中考数学压轴题解析

祖 津 主编

航空工业出版社

中考数学压轴题解析

祖　津　主编

航空工业出版社

1995

（京）新登字161号

内 容 简 介

本书对近年来我国各省市中考数学试题中的典型综合题（俗称压轴题）进行了详细的分析解答，对解题的思路进行了精辟的分析与探讨．另外书中还列举了包括代数、几何、三角在内的各类综合题100个，并给出了详细解答．对考生解好关键的压轴题，升入理想的重点中学将起到良好的促进作用．

图书在版编目（CIP）数据

中考数学压轴题解析/祖津主编．-北京：航空工业出版社，1995.1

ISBN 7-80046-851-8

Ⅰ.中… Ⅱ.祖… Ⅲ.数学课-初中-试题-解题-升学参考资料 Ⅳ.G 624.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第14328号

航空工业出版社出版发行
（北京市安定门外小关东里14号 100029）
北京地质印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售
1995年1月第1版　　1995年1月第1次印刷
开本：787×1092 1/32　印张：9.5625　字数：225 千字
印数：1—7500　　定价：8.00 元

本书编著者

王永俊　田鸣凤　张玉梅　黄怡琴
杨晓棣　张　君　白　云　袁为民

目　　录

第一部分　如何解好综合题(压轴题)

在数学的学习中，既要注意学好基础知识又要注重培养能力．而综合题对这两方面都是有助益的．

学生对解综合题，存在着一种矛盾心理，既喜欢又畏惧．这是因为解综合题是解数学题的一个重要组成部分．它内容丰富，富有新奇性和挑战性．通过解综合题可以复习和较全面地掌握基础知识和基本技能，更深刻地领悟和理解数学思想和方法，提高分析问题和解决问题的能力，因此，学生大多喜欢解综合题．但是综合题涉及到多方面的数学知识和灵活多样的技能技巧．需要较强的分析、联想、类比、计算、推理等能力，题目多是环环相扣，难度较大，经常出现“一环不慎，全局皆输”或“理无头绪，不好下手”的局面。因此，有些同学就产生了一种畏惧心理．

在学习解综合题时必须去掉畏惧心理，增强解题的兴趣和探索解题规律的意识．弄清什么是综合题，它有哪些类型和规律，以确立解综合题的策略．

一、什么是综合题

一般地说，如果一个题目涉及到较多数学知识，并需要利用某些数学思想数学方法求解的题目就是综合题。只涉及一科知识的综合题，叫做单科综合题；涉及不止一科知识的综合题，叫做跨科综合题．

在初中数学中的综合题，就题目所涉及到的知识范围而

言，有大的综合题与小的综合题，小的综合题一般较易解决，而大的综合题较难解决，为进一步探讨解综合题的规律，本文中所研究的综合题，一般是指较大的单科或跨科综合题。

二、综合题的结构及特点

1. 串联型综合题

某些综合题，其内在结构是由几个知识点或几个常规典型问题组合而成的，它们有时首尾相接，“串联”在一起，我们不妨叫它们“串联型综合题。这类问题一个明显的特征是，题目可以划分成几个独立的小题，解题过程可以是几个小题解法的组合。

例 1 已知：凸四边形$ABCD$中，$BC=DC$，对角线AC平分$\angle BAD$。

（1）如图1-1，$CE\perp AB$，$CF\perp AD$，E、F是垂足。

求证：$\triangle BCE\cong\triangle DCF$；

（2）如果$AB=21$，$AD=9$，$BC=DC=10$。

求对角线 AC 的长；

（3）在四边形$ABCD$中，设$AB=a$，$AD=b$。问a与b的大小符合什么条件。这个四边形一定有外接圆，为什么？

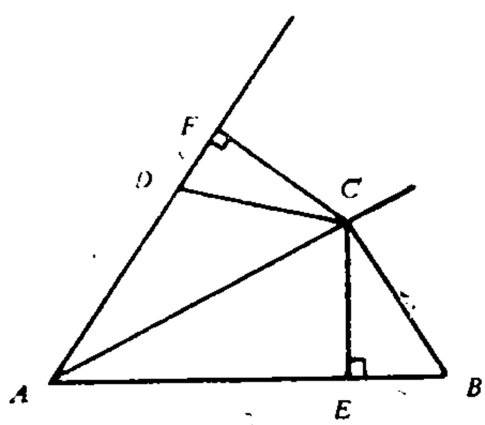

图 1-1

（上海市1993年中考试题）。

分析：显然这是一个串联型的单科综合题。（1）小题通过（H、L）易证两个三角形全等；（2）小题是已知四边形

的四边长，求对角线长；（3）小题是证在什么条件下有$\angle B+\angle D=180°$. 三个小题虽有关系，但基本独立，串在一起形成此题. 这就是典型的串联型综合题. 只要分段思路清楚便不难解决. 采取的办法是“各个击破”.

