曲阜师范学院高师函授数学

专业参考资料

中学数学

竞赛试题汇编

曲阜师范学院函授部

曲阜师范学院高师函授数学

专业参考资料

中学数学竞赛试题汇编

曲阜师范学院函授部

一九七八年十月

说　　明

本材料是我院数学系七七级科研小组编写的，汇集了国内外中学数学竞赛试题，也搜集了部份高考试题，并作出解答。其中日本东京大学新生入学试题解答是西北大学数学系部分教师完成的，特此说明。由于时间仓促，不周之处，在所难免，望读者提出修改意见。

曲阜师范学院函授部

一九七八年十月

目　　录

§1. 北京市1978年中学生数学竞赛题解 …… 1

1. 第一试题解 …… 1
2. 第二试题解 …… 4

§2. 上海市中学生数学竞赛预赛试题参考解答 …… 8

§3. 上海市第七届中学生数学竞赛试题参考解答 …… 15

§4. 天津市78年中学生数学竞赛试题参考题解答 …… 21

§5. 安徽省中学生数学竞赛初试试题参考解答 …… 27

复试试题参考解答 …… 30

§6. 广东省中学生数学竞赛初试试题参考解答 …… 33

复试试题参考解答 …… 38

§7. 辽宁省中学生数学竞赛初试试题参考解答 …… 43

复试试题参考解答 …… 54

§8. 陕西省中学生数学竞赛初试试题解参考解答 …… 61

复试试题参考解答 …… 67

§ 9. 一九七八年全国部分省市中学数学竞赛 ……………………………………………73
第一场试题及题解……………………………………73
第二场试题及题解……………………………………80
§ 10. 第十九届国际中学生数学竞赛试题及解答 ……………………………………………88
§ 11. 第十二届世界中学生数学竞赛试题解答 ……………………………………………97
§ 12. 美国纽约中学校际数学联合会数学竞赛题解 （1975——1977）……………………… 114
§ 13. 一九七八年全国高等学校统一招生数学试题解答 …………………………………………… 170
§ 14. 日本东京大学新生入学试题题解 ………………… 183
〔1973年〕第一次 ………………………………… 183
第二次 ………………………………… 186
〔1974年〕第一次 ………………………………… 194
第二次 ………………………………… 203
〔1975年〕第一次 ………………………………… 212
第二次 ………………………………… 215
〔1976年〕第一次考新课程试题 …………………… 223
第二次 ………………………………… 242

北京市1978年中学生数学竞赛题解

第 一 试 题 解

1．如果$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，化简$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$。

解：因为$\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，所以$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$

$$=x-1+3-x=2.$$

2．化简$\log_2 6\cdot\lg\frac{1}{8}+\lg\frac{27}{125}$。

解：原式$=\frac{\lg 6}{\lg 2}\cdot(-3\lg 2)+\lg\frac{27}{125}$

$$=-3\lg 6+3\lg\frac{3}{5}=-3(\lg 6-\lg\frac{3}{5})$$

$$=-3\lg 10=-3.$$

3．把下面式子分解因式：

$$4(x^2+3x+1)^2-(x^2+x-4)^2-(x^2+5x+6)^2.$$

解：原式$=[(2x^2+6x+2)-(x^2+x-4)]\times[(2x^2+6x+2)+(x^2+x-4)]-(x^2+5x+6)^2$

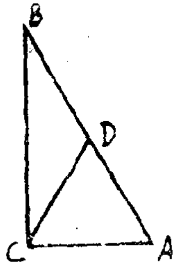
$$=(x^2+5x+6)(3x^2+7x-2)-(x^2+5x+6)^2$$

$$=2(x+2)(x+3)(x^2+x-4).$$

4．已知直角三角形的周长为$2+\sqrt{6}$，斜边上的中线长为1，求这个三角形的面积。

解：设$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，

那么$a+b+c=2+\sqrt{6}$因为直角三角形斜边的中点到三个顶的距离相等。所以$c=2$。



$a+b=\sqrt{6}$ （1）

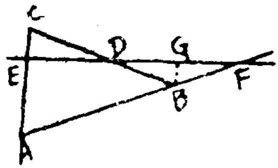
又 $a^2+b^2=4$ （2）

$(1)^2-(2)$，$2ab=2$。

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}$。

5．在$\triangle ABC$中，D为BC的中点，过D作一直线分别交AC于E，交AB的延长线于F，求证

$AE:EC=AF:BF$。



证明 过点B作$BG \parallel AC$交EF于G，

那么$\angle C=\angle DBG$。

因为 $BD=CD$，$\angle CDE=\angle BDG$，

所以 $\triangle CDF \cong \triangle BDG$，$BG=EC$。

因为 $BG \parallel AC$，

所以 $\triangle FEA \sim \triangle FGB$，$AE:BG=AF:BF$。

但 $BG=EC$，

所以 $AE:EC=AF:BF$。

6．求证 $\sin 50°(1+\sqrt{3}\,tg 10°)=1$。

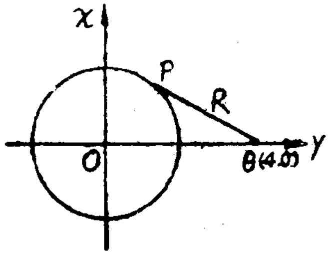
证明 $\sin 50°(1+\sqrt{3}\,tg 10°)=\sin 50°$

$$\times\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\cos 10°}=2\sin 50°$$

$$\times\frac{\sin 30^\circ\cos 10^\circ+\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 40^\circ\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ}{\cos 10^\circ}=1。$$

