情况就非常复杂了,更不要说第三、第四小组的分配情况,所以很难以此思路解答问题.如果以学生为主考虑,每个学生必须参加4个课外小组中的一个,有4种可能性,所以由乘法原理可得解决.

(2)在(2)中如果以学生为主考虑,第1个学生必须参加4个

课外小组中的一个，有4种可能性，而每个小组至多一名学生参加，所以第2个学生只有3种可能性，第3个学生只有2种可能性，根据乘法原理可得解决．

如果以课外小组为主考虑，根据题意，有一个小组无学生参加，选择此小组有4种可能性，另外三组有且只有1个学生参加，根据乘法原理也可得到解决．

(3)在(3)中如果以学生为主考虑，那么此学生有可能参加0个、1个、2个、3个、4个课外小组，而其中参加哪1个、哪2个、哪3个又需进行分类，另外还要考虑到每小组至少有一名学生参加，情形非常复杂，此思路难以解决问题．如果以课外小组为主考虑，因为每个课外小组至少有一名学生参加，而每名学生参加几个课外小组不限，所以，每个小组都可能分配到1个、2个、3个学生，即每个小组共有

$C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$ 种分配方法

根据乘法原理可得到解决．

**解**：(1)考虑甲、乙、丙3个学生，分三步进行分配，每步有4种分配方法，故由乘法原理，不同的分配方法有

$N=4\times4\times4=64$(种)

**答**：有64种不同的分配方法．

(2)**解法一**：以学生为主考虑

考虑甲、乙、丙3个学生，分三步进行分配，第一步，分配甲有4种分法，第二步，分配乙有3种方法，第3步，分配丙有2种方法，由乘法原理，不同的分配方法有

$N=4\times3\times2=24$(种)

**解法二**：以课外小组为主考虑

考虑四个课外小组，分四步进行，第一步，无学生参加的那个小组有4种选法，第二至第四步，剩下的三个小组，每一组挑选一名学生，挑选的种数依次有3种、2种、1种，由乘法原理，不同的分配方法有

$N=4\times3\times2\times1=24$(种)

**答**：有24种不同的分配方法．

(3)**解**：考虑 $A$、$B$、$C$、$D$ 四个课外小组，分四步进行分配，第一步分配学生到 $A$ 课外小组有分配到1个、2个、3个学生的情况，

根据加法原理，分配方法共有 $C_3^1+C_3^2+C_3^3=7$ 种，同理，第二、三、四步的分配方法均有 7 种，根据乘法原理，不同的分配方法有

$$N=7\times7\times7\times7=7^4=2401(\text{种})$$

**答**：有 2401 种不同的分配方法.

**说明**：(1)对于比较复杂的加法、乘法原理的应用题来说，选择合适的对象进行分类或分步是解决问题的关键. 因此，解题后，要加强反思，悟出规律，逐步做到恰当分类，合理分步.

(2)本例(3)是一道有重复排列的问题. 从 $n$ 个不同元素中可以重复地选取 $m$ 个元素，按照一定的顺序排成一排，叫做从 $n$ 个不同元素中取出允许重复的 $m$ 个元素的重复排列. 与不重复排列相比，被选的 $n$ 个元素互不相同这一点是共同的，不同的所选的 $m$ 个元素，一个要求互不相同，一个无此要求. 运用乘法原理，重复排列数公式为

$$N=\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{m个}=n^m$$

这里 $n,m$ 为正整数，但没有 $m\leqslant n$ 的限制.

重复排列问题的应用很广，如电话号码、密码等问题均与其有关. 做重复排列问题时，首先要把题意分析清楚，明确以谁为主来考虑问题，正确判断出哪一个做底数 $n$，哪一个做指数 $m$，不可混淆.