解：（1）$\because$ $CE\perp AB$，$CF\perp AD$，

$\therefore$ $\triangle BCE$和$\triangle DCF$ 都是直角三角形.

$\because$ AC 平分$\angle BAD$，$CE\perp AB, CF\perp AD$.

$\therefore$ $CE=CF$.

又 $BC=DC$，$\therefore$ $\triangle BCE\cong\triangle DCF(H、L)$.

（2）在$Rt\triangle AEC$ 和 $Rt\triangle AFC$中，

$CE=CF$（已证），$\angle CAE=\angle CAF$，$AC=AC$，

$\therefore$ $\triangle AEC\cong\triangle AFC$，则 $AE=AF$.

又 $AE=AB-BE$，$AF=AD+DF$，

设 $BE=x$，则 $DF=x$，

$\therefore$ $AE=21-x$，$AF=9+x$.

$\because$ $AE=AF$，

$\therefore$ $21-x=9+x$，得 $x=6$.

在$Rt\triangle BCE$中，

$$CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$$

在$Rt\triangle ACE$中，

$$AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{(21-6)^2+8^2}=\sqrt{289}=17.$$

（3）当$a\neq b$时，已知四边形$ABCD$一定有外接圆. 不妨设$a>b$.

在 AB 上截取 $AM=AD$，连结 CM，可证 $\triangle AMC\cong\triangle ADC$. 则$\angle AMC=\angle D$，$CM=CD$，

$\therefore$ $CM=CB$，从而$\angle BMC=\angle B$.

$\therefore$ $\angle AMC+\angle BMC=180°$，

$\therefore\quad \angle B+\angle D=180^\circ$，

$\therefore$ 四边形$ABCD$一定有外接圆。

同理可证：$a<b$时，结论也一定成立。

而$a=b$时，$\angle B=\angle D$，但不一定是直角，则结论不一定成立。

$\therefore$ 当$a\neq b$时，四边形一定有外接圆。

跨科综合题也有串联型的题目，如

例 2 已知关于x的方程$x^2-2mx+\frac{1}{4}n^2=0$，其中m、n分别是一个等腰三角形的腰与底边的长。

（1）求证：这个方程有两个不相等的实根；

（2）若方程两实根的差的绝对值是8，并且等腰三角形的面积是12，求这个三角形内切圆的面积。

分析：本题涉及方程的判别式、韦达定理、等腰三角形、三角形内切圆等知识，是代数与几何综合题。但很容易分成两个独立的小题。也属串联型的综合题。（1）小题较易用判别式解决；（2）小题需用$S_\Delta=\frac{1}{2}r(a+b+c)$解决。因$S_\Delta=12$，所以求出$a+b+c$的长度就成了解题的关键。

解：（1）证明：$\because\quad \Delta=4m^2-n^2=(2m+n)(2m-n)$

又 $m>0$，$n>0$，且$2m>n$，

$\therefore\quad (2m+n)(2m-n)>0$，即$\Delta>0$，

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的实根。

（2）解：设x_1，x_2是方程的两个实根，

则 $x_1+x_2=2m$，$x_1\cdot x_2=\frac{1}{4}n^2$，

$\therefore \quad |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{4m^2-n^2}=8. \qquad ①$$

由题意，得底边上的高的长为$\sqrt{m^2-\frac{1}{4}n^2}$，

$\therefore \quad \frac{1}{2}n\cdot\sqrt{m^2-\frac{1}{4}n^2}=12.$

即 $$n\cdot\sqrt{4m^2-n^2}=48. \qquad ②$$

由①、②得$n=6$.

又 $4m^2-36=64$,

$\therefore \quad m=\pm 5$.

$\because \quad m>0, \quad \therefore \quad m=5.$

$\because \quad S_\Delta=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

又 $a+b+c=2m+n=16$，$S=12$,

$\therefore \quad r=\frac{2S_\Delta}{2m+n}=\frac{2\times 12}{16}=\frac{3}{2}.$

$\therefore \quad S_{内切圆}=\pi r^2=\frac{9}{4}\pi.$

答：这个三角形的内切圆的面积是$\frac{9}{4}\pi$.

