·企业现代经营管理丛书·企业现代经营管理丛书·

孔 [illegible]

线性规划在企业管理中的应用

福建人民出版社

线性规划在企业管理中的应用
孔 江 波
*
福建人民出版社出版
（福州得贵巷27号）
福建省新华书店发行
福建新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32 6.25印张 135千字
1986年5月第1版
1986年5月第1次印刷
印数：1—7,160
书号：4173·83　　　定价：1.00元

前　言

为企业（包括乡镇企业）的经营管理工作者编写一套《企业现代经营管理丛书》，是我们多年的愿望。在福建人民出版社国民经济编辑室同志们的热情关心和帮助下，这套丛书现在陆续与读者见面了。趁此机会，我们将本丛书的不足之处，事先申明如下：

1.本丛书是通俗读物。我们编写的宗旨是吸引读者乐于涉足现代化科学管理“丛林”。为此，在论述方面，我们舍去了对概念、定义的严密论证，力求通俗易懂。

2.本丛书的主要读者对象是具有中等文化水平的经营管理人员。因此我们尽可能避免使用高深的理论和繁杂、较难的数学公式，把文字论述作为重点。这样，文章就显得不够简洁，同时有的内容仅仅是一个大概的介绍。这对于文化程度较高的读者来说，在读了本书之后，将会产生种种不满足的感觉。

3.因为是丛书，在各篇内容上既要求有相对的独立性，又要求具有必要的系统性，因此各篇之间难免有部分内容会重复。

4.本丛书涉及的企业现代经营管理的内容，面广，难度大。我们个人的理论水平和实践经验都有限。为了写好这套丛书，我们参考了大量的专著，论文和经验总结，其中有的整段被我们直接引用。由于参考书数量很多，本丛书的各篇篇幅又较少，因此不一一列出参考书目录。也趁此机会，向

被本丛书直接引用和参考的原作作者们，统表谢意。如有引用不当之处，或论述错误的地方，祈请批评指正。

作　者

1985年4月于南昌

目　录

一、概　　述

（一）线性规划的作用与由来

在企业生产经营活动中，经常会遇到以下一些问题：

——面临批量订货而资源有限，如何合理利用资源才能使经济效益最大。

——任务增加而生产能力不变，如何组织调度才能使效率最高。

——拥有一笔连续投资，如何确定使用时间及数量，才能使投资效益最好。

——根据生产能力、仓贮量、市场需求，如何安排生产才能使成本最低。

——生产含有多种定量成份的产品，如何配制才能使费用最小。

——在库存的棒料、板料上截取各种规格的零件、毛坯，如何下料才能使残料最少。

——在多个供需点间运送物资，怎样调运才能使总运费最低。

——在企业内部，如何安排物料堆放处、产品检验点、设备的布局，才能使辅助工时最省。

……

这些都是管理者必须作出决策的现实问题。由于各企业的内部因素和外部条件互相牵掣，纵横交错，十分复杂。单凭管理者的经验，仅靠定性分析来进行决策，已无法圆满解

决上述那些问题。从以往的实践可以看到，由于缺乏定量的决策方法，往往造成计划管理不当，在人力、物力、财力等方面都造成惊人的浪费，严重影响了企业的经济效益。

线性规划作为辅助决策的一个数学工具，可以帮助管理者综合考虑这些问题中的各个因素，定量分析各因素与预期目标之间的关系，从许多可行的方案中找到最优方案。总之，在企业的生产计划、组织调度、物质运输、内部布局、投资规划等方面，线性规划可以帮助管理者统筹兼顾，总揽全局，以最少的人力、物力、财力取得最大的效益。

