矩阵论

及其在测绘中的应用

党诵诗 编著

矩阵论及其在测绘中的应用

党 诵 诗 编著

测 绘 出 版 社

本书比较扼要地介绍了矩阵理论的基本知识，在应用上主要有两个方面，一是系统地论证了摄影测量中的变换矩阵以及测量平差与广义逆阵的关系；一是根据解析空中三角测量和大规模三角网平差的需要，结合电子计算机的特点讲述了矩阵求逆和方程组求解的各种方法。全书共分九章并两个附录。可供测绘技术人员和大专院校有关专业的师生参考。

矩阵论及其在测绘中的应用

党 诵 诗 编著

*

测 绘 出 版 社 出 版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32·印张 9 3/4·字数 252 千字

1980 年 6 月第一版·1980 年 6 月第一次印刷

印数 1—5,000 册·定价 1.20 元

统一书号：15039·新 130

前　言

矩阵理论是代数中的一个重要内容，在工程技术的很多方面，日益得到广泛应用。本书假定读者已经具有行列式和向量方面的知识，主要介绍矩阵理论的基本知识和应用，也写进了一些目前教材中尚不多见的内容，例如：广义特征向量、任一矩阵的极分解、奇异值分解以及谱分解等。根据测绘专业的需要，对于λ-矩阵，本书只考虑$A-\lambda E_n$的问题。

本书初稿是编著者于1964～1965年在北京市测绘学会为一些测绘技术人员举办的一个讲座上的讲义，现经补充修改写成此书，但由于水平所限，书中难免有不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

编著者 1978.10

目 录

第一章　矩阵的概念及基本运算

本章主要讲述矩阵的基本概念和运算，为了后面求解某些特殊的法方程组的需要，在逆矩阵一节中，介绍了三角矩阵、带状矩阵的特点。作为分块矩阵的应用，最后一节，我们研究了航测中一类矩阵的求逆问题，并考虑到如何尽快地编出计算程序和节省存贮的问题。

§ 1　矩阵的加法、乘法

一、坐标轴的旋转

我们知道，如果把 $o-xy$ 坐标系中的坐标轴 ox 绕原点 o 旋转一个角 φ 到达 $o-x'y'$ 坐标系中的坐标轴 ox'(图 1-1)，那么平面上一点 P 的新坐标(x',y')与旧坐标(x,y)之间，有下面的关系：

$$\begin{cases} x' = \quad \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y, \\ y' = -\sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y. \end{cases} \tag{1.1}$$

这就是平面解析几何中坐标轴的旋转变换公式。

这里要注意的是，(1.1)式右端中 x、y 的系数以及它们之间的相对位置。把这些系数单另写出，可以列成一个表的形式

$$B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

从公式(1.1)看出，(1.2)式右端的表完全决定了坐标轴的一个旋转变换。

同样，在空间解析几何中，如果让 $o-xyz$ 坐标系中的坐标轴 oz 不动，把坐标轴 ox 绕轴 oz 旋转一个角 φ 到达 $o-x'y'z'$

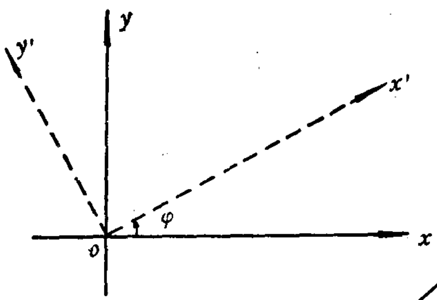

图 1-1

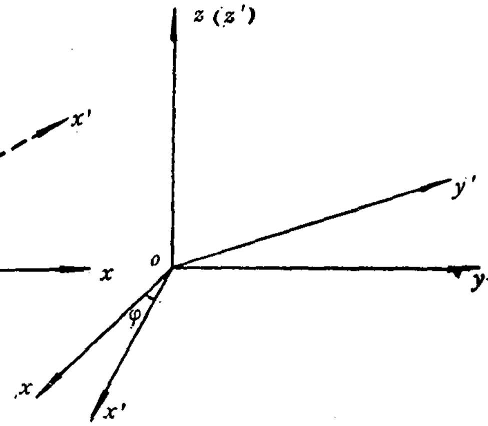

图 1-2

坐标系中的坐标轴 ox'（图 1-2），那么空间中一点 P 的新坐标 (x',y',z') 与旧坐标 (x,y,z) 之间，有下面的关系：

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi\cdot x + \sin\varphi\cdot y + 0\cdot z, \\ y' = -\sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y + 0\cdot z, \\ z' = 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z. \end{cases} \tag{1.3}$$

这个坐标变换公式说明，新、旧坐标系中的 z 坐标是一样的。从(1.3)式同样可以看出，下面的表

$$D = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

完全决定了坐标空间的一个旋转变换。

由上面 B、D 的启示，引出下面的定义

定义 1.1 由 $m\times n$ 个元素排成的一个表

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

叫做一个**矩阵**。

(1.5)式中的矩阵，有 m 个(横)行、n 个(竖)列，所以常把 A 叫做 $m\times n$ 矩阵，这个矩阵有时又可简写为 $A=(a_{ij})$。a_{ij} 是矩阵 A 的第 i 行、第 j 列的元素，$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。