从以上两例可以看出，“串联型”综合题在解题结构上的特点是：题目可以划分成几个独立的小题，解题过程是几个小题独立解法的组合.

2．并联型综合题

有些问题的解决过程涉及较多知识点，并需应用不同知识范围或学科，以及不同学习阶段学习的数学思想和方法才能获得解决．在解题过程中，各知识点和数学方法交织在一

起，类似“并联”的结构。如

例 3 已知：直线$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$和x轴、y轴分别交于点A、点B，以线段AB为边在第一象限内作等边三角形ABC。如果在第一象限内有一点$P\left(m,\ \frac{1}{2}\right)$，且$\triangle ABP$的面积与$\triangle ABC$的面积相等，求$m$的值。（图1-2）

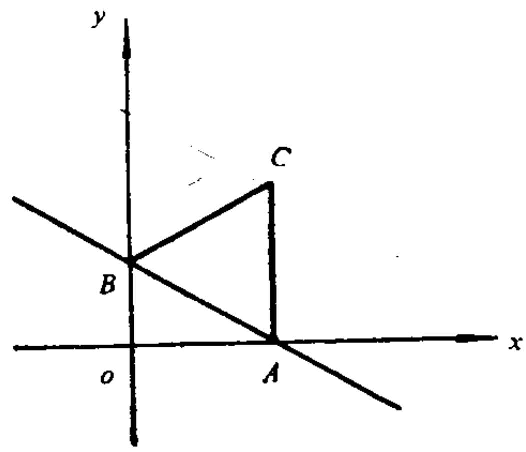

图 1-2

分析：本题是并联型综合题，代数与几何知识交织在一起，涉及函数、方程、勾股定理、三角形面积等较多知识，错综复杂，不易下手。但若求出A、B的坐标，进而求出$S_{\triangle ABC}$再经转换也能逐步解决。

解：$\because$ 直线$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$与x轴、y轴分别交于点A、B，

$\therefore$ 取$x=0$，得$y=1$；

取$y=0$，得$x=\sqrt{3}$。

$\therefore$ 点A、点B的坐标分别为（$\sqrt{3}$，0），（0，1）。

$\therefore$ $OA=\sqrt{3}$，$OB=1$。

在$\mathrm{Rt}\triangle ABO$中，由勾股定理，得

$$AB=\sqrt{AO^2+OB^2}=2.$$

$\because$ $\triangle ABC$为等边三角形，

$\therefore$ $AB=AC=2$，$\angle BAC=60°$

$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

$\because\quad S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$,

$\therefore\quad S_{\triangle ABP}=\sqrt{3}$.

作$PD\perp Ox$于D，则 $PD\parallel Oy$.

$\therefore$ 四边形$BODP$是直角梯形.

$$OD=m,\ AD=OD-OA=m-\sqrt{3}.$$

$$S_{梯形BODP}=\frac{1}{2}(OB+DP)\cdot OD$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)m=\frac{3}{4}m.$$

$\because\quad S_{梯形BODP}=S_{\triangle BOA}+S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APD}$,

$\therefore\quad \frac{3}{4}m=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times(m-\sqrt{3})\times\frac{1}{2}$

解得 $$m=\frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore\quad m=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

有的综合题更能体现数学各科知识的互相渗透、互相服务、互为工具的特点，不同的知识在解决同一问题的过程中自然地结合在一起，互为依托、互相融和。如

例 4 在$\triangle ABC$中，$\angle B=120°$，$BA=8$ cm，$BC=12$ cm，动点P从点A出发，沿AB向B运动，动点Q从点C出发，沿CB向B运动，如果点P的速度是1 cm/s(厘米/秒)，点Q的速度是2 cm/s，它们同时出发，求（如图 1-3）：

（1）几秒钟以后，$\triangle PBQ$的面积是$\triangle ABC$的面积的一半？

（2）这时，P、Q两点的距离是多少？

分析：这是一个用代数、三角知识解几何问题的综合题．本题动中有静、静中有动．可设点P和Q是t秒以后所处的位置如图1-3，为了表述$\triangle BPQ$和$\triangle ABC$的面积，线段PQ的长等几何量，都要列出关于t的代数式；为了求出满足条件t的值，则要借助关于t的方程；为了求出PQ的长，则需借助于余弦定理．