线性规划和其他学科一样，是由社会发展的需要而产生的。1939年，苏联数学家康特洛维奇在研究有关生产实际问题的基础上，写出《生产组织与计划中的数学方法》一书，提出了一些解决生产组织与计划中有关问题的数学方法。1941年，他又和美国数学家希奇柯克研究了解决物资调运等问题的数学方法。康特洛维奇的研究成果为线性规划的理论和方法奠定了基础。1947年，美国数学家丹捷格提出了求解一般线性规划问题的方法——单纯形法。此后，线性规划的理论才趋于成熟，并开始在实际工作中广泛应用。特别是电子计算机的高速发展，解决了复杂型线性规划问题的求解方法，使线性规划的应用领域更加广泛。现在，小自一个企业班组的日常工作安排，大到整个国民经济计划的编制和社会各部门的管理，线性规划作为一种数学方法，起了积极的作用。

目前，线性规划作为运筹学的一个分支，已经成为现代管理科学中一门理论比较完整、方法比较成熟的学科。国外把线性规划列为管理人员进行系统分析和经营决策必须掌握的一门优化技术；国内高等院校的管理工程专业，也把线性规划列为必修课程。

（二）线性规划的基本概念

"线性"是数学中的一个常用词，它表示两个变量之间的一种相互关系。所谓线性关系，简单地讲就是比例关系，即两个变量按一定的比例增加或减少。这种关系若用图形来表示，就是一条直线，故称线性关系。例如生产1只茶壶需要2公斤瓷土，生产10只茶壶就需要20公斤瓷土。产量越大，需要的瓷土就越多，而且始终按比例增长，这就是说，产量和原料之间存在着线性关系。这种关系若用方程来表示，就称为线性方程。线性规划正是以这种简单的线性关系作为基础。

设茶壶的产量为x，瓷土的消耗量为y，它们之间的关系用线性方程表示，即

$$y=2x$$

假如再增加几个因素：生产一个花瓶需要3公斤瓷土，生产一个汤盆需要4公斤瓷土。设茶壶的产量为 x_1，花瓶的产量为x_2，汤盆的产量为 x_3，瓷土的消耗量y和各产品产量的关系用线性方程表示，即

$$y=2x_1+3x_2+4x_3$$

如果企业只要求按产量计算一下总共需要多少瓷土，那么只要用该方程就可求得，（已知x_1、x_2、x_3，求y）。这也是企业过去对原料定量采购的做法。

在现实中，各种资源总是有限的。假定采购到的瓷土有限，如何安排生产（已知y，求x_1、x_2、x_3），才能使这一有限的资源创造的产值最大或者获利最多？这就涉及到资源的合理分配问题。显然，这个问题用上述线性方程已无法解决。因为求解多个变量时，必须具备由与变量数量相等的方程式所

组成的方程组，才能得到一个确定的解。象这种变量个数多于方程式个数的问题，用初等代数的方法计算，其解有无数多个。线性规划所研究的，就是如何从这无数多个解中，找到一个能够满足要求的确定的解。

把上述问题再具体一些：已知茶壶、花瓶、汤盆的单位售价分别为1.5元、2元、5元，而瓷土只能采购到2,500公斤，并且产品订货合同要求茶壶的产量不得少于200件。怎样安排生产才能使总产值最高呢？

这就是一个简单的可以用线性规划来解决的生产计划问题。该问题有两个限制条件：

一是茶壶、花瓶、汤盆所耗瓷土的总量，不能超过瓷土的采购量。定量地表示即

$$2x_1+3x_2+4x_3\leqslant 2,500 \qquad (1)$$

二是茶壶的产量应满足订货的要求。定量地表示即

$$x_1\geqslant 200 \qquad (2)$$

该问题所希望达到的目标是总产值最大。总产值Z可以定量地表示为

$$Z=1.5x_1+2x_2+5x_3 \qquad (3)$$

这个问题，实际上就是求在满足两个限制条件的基础上，能使总产值获最大值的各产品产量。

这种把实际问题中的各种限制条件，如资源量的限制、需求量的限制等，用线性等式或不等式分别表示出来，在线性规划中称它们为约束条件，如前面的(1)、(2)式就是约束条件；把实际中希望达到的目标，如利润最大、成本最低等等用线性函数表示出来，称为目标函数，如上述的(3)式就是目标函数。寻找在约束条件下能达到目标的最优方案的数学方法，就叫做线性规划。