7．已知P为元$x^2+y^2=4$上的一个动点，又点Q的坐标为（4，0），试求线段PQ的中点轨迹的方程。



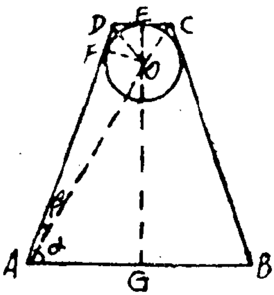
解：设线段PQ的中点R的坐标为(x,y)，那么由中点坐标公式，可知点P的坐标为$(2x-4,2y)$。

又点P在元$x^2+y^2=4$上，所以$(2x-4)^2+(2y)^2=4$

或$(x-2)^2+y^2=1$。

这就是所求轨迹的方程。

8．在等腰梯形内，有一元与梯形的上底和两腰都相切。已知梯形下底的长为6，高为5，元的半径为1．求梯形的腰和下底夹角的余弦的值。



解：DC的中点E和AB的中点G的连结线EG，就是等腰梯形$ABCD$的对称轴，OC、OD分别为$\angle ADC$、$\angle BCD$的平分线．因为$\angle ADC=\angle BCD$，所以$\angle ODC=\angle OCD$．

于是，$OD=OC$，所以O在EG上。连结OA，在直角三角形AGO中，$OG=EG-OE=4$，

$AG=\frac{1}{2}AB=3$.

所以$AO=\sqrt{AG^2+OG^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

设$\angle OAG=\alpha$，$\angle OAF=\beta$，$\sin\alpha=\frac{OG}{AO}=\frac{4}{5}$，

$\cos\alpha=\frac{AG}{AO}=\frac{3}{5}$，在直角三角形$AOF$中，$OF=1$，

所以$AF=\sqrt{AO^2-OF^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$.

$\sin\beta=\frac{OF}{AO}=\frac{1}{5}$，$\cos\beta=\frac{AF}{AO}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，所以

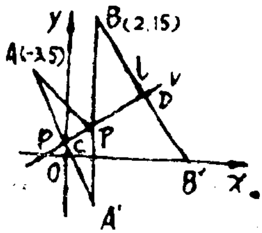
$$\cos\angle DAB=\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$$

$$=\frac{6\sqrt{6}-4}{25}$$

第二试题解

1. 有一条光线从点$A(-3,5)$射到直线l：$3x-4y+4=0$以后，再反射到一点$B(2,15)$，求这条光线从A到B的长度。

解：直线l：$3x-4y+4=0$(1)的斜率是$\frac{3}{4}$，过A作直线$p\perp l$，p的方程是$4x+3y-3=0$(2)解方程组(1)，(2)，得l与p的交点$C(0,1)$。



设A'关于l与A对称，则C为AA'的中点，由中点公式求得A'的坐标$(3,-3)$如果光线在l上的反

射点是P，那么光线之长$=AP+PB=A'P+PB$
$=A'B=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}$。

2. 设a与b为任意给定的整数，试证明方程

$$x^2+10ax+5b+3=0$$

和$x^2+10ax+5b-3=0$。都没有整数根。

解：所给的方程的二根显然为

$$x_1=-5a+\sqrt{25a^2-5b\pm 3}$$

和$x_2=-5a-\sqrt{25a^2-5b\pm 3}$我们现在来证明$25a^2-5b\pm 3$不是一个完全平方数，实际上，$25a^2-5b=5(5a^2-b)$的末位数为0或5，故$25a^2-5b\pm 3$的末位数只能是2，3，7，8四个数之一。一个数要是一个完全平方数，它的末位数必须是0，1，4，5，6，9之一，故$25a^2-5b\pm 3$不可能是一完全平方数那么x_1、x_2便不能是整数。

3. 已给等差数列

3，5，7，9，11，13，15……　　　　(1)

作另一个数列3，7，15，……　　　　(2)

这一数列形成的规则如下：第1项b_1为3，第2项b_2为(1)的第3项，即为7，第3项b_3为(1)的第7项，即为15……，第n项b_n为(1)的第b_{n-1}项。试写出(2)的第四项及第五项。求这数列的通项，并加以证明。

解：等差数列(1)的通项为$a_n=2n+1$，(2)的第四项为(1)的第15项，所以$b_4=a_{15}=31$。同样，(2)的第五项为(1)的第31项，所以$b_5=a_{31}=63$。