在需要强调 $m\times n$ 矩阵 A 的行数和列数时，也可以把 A 写为 $\underset{mn}{A}$。

矩阵可以只有一个行，例如

$$y=(\eta_1\ \ \eta_2\cdots\eta_s), \tag{1.6}$$

它叫做**行矩阵**或**行向量**；矩阵也可以只有一个列，例如

$$x=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_s\end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

它叫做**列矩阵**或**列向量**。

$n\times n$ 矩阵又叫做 n 阶矩阵（或 n 阶方阵），例如上面的 B 和 D 分别是二阶和三阶矩阵。在(1.5)的矩阵中，当 $m=n$ 时，A 是一个 n 阶矩阵，这时，元素 a_{11}，$a_{22},\cdots,a_{nn}$ 叫做 A 的**主对角线上的元素**，或简称为**对角元素**。

在解析几何中，我们已经学过空间向量。例如，向量 $\{x,y,z\}$ 就表示以原点为起点、以空间的点 (x,y,z) 为终点的空间向量，x、y、z 叫做向量的分量，向量实际上可以看做是矩阵的特例。为了测绘专业上的需要，有时把空间向量 $\{x,y,z\}$ 写成下面的列矩阵或行矩阵：

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\quad 或\quad (x\ \ y\ \ z).$$

(1.6)、(1.7)中的矩阵，有时称为具有 s 个分量的**行向量**、

列向量，有时又统称为 s **维向量**。

二、矩阵的加法与减法

假设 $A=(a_{ij})$、$B=(b_{ij})$是两个 $m\times n$ 矩阵。A 与 B 相等的意思是，它们一切的对应(同行与同列)元素相等，即是说，等式 $A=B$ 和下面的一组等式是等价的：

$$a_{ij}=b_{ij}.\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

两个$m\times n$矩阵 A 与 B 相加或相减所得结果，仍是$m\times n$ 矩阵：

$$A+B=(c_{ij})\ \text{或}\ A-B=(d_{ij}).$$

它们的元素 c_{ij} 或 d_{ij} 分别规定等于 $a_{ij}+b_{ij}$ 或 $a_{ij}-b_{ij}$，即

$$(a_{ij})\pm(b_{ij})=(a_{ij}\pm b_{ij}). \tag{1.8}$$

例 1 根据矩阵的相等概念，公式(1.1)可以写成矩阵等式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi\cdot x+\sin\varphi\cdot y \\ -\sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y \end{bmatrix}.$$

例 2 设 $A=\begin{bmatrix} 3/2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

求 $A+B$，$A-B$.

$$A+B=\begin{bmatrix} 3/2+1 & -2+0 & 1+1 \\ 0+(-1) & 1+3 & -4+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5/2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 3/2-1 & -2-0 & 1-1 \\ 0-(-1) & 1-3 & -4-5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -9 \end{bmatrix}.$$

根据矩阵加、减法的运算规则，显然有

$A+B=B+A$；(**加法交换律**)

$(A+B)+C=A+(B+C)$. (**加法结合律**)

所有元素皆为零的矩阵，叫做**零矩阵**。m 行、n 列的**零矩阵**常用O_{mn}表示。

三、矩阵的乘法

本节开头已经说过，如果把 $o-xy$ 坐标系中的坐标轴 ox 绕

原点 o 旋转一个角 φ，那么平面上一点 P 的新坐标 (x', y') 与旧坐标 (x, y) 之间的关系是(1.1)式，即

$$\begin{cases} x' = \cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y, \\ y' = -\sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y. \end{cases}$$

这个旋转变换，实际上由(1.2)中的矩阵 B 确定。

假如再把坐标轴 ox' 继续绕原点 o 旋转一个角 θ 到达坐标轴 ox''(图 1-3)，那么平面上一点 P 的坐标 (x'', y'') 与 (x', y') 之间就有下面关系

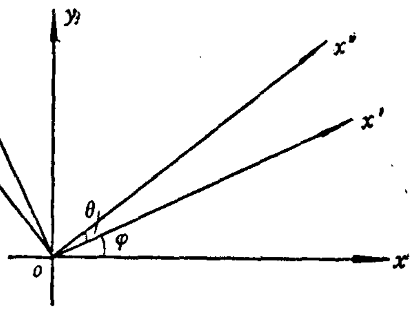

图 1-3

$$\begin{cases} x'' = \cos\theta \cdot x' + \sin\theta \cdot y', \\ y'' = -\sin\theta \cdot x' + \cos\theta \cdot y'. \end{cases} \tag{1.9}$$