二、资源合理利用

企业要进行生产，首先要有原材料、能源等资源，而目前许多中小企业的资源供应恰恰受到很大的限制，企业因原材料不足而开工不足，生产能力难以发挥，经济效益受到很大影响。在这种情况下，合理利用有限的资源，对于缓解供求矛盾，提高经济效益将起很大的作用。

所谓合理利用资源，就是根据企业拥有资源的数量，各种产品消耗资源的多寡，以及所创造价值的大小来全盘考虑，合理分配，做到材不浪费、能无虚耗，使有限资源发挥最大的作用。不同产品对各种资源的消耗千差万别，经济效益也相差很大。安排生产计划时，若仅因某产品利润高就增加其产量，则可能由于该产品对某一种资源的消耗过多而影响其他产品的产量，使总体效益下降；若仅因某产品对某一种价值较高的资源消耗多就压缩其产量，则又可能由于另一种资源未被充分利用而降低总产值，同样得不到最佳的总体效益。若企业的产品品种较多，需要考虑的资源的种类较多，那么要合理分配有限资源，谋取最好的经济效益，便是十分复杂的决策问题。然而，借助线性规划的方法，这类问题可以较容易地得以解决。

〔例2—1〕 红光机械厂目前只生产甲、乙两种产品。甲产品每件耗电0.3万度，耗煤0.5吨，耗生铁1吨，需要生产工时600个工作日；乙产品每件耗电0.5万度，耗煤0.2吨，需要直径100毫米、长800毫米的圆钢15根，长600毫米的圆钢

45根，需要生产工时240个工作日。该企业下季度可供生产这两种产品的能源、原材料以及生产工时都受到一定限制。计划可供量为：电15万度，煤9.8吨，生铁15吨，直径100毫米、长2,000毫米的圆钢500根，可利用的工时18,000个工作日。已知甲产品每件可获利润5,000元，乙产品每件可获利润3,000元。在下季度的生产中，如何分配这些资源才能使总利润最大？

为了清楚起见，将所有的已知条件用表的形式表示（见表2—1）：

表2—1

单位产品消耗量 / 产品 / 资源	甲	乙	可供量
电（万度）	0.3	0.5	15
煤（吨）	0.5	0.2	9.8
生铁（吨）	1		15
ϕ100圆钢（*mm*·根）		800*mm* 15根 600*mm* 45根	2000*mm* 500根
技术工人工时（天）	600	240	18,000
单位产品利润（元/件）	5,000	3,000	

按传统的方法对这个问题进行定性分析：每件甲产品比乙产品多66%利润，而且资源的耗费量各有多寡，并不存在很大的差别。因此要获得最大利润，首先应尽量满足甲产品的资源需要。但由于生铁可供量的限制，甲产品只能生产15件，剩下的资源数煤的限制最大，只能生产11件乙产品，因

此下季度的生产利润为：

$$0.5\times15+0.3\times11=10.8\ (万元)$$

现在的问题是，这种方法所确定的生产计划是不是最佳方案？如何找出最佳方案？如果用线性规划的方法，就很容易解决这个问题。

以下就结合例子逐一介绍典型线性规划问题的特殊解法。

（一）图 解 法

图解法是利用坐标图来求解线性规划问题的一种简易方法。线性规划中的约束条件都是线性等式或不等式，目标函数也是线性函数。在平面直角坐标系中，每个线性方程都可以用相应的一条直线表示，每个线性不等式都可以用一个半平面表示。图解法的解题方法，就是先按实际问题列出数学表达式，然后利用代数式与图形一一对应的关系描绘出相应的图形，再从图中找出合符要求的坐标点，从而确定最优解。

图解法简单直观，不仅可以帮助我们求解两个变量的线性规划问题，而且有助于了解求解复杂线性规划问题的基本原理。但用这种方法，一般只适合于解决含有两个变量的线性规划问题。