**例 3** 一个盒子里有 4 个分别标有号码 1，2，3，4 的球，每次取出一个，记下它的号后再放回盒子中，共取放 3 次.

求(1)3 次中最大标号不超过 3 的取法有多少种？

(2)3 次中最大标号恰是 3 的取法有多少种？

**分析**：这是一道重复排列的问题，在(1)中，球取了 3 次，每次不超过 3 的取法有 3 种，故由乘法原理可得解决.

(2)中，若进行分类，有三种情况. 即 3 次中最大标号是 3 的出现情形分别有 1 次、2 次、3 次. 若出现一次 3，则有 $C_3^1\times2\times2=12$ 种. 若出现 2 次 3，则有 $C_3^2\times2=6$ 种. 若出现 3 次 3，则有 $C_3^3=1$ 种，由加法原理有 $12+6+1=19$ 种. 另一种解法，若考虑最大标号不超过 2 和 3 的两种情形，则可更简单些.

**解**：(1)由于 3 次取法中，最大标号不超过 3，而 3 个位置可重复，故有 $3\times3\times3=3^3=27$ 种.

(2)同理,最大标号不超过 2 的取法是

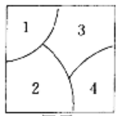
$2\times2\times2=2^3=8$ 种

故最大标号恰是 3 的取法总数为:

$3^3-2^3=19$ 种.

**说明**:一般情形下,一个盒子里若有 $m$ 个分别标有号码 $1,2,\cdots,n$ 的球,每次取出一个,记下它的号码后再放回盒子中,从中取 $n$ 次,则记录的号码最大的恰为 $K$ 的取法有 $K^n-(K-1)^n$ 种.

**例 4**　用 5 种不同的颜色去染图中标有 1 至 4 号的平面,要求每个区域都必须染色,一个区域只染一种颜色,并且相邻的区域不能染相同的颜色,分别求图甲、乙中不同的染色方法总数.



图甲

图乙

**分析**:完成图甲的染色问题,可分成四步完成,先涂 1 号区域有 5 种涂法;再涂 2 号区域因其和 1 号区域相邻,故有 4 种涂法;后涂 3 号区域,它和 1 号、2 号区域均相邻,故有 3 种涂法;最后涂 4 号区域,因其和 2 号,3 号区域均相邻,故有 3 种涂法,根据乘法原理可得解.

完成图乙的染色问题,表面上看来和甲相似,实际都不然.若仿甲完成的思路,1 号、2 号、3 号区域分别有 5 种、4 种、4 种涂法,但涂 4 号区域却难以确定涂法的总数,原因是若 2 号、3 号区域涂相同的颜色,4 号区域就有 3 种涂法,若 2 号、3 号区域涂不同的颜色,4 号区域则有 2 种涂法,所以此题的解决,必须先进行分类,后进行分步,运用加法原理和乘法原理解决.

**解**:图甲中,按 1、2、3、4 号区域顺序涂色,分别有 5、4、3、3 种涂法,根据乘法原理,涂法总数为

$5\times4\times3\times3=180$ 种

图乙中,分成两种情况,第 1 类情况,当 2 号、3 号区域涂相同的颜色时.先涂 1 号区域有 5 种涂法;同时涂 2 号、3 号区域,有 4 种涂法;再涂 4 号区域有 3 种涂法,根据乘法原理有

$5\times4\times3=60$ 种.

第 2 类情况,当 2 号、3 号区域涂不相同的颜色时.先涂 1 号区域有 5 种涂法;涂 2 号区域有 4 种涂法;涂 3 号区域有 3 种涂

法；涂 4 号区域有 2 种涂法；根据乘法原理有

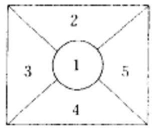
$5\times4\times3\times2=120$ 种.

根据加法原理，完成图乙共有

$60+120=180$ 种不同的涂法.

**答**：完成图甲、乙均有 180 种不同的染色方法.

**说明**：平面区域的染色问题若能用加法原理、乘法原理解决，则相对于其他方法明显要简单一些. 若在此题条件下去染图丙，同样可仿上解决. 第 1 种情形，若 2、4 区域涂色相同，先涂 1 号区域，有 5 种涂法，再涂 2 号、4 号区域，有 4 种涂法，后涂 3 号、5 号区域，各有 3 种涂法，共有 $5\times3\times3\times3=180$ 种.