这个变换自然由下面的矩阵确定：

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

现在研究同一点 P 的坐标 (x'', y'') 与 (x, y) 之间的关系，把(1.1)式中 x'、y' 的表达式代入(1.9)式，经过整理，得

$$\begin{cases} x'' = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)x + \\ \qquad\qquad + (\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi)y, \\ y'' = (-\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi)x + \\ \qquad\qquad + (-\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi)y. \end{cases} \tag{1.11}$$

这就是 (x'', y'') 与 (x, y) 之间的坐标变换公式，这个变换，完全

由下面的矩阵确定：

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi\\ -\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\end{bmatrix}\tag{1.12}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\varphi) & \sin(\theta+\varphi)\\ -\sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{bmatrix}.\tag{1.13}$$

事实上，从图 1-3 也可直接得出(1.13)，这是因为，从轴ox到轴 ox'' 的变换，可以把轴 ox 绕原点 o 旋转一个角 $\theta+\varphi$ 到达轴 ox'' 而直接得到。

(1.12)中的矩阵显然与(1.10)、(1.2)中的矩阵A、B有联系，我们把它叫做A与B的乘积，并用 $C=AB$ 表示，即

$$\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi\\ -\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

由矩阵A与B相乘后所得的矩阵C的元素，看上去比较繁杂，但它是有一个规律的。例如，C的第一行、第一列的元素是由A的第一行各元素同B的第一列各元素依次相乘后相加所得的结果：

$$\begin{array}{ccc} 1\rightarrow & \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\cos\varphi & \\ -\sin\varphi & \end{bmatrix};\\ & & \begin{array}{c}\uparrow\\ 1\end{array}\end{array}$$

又如，C的第二行、第一列的元素则是由A的第二行各元素同B的第一列各元素依次相乘后相加所得的结果：

$$\begin{array}{ccc} 2\rightarrow & \begin{bmatrix} & \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\cos\varphi & \\ -\sin\varphi & \end{bmatrix}.\\ & & \begin{array}{c}\uparrow\\ 1\end{array}\end{array}$$

C的其它元素，也可以用完全相同的规则得到。

一般地，对于两个矩阵的乘积，有下面的定义：

定义 1.2 设有 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$n\times p$ 矩阵 $B=(b_{jk})$，我们把 $m\times p$ 矩阵 $C=(c_{ik})$ 叫做 A 与 B 的**乘积**，并且表示为 $\underset{mp}{C}=\underset{mn}{A}\underset{np}{B}$。此处，

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\cdots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}.$$

即

$$\begin{array}{c} \\ i\to \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} & & \\ & \sum a_{ij}b_{jk} & \\ & & \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \\ i\to \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} * & * & * \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{in} \\ * & * & * \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} * & b_{1k} & * \\ * & b_{2k} & * \\ & \vdots & \\ * & b_{nk} & * \end{bmatrix}$$
$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$
$$k \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k$$

上式表明，求矩阵 A 与 B 的乘积 AB 的规则是：1．从 A 中取一行、从 B 中取一列，计算对应元素的两两乘积之和，以这种乘积之和作为 AB 的元素；2．每一个乘积之和在 AB 中的位置是，以原来从 A 所取的行次为其行次，以原来从 B 所取的列次为其列次。

在上面的运算中，A 的列数必须与 B 的行数一样多才能将 A 放在 B 的左边去乘，这个运算叫做用 A **左乘** B，或者叫做用 B **右乘** A。

例 3 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. 由乘法规则，算得

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad BA=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

在这个例子中，$AB\neq BA$。所以，在矩阵中，乘法交换律一般是不成立的，但是，下面的等式是不难推出的：

$(AB)C=A(BC)$；(**乘法结合律**)

$A(B+C)=AB+AC$．(**分配律**)

例 4 设 $D=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$r=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$. 根据乘法

规则，有

$$Dr=\begin{bmatrix} \cos\varphi\cdot x+\sin\varphi\cdot y+0\cdot z \\ -\sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y+0\cdot z \\ 0\cdot x+\quad 0\cdot y+1\cdot z \end{bmatrix}.$$

如果令 $r_1=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$，那么由矩阵的相等概念，就能把(1.3)式简写为矩阵等式：$r_1=Dr$.

例 5 请读者验证等式

$$(\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3)\begin{bmatrix} a & f & h \\ f' & b & g \\ h' & g' & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}=a\xi_1^2+b\xi_2^2+c\xi_3^2+(f+f')\xi_1\xi_2+$$
$$+(g+g')\xi_2\xi_3+(h+h')\xi_3\xi_1. \tag{1.14}$$

在这个例子中，三个矩阵的乘积是一个 1×1 矩阵，1×1 矩阵只有一个元素，对于这种矩阵，它和它的元素，以后就不加什么区别。

例 6 把线性方程组 $\begin{cases} 3x+2y-z=5, \\ 2x+y+\dfrac{1}{2}z=-1, \\ -x+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{3}z=0. \end{cases}$ 写成矩阵形式。

由矩阵的乘法规则和矩阵的相等概念，这个方程组可写为

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

例 7 把线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$