〔例2—2〕 红光机械厂金工车间，加工甲、乙两种零件，须分别经过车、铣、磨三道工序。甲、乙两种零件在各类机床上加工所需的时间、各类机床在计划期内的有效台时和两种零件的单价如表2—2所示。怎样安排甲、乙两种零件的产量，才能使计划期内的产值最高？

表2—2

单位零件加工时间（小时） 机床 / 零件	车床	铣　床	磨　床	零件单价（元）
甲	3		5	50
乙	6	6	4	60
有效台时	240	180	310	

这是一个在设备加工能力限制的条件下，安排甲、乙两种零件的产量，以求合理分配设备加工时间，使产值最高的生产计划问题。

为了使这个现实问题能转化为数学问题来求解，先列出它的数学表达式。线性规划的数学表达式包括约束条件和目标函数两部分，因此，列数学表达式可分三步进行：选择变量，确定约束条件，建立目标函数。

（1）选择变量

一般选择需要确定的量作为变量。它既与约束量有关，又与目标值有关。

例2—2约束量是设备有效台时，目标值是总产值最大。所要确定的是零件的产量，而产量与设备有效台时，总产值均有关。根据选择的原则，可设零件甲的产量为x_1件，零件乙的产量为x_2件。

（2）建立约束条件方程组

所谓约束条件，就是实际问题中的限制条件。建立约束条件方程组，就是把这些限制量和所有变量之间的关系用线性等式或不等式表示出来。

例2—2约束量有 3 个，即车床有效台时240，铣床有效台时180，磨床有效台时310。

在车床上加工甲零件每件需要 3 台时，x_1件则需要$3x_1$台时；乙零件每件需要 6 台时，x_2件则需要$6x_2$台时。因此甲乙两种零件总共所需的加工时间为$3x_1+6x_2$，它们不能超过计划期内车床的有效台时240，则有：

$$3x_1+6x_2\leqslant 240$$

同理，在铣床上甲乙两种零件总共所需的加工时间为$6x_2$，它不能超过计划期内铣床的有效台时180。则有：

$$6x_2\leqslant 180$$

同理，磨床的约束条件为：

$$5x_1+4x_2\leqslant 310$$

此外，甲乙两种零件的产量不能是负数，则有：

$$x_1\geqslant 0 \qquad x_2\geqslant 0$$

由此便得到所有约束条件构成的方程组：

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2\leqslant 240 \\ 5x_1+4x_2\leqslant 310 \\ 6x_2\leqslant 180 \\ x_1\geqslant 0 \\ x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

（3）建立目标函数

所谓建立目标函数，就是把要求达到的目标与变量之间的关系用数学式表达出来。在实际问题中，目标通常是产值最大或利润最大，成本最小或费用最小，等等。

例 2—2 目标是产值最大。已知甲零件单价为50元，乙零件单价为60元，则甲乙两种零件的总产值Z应是：

$$Z=50x_1+60x_2$$

这就是目标函数。

该问题的完整数学表达式如下所示：

求x_1、x_2的值，使它们满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}
3x_1+6x_2\leqslant 240 & (1)\\
5x_1+4x_2\leqslant 310 & (2)\\
6x_2\leqslant 180 & (3)\\
x_1\geqslant 0 & (4)\\
x_2\geqslant 0 & (5)
\end{cases}
$$