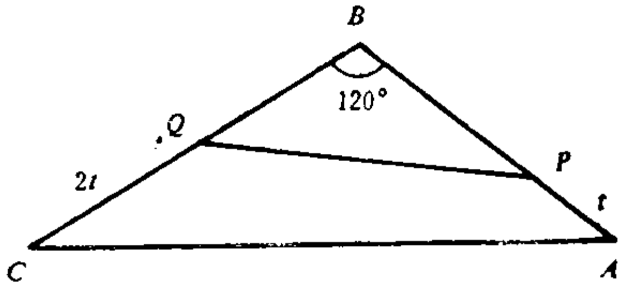

图 1-3

解：设t秒后，$\triangle BQP$的面积是$\triangle ABC$的面积的一半，则$CQ=2t$，$AP=t$，根据题意，得关于t的方程

$$2\times\frac{1}{2}(12-2t)(8-t)\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 8\times 12\times\sin 120^\circ$$

解这个方程，得

$$t^2-14t+24=0,$$

$\therefore\quad t_1=2,\ t_2=12.$

当$t=2$时，$BQ=8$，$BP=6$，在$\triangle BPQ$中，$\angle PBQ=120^\circ$，由余弦定理，有

$$\begin{aligned}PQ^2&=BP^2+BQ^2-2BP\cdot BQ\cdot\cos 120^\circ\\&=6^2+8^2-2\times 8\times 6\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=36+64+48\\&=148.\end{aligned}$$

$\therefore\quad PQ=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$ (cm)；

当$t=12$时，$CQ=24$，$AP_1=12$，则$BQ_1=12$，BP_1

$=4$ （图 1-4），$\angle P_1BQ_1=120°$，再用余弦定理，有

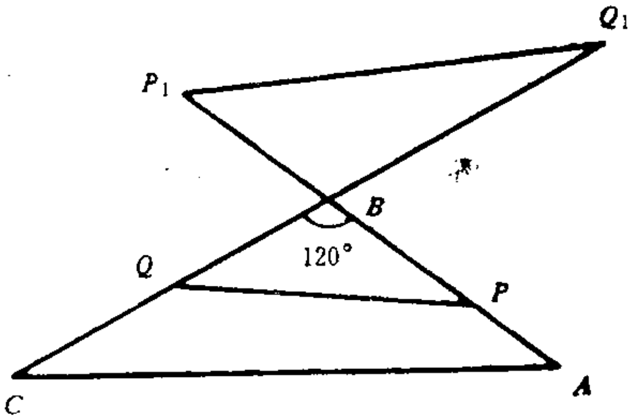

图 1-4

$$P_1Q_1^2=BP_1^2+BQ_1^2-2BP_1\cdot BQ_1\cdot\cos 120°$$
$$=4^2+12^2-2\times 4\times 12\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=16+144+48=208.$$

$\therefore\quad P_1Q_1=\sqrt{208}=4\sqrt{13}$ （cm）.

说明：本题疏通思路时，虽然大致也可分为几个阶段，但这几个阶段是互相依存，彼此联系的，一个阶段问题的解决需要借助于其他阶段问题的解决，解题过程融为一体，因此，这种“并联型”的综合题，也可称为“融和型”综合题.

从以上几个例题可以看出，较大的综合题涉及知识范围广，知识点多，且这些知识互相渗透、互为工具、各知识点和数学方法交织在一起，常形成某些数学知识和数学方法的隐含或隐蔽条件．因此不易下手．那么对于这样棘手的难题应如何克服困难加以解决呢？

三、解综合题的主要方法及策略

首先我们要明确，无论是“串联型”综合题，还是“并

联型”综合题，都是由基本题用某种方式组合而成的，因此解综合题的能力必须建立在基础知识和基本技能的基础上。没有扎扎实实的基础知识和基本技能作为基础，解好综合题是不可能的。下面的研究是在确认你已初步具备这个条件下进行的。

1. 解综合题的方法

（1）综合分析法

我们知道，由条件出发，通过一系列的逻辑推理得出结论，这种方法叫做综合法。这种方法简称为“执因导果”法；由结论出发，寻求使结论成立的条件，再寻找使这些条件成立的条件，直到这些条件是已知条件或者是已知的定理时，从而论证了命题的正确性，这种论证的方法叫做分析法。这种方法简称为“由果索因”法。

分析与综合，是解决数学问题常用的思维方法。对于基本题常常是单用分析法或单用综合法即能奏效。而对较大的综合题单一的使用往往解决不了问题。经常用的是：一边综合（从条件出发思考），一边分析（从结论出发思考），多次反复，终于获得解题的途径与方法。这种解题方法，我们称之为“综合分析法”，显然，这是一个双向探求的思维方法。