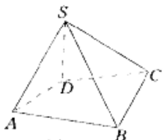
图丙

第 2 种情形，若 2 号、4 号涂色不同，则 1 号、2 号、4 号、3 号、5 号区域涂色总数共有 $5\times4\times3\times2\times2=240$ 种.

故图丙共有 $180+240=420$ 种不同染色方法. 因此正确分类，是解决此种问题的关键.

**引申** 如将此类平面区域的染色问题引申至空间一组点的染色问题，应用加法、乘法原理仍可解决，如下例.

将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有 5 种染色可供使用，那么不同的染色方法总数是多少？



（图丁）

**解**：由题设，四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点 $S$、$A$、$B$ 所染颜色互不相同，由乘法原理它们共有 $5\times4\times3=60$ 种染色方法（如图丁）.

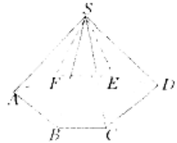
当 $S$、$A$、$B$ 已染好时，不妨设其颜色分别为 1、2、3，若 $C$ 染颜色 2，则 $D$ 可染颜色 3、4、5 之一，有 3 种染法；若 $C$ 染颜色 4，则 $D$ 可染颜色 3 或 5，有 2 种染法；若 $C$ 染颜色 5，则 $D$ 可染颜色 3 或 4，也有 2 种染法. 可见当 $S$、$A$、$B$ 已染好时，$C$ 与 $D$ 不有 7 种染法. 从而，总的染色方法数为 $60\times7=420$ 种.

**例 5** 如果把两条异面直线看成"一对"，那么六棱锥的棱所在的 12 条直线中，异面直线共有

A. 12 对　　B. 24 对　　C. 36 对　　D. 48 对

**分析**：底面上的六条棱所在的直线共面，则每两条之间不能构成异面直线

六条侧棱所在的直线共点，每两条之间也不能构成异面直线.

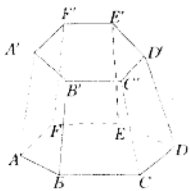



只有底面上的棱和与其不相交的侧棱所在直线，才能构成异面直线.

**解**：若取一条侧棱如 $SA$，则共有 $EF$、$DE$、$CD$、$BC$ 四条棱，它们所在直线与 $SA$ 所在直线异面，共有 4 对，根据乘法原理，构成异面直线有 $6\times4=24$（对）.

∴应选($B$).

**引申**　(1)若将本题六棱锥改为六棱台，那就有三种可能性，即上底面棱所在的直线与下底面棱所在的直线异面，上底面、下底面棱所在的直线分别与侧棱所在的直线异面，根据乘法原理，它们分别有 $6\times4$，$6\times4$，$6\times4$ 对，根据加法原理共有 72 对异面直线.




(2)若将本题改为"六棱锥 $S-ABCDEF$ 中的 7 个点 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$，若将其中每两点连成一直线，组成异面直线有多少对?"情况就比原题复杂得多，直接象刚才那样用乘法原理就很难解决. 我们就从另一个角度来考虑，若取其中不共面的四个点，则将这 4 个点每两点连线可构成一个三棱锥，在这个三棱锥中有 3 对异面直线，因为六棱锥底面可构成 $C_6^3$ 个三棱锥，根据乘法原理总共有异面直线 $3C_6^3$ 对，即 60 对.

类似此问题，如在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，8 个顶点可构成 $C_8^4-12$ 个三棱锥，每个三棱锥四个顶点每两个顶点连线，可构成三对异面直线，所以可组成异面直线 $3(C_8^4-12)=174$ 对. 其它类似问题，读者可仿此解决.

**例 6**　某班有一学习互助小组，有 10 人参加，每两人结成一对，有多少种不同的结对方法?

**分析**：要完成的事情是"有 10 位同学，两两结成对子，共结成 5 对". 若每结成一对看成一步，五步即能完成该事，因此是分步问题，应用乘法原理.