并使目标函数$Z=50x_1+60x_2$的值最大。

有了数学表达式，就可利用作图的方法来求解。

先在直角坐标系中画出约束条件所限定的可行区域。

取一直角坐标系，横轴代表零件甲的产量x_1，纵轴代表零件乙的产量x_2。

画不等式(1)$3x_1+6x_2\leqslant 240$的区域。由于该约束条件为不等式，故应先将不等式(1)取等号，变成方程：

$$3x_1+6x_2=240 \qquad (1')$$

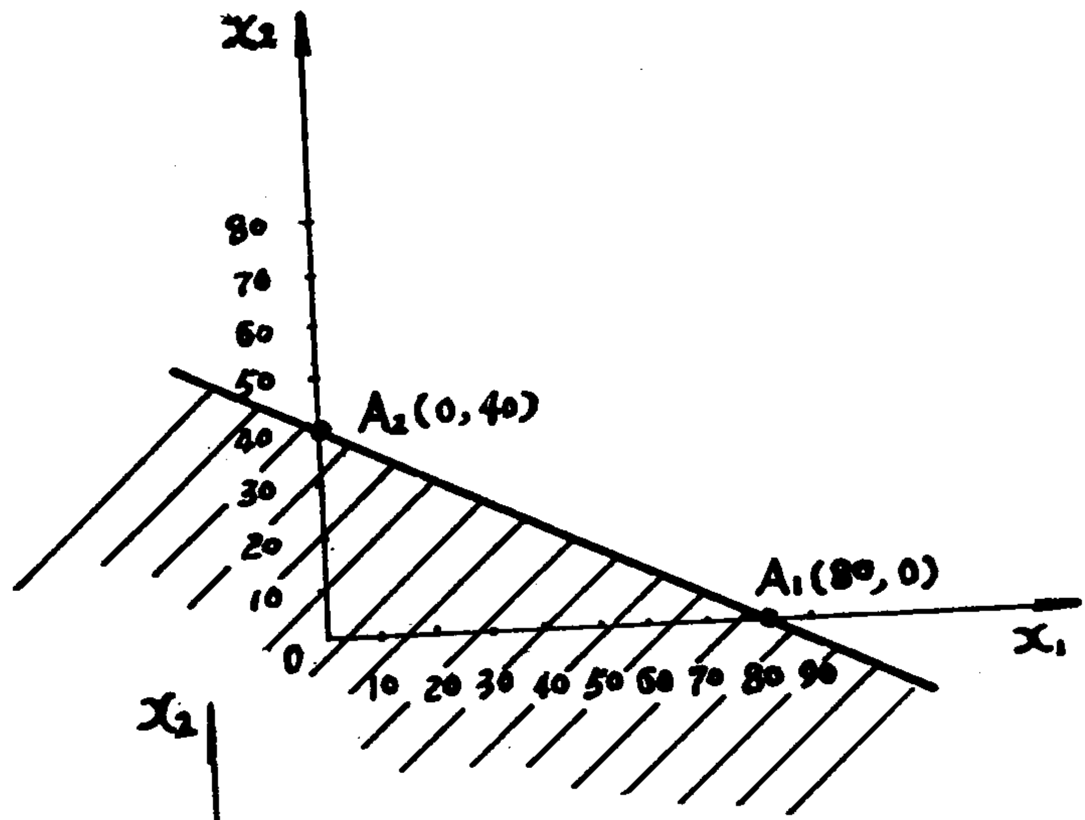
方程(1′)被称为该约束条件的临界方程，它表示一条直线，这条直线就是约束条件的临界线。在坐标系中很容易找到满足(1′)的两个点$A_1(80,0)$、$A_2(0,40)$（图2—1）。

连接A_1、A_2两点，就可在坐标系中画出方程(1′)所代表的直线。这条直线就是约束条件(1)的临界线。满足约束条件(1)的区域，即为图中临界线下方用阴影表示的部分。