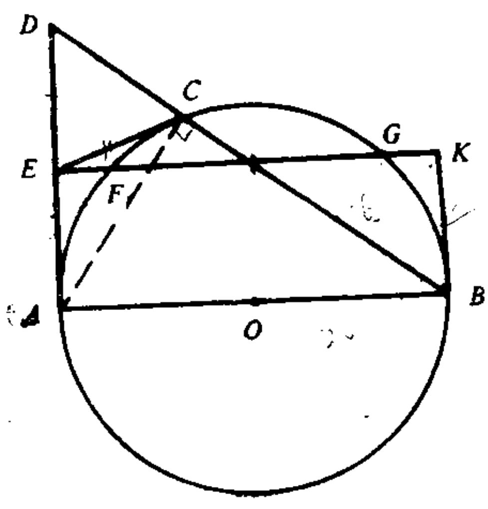

图 1-5

例 5 已知：图1-5，AB是$\odot O$的直径，BC是$\odot O$的弦，且$AB=20$ cm，$BC=16$cm，过点A作$\odot O$的切线，与BC的延长线交于点D，过点C作$\odot O$的切线与AD交于点E，再过

E 作AB的平行线与$\odot O$ 交于点 F、G，并与过点B的$\odot O$ 的切线交于点K。求弦FG的长。

分析：若单纯用分析法探讨困难较多，不易疏通思路。但从图中直观地易发现两个基本图形。一个是矩形$ABKE$，一个是$\text{Rt}\triangle DAB$，进一步观察可发现有圆幂定理和切线长定理蕴藏其中。而AB为直径就可连结AC，便于沟通各线段间的关系。这是从已知条件出发通过观察和联想粗略地得到的有关情况。

这时再看要求的结论：求FG的长。看到图中FG的位置，很易想到$FG=EG-EF$. 在这一瞬必会想到$AE^2=EF\cdot EG$。由对称性又会想到$KB^2=KG\cdot KF$。这样就会把视线逐渐集中到$\text{Rt}\triangle ADC$中，易得到$AE=EC=ED$的等量关系。再从已知条件向这一“焦点区”分析就不难解决了。

简解：连结AC，则$BC\perp AC$。又$EA=EC$

$\therefore$ $\angle EAC=\angle ECA$.

$\because$ $\angle ECA+\angle ECD=\angle EAC+\angle D=90°$

$\therefore$ $\angle ECD=\angle D$，$EC=ED$.

$\therefore$ $EA=ED$.

由 $AB^2=BC\cdot BD$，得$BD=25$，$DA=15$

$\therefore$ $EA=\frac{1}{2}DA=\frac{15}{2}$.

$\because$ 四边形$ABKE$是矩形，

$\therefore$ $EA=KB$.

$\because$ $EA^2=EF\cdot EG=EF\cdot(EF+FG)$,

$KB^2=KG\cdot KF=KG\cdot(KG+GF)$,

$\therefore$ $KG=EF$.

又$\because$ $EA^2=EF\cdot EG$,

$$EF\cdot EG=\left(\frac{15}{2}\right)^2,$$

$$EF+EG=KG+EG=AB=20,$$

$\therefore$ EF和EG是一元二次方程$x^2-20x+\frac{225}{4}=0$的两个根。

依题意，得$EF=10-\frac{5}{2}\sqrt{7}$，$EG=10+\frac{5}{2}\sqrt{7}$.

$\therefore$ $FG=EG-EF=5\sqrt{7}$ (cm).

说明：解题的"焦点区"就是经过分析与综合后，已知条件与结论分析延伸到的交汇部分。它常是疏通解题思路的关键所在。焦点区中的关键步骤，有时被形容为"题眼".而"题眼"的妙处有时可意会而不可言传，可在解题中加以体会。

例 6 $\triangle ABC$中$AB=10$，外接圆$\odot O$的面积为25π，$\sin A$、$\sin B$是方程

$$(m+5)x^2-(2m-5)x+12=0 \qquad ①$$

的两个根，其中$m\neq-5$.

（1）求m的值；

（2）求$\triangle ABC$的内切圆的半径。

分析：先从综合法入手。即"由因导果"。那就先疏理已知条件。本题题设有三条：

（1）$\odot O$的面积为25π；

（2）$\odot O$的内接三角形ABC的边$AB=10$；

（3）$\sin A$，$\sin B$是方程①的两个根。

由已知条件出发探索可能得到什么结果、由（1）$\odot O$的面积为25π可推得$\odot O$的半径为5．由（2）$\triangle ABC$的边