同理，可以画出满足约束条件(2)$5x_1+4x_2\leqslant 310$的区域（图2—2）。

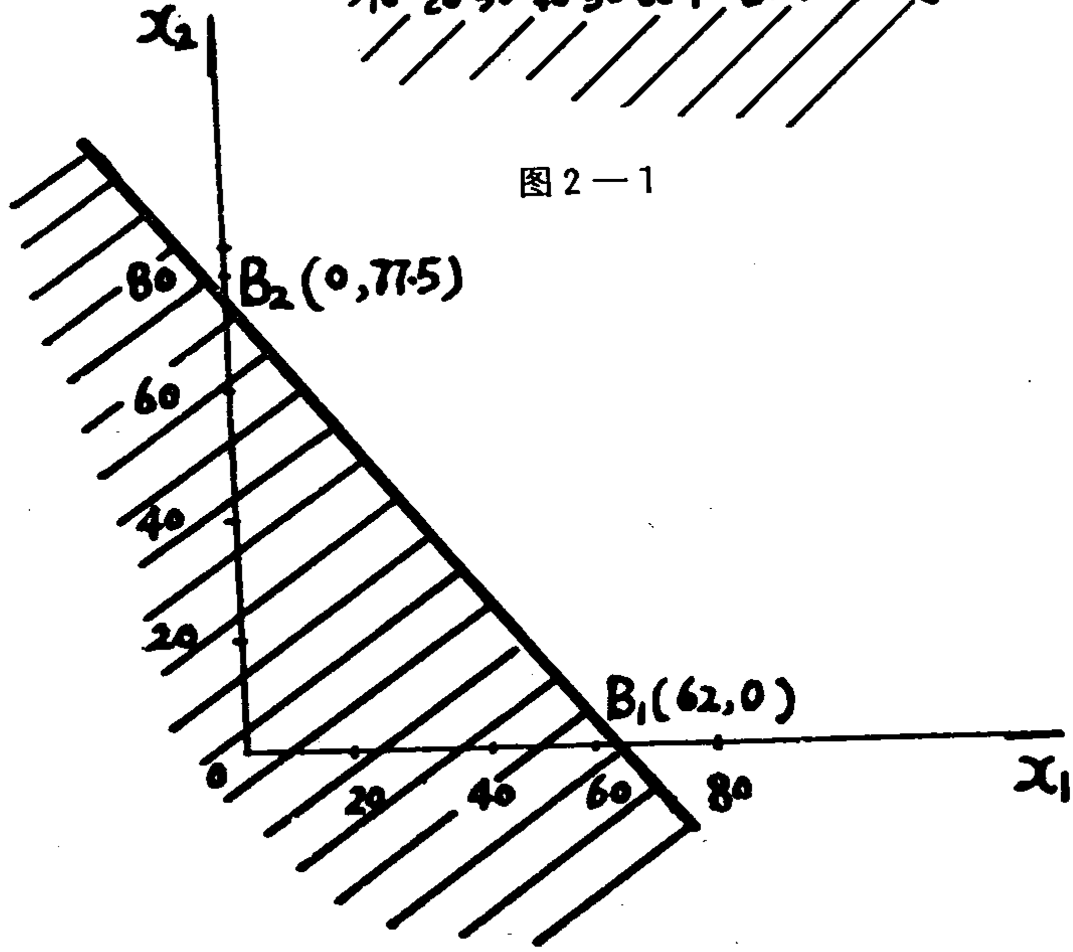
满足约束条件(3)$6x_2\leqslant 180$的区域（图2—3）。

约束条件(4)$x_1\geqslant 0$和约束条件(5)$x_2\geqslant 0$所表示的区域（图2—4）。



x_2
80
70
60
50
40
30
20
10
0
$A_2(0,40)$
$A_1(80,0)$
x_1
10 20 30 40 50 60 70 80 90

图 2—1



x_2
80
$B_2(0,77.5)$
60
40
20
0
$B_1(62,0)$
x_1
20 40 60 80

图 2—2

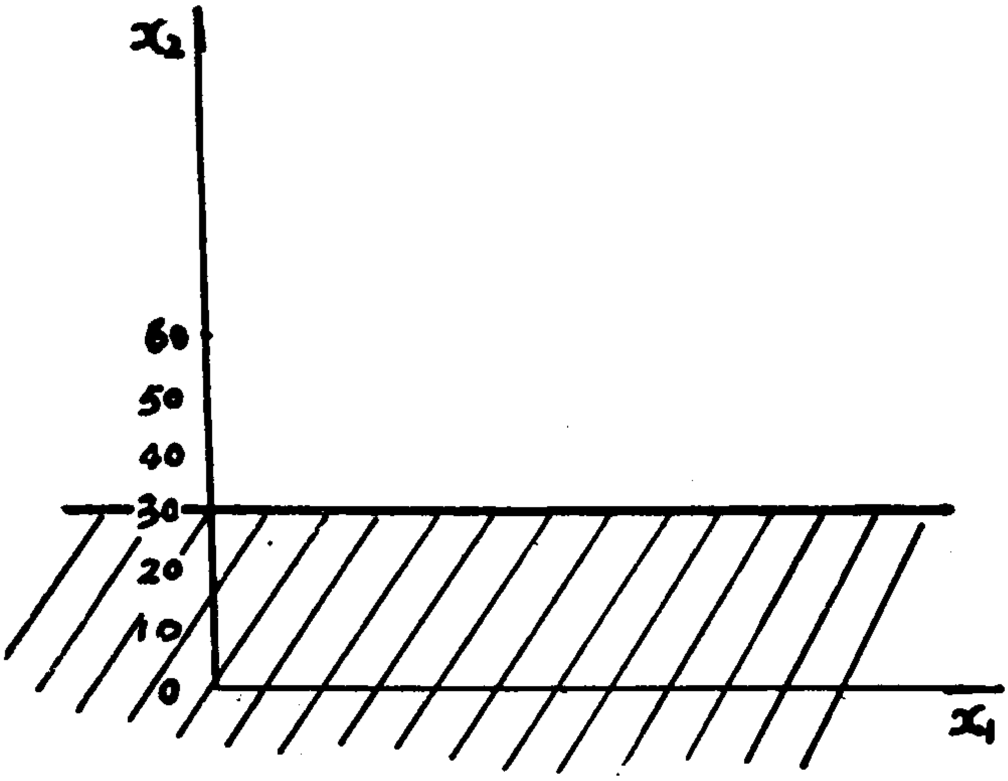


图 2—3

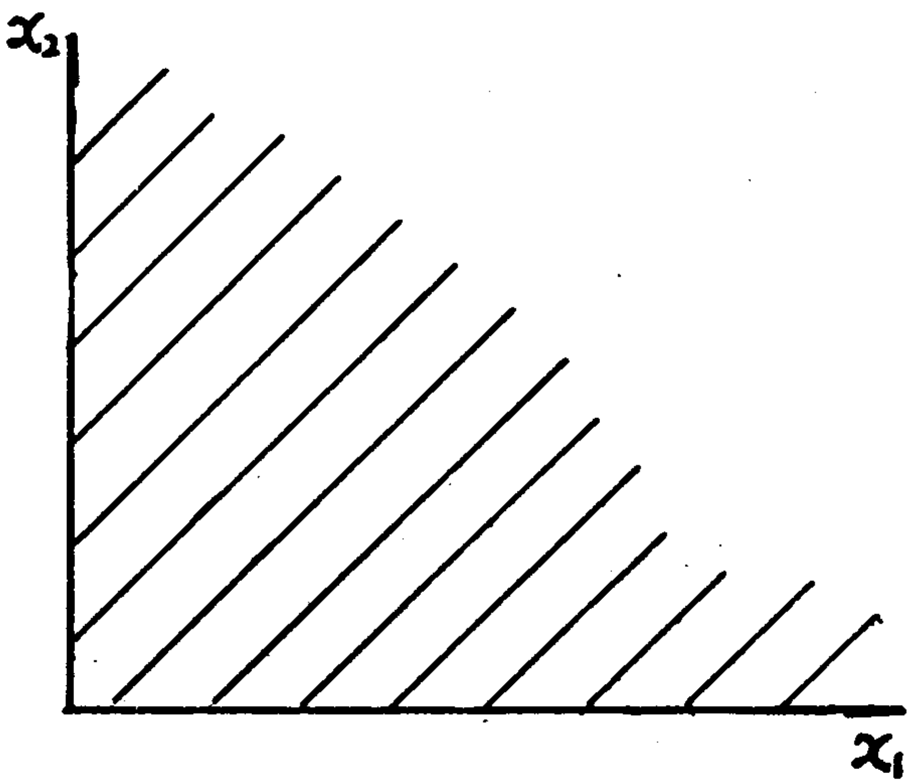


图 2—4