由(2)的定义，$b_n=a_{b_{n-1}}$而$a_{b_{n-1}}=2b_{n-1}+1$，所以$b_n=2b_{n-1}+1$两边加1，得到$b_n+1=2(b_{n-1}+1)$

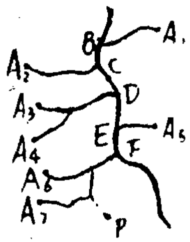
记$c_n=b_n+1$，于是c_1，c_2……，c_n，……是公 比为2的等比数列，其首项$c_1=b_1+1=4$，因之，$c_n=2^{n-1}c_1=2^{n+1}$，于是(2)的通项为$b_n=2^{n+1}-1$。

4．下图是一个工厂区的地图，一条公路（粗线）通过这个地区。七个工厂A_1，A_2……A_7，分布在公路两侧。由一些小路（细线）与公路相连，现在要在公路上设一个长途汽车站，车站到各工厂（沿公路、小路走）的距离总和越小越好。

（a）这个车站设在什么地方最好？

（b）证明你所作的结论。

（c）如果在P的地方又建立了一个工厂，并且沿着图上的虚线修了一条小路，那么这时车站设在什么地方好？



解：试B，C，E，F是各小路连通公路的道口。

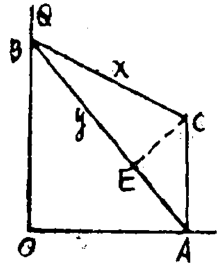
（a）车站设在D点最好）

（b）如果车站设在公路上的S点，用u_1，u_2……+，u_7表示S到各工厂的路程，$W=u_1+u_2+\cdots+u_7$。当S向C移动一段路程d时，u_1，u_2各减少d，但是u_3，u_4，u_5，u_6，n_7各增加d；所以W增加$5d-2d=3d$。当S自C再向B移动一段路程d'时，W又增加$6d'-d'=5d'$。如果S自B向北再移动一段路程d''时，W就再增加$7d''$，这说明S在D点以北的任何地方都不如在D点好。同样可以证明S在D点以南的任何地方都不如在D点好。

（c）设在D、E或D与E之间的任何地方都可以。

5．设有一直角QOP，试在OP边上求一点A，在OQ边上求一点B，在直角内求一点C，使$BC+CA$等于定长L，且使四边形$ACBO$的面积最大。

解：要使四边形$ACBO$的面积最大，C点和O点显然必须处在A与B的连线的异侧，我们的解法分为三步。第一步：证明当A与B固定时，$\triangle BAC$的面积以当它成一以BA为底边的等腰三角形时为最大。



证：如图，设AB边上的高$CE=h$，令$BC=x$，$BE=y$，则$CA=L-x$，$EA=c-y$。要使$\triangle BAC$的面积最大，只需使高h最大。但$h^2=x^2-y^2=(L-x)^2-(c-y)^2$，故得$L^2-c^2-2Lx+2cy=0$，或$y=\frac{L}{c}x-\frac{L^2-c^2}{2c}$.

由此即得$h^2=x^2-y^2=\frac{L^2-c^2}{c^2}\left[\frac{c^2}{4}-\left(x-\frac{L}{2}\right)^2\right]$.

所以当$x=\frac{L}{2}$时，h最大，即当$\triangle BAC$为一以BA为底边的等腰三角形时，它的面积最大。

第二步：证明若线段AB的长度已经给定，则当$\triangle BOA$成一以BA为底边的直角三角形时面积最大。证：我们首先证明下面的事实，底边固定、顶角固定的三角形中以等腰三角形的面积最大。这是由于：这些三角形的顶点在一以定底边为一弦的元周上，而当两腰相等时，它的高最大，所以面积最大。根据这一事实，若$OA\neq$

OB，我们在OP上取点A'，在OQ上取点B'，使$OA'=OB'$，且使$A'B'=AB$。从上述事实可知$B'OA'$的面积大于$\triangle BOA$的面积。

第三步：根据上述两步知，若四边形$ACBO$为所求的四边形，则C点必在$\angle QOP$的分角线上，且$\triangle OAC \cong \triangle OBC$，$AC=BC=\frac{L}{2}$，且$\angle COA=\angle BOC=45°$。故欲求所需的四边形$ACBO$，我们必须确定$A$和$C$的位置使$\triangle OAC$的面积最大即可。由于底$AC=\frac{L}{2}$，顶角$\angle COA=45°$，根据第二步中所证明的事实，$\triangle COA$当$OA=OC$时面积最大，此时

$$OA=OC=\frac{L}{4}\cdot\frac{1}{sin\frac{1}{2}45°}=\frac{1}{4sin22.5°}.$$

上海市中学生数学竞赛预赛试题

参 考 解 答

1．（本题10分）解绝对值不等式

$$|x-5|-|2x+3|<1.$$

解：①$x\geqslant 5$时，

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0, \\ 2x+3\geqslant 0. \end{cases}$$ 原不等式化为

$x-5-(2x+3)<1$。 $\therefore$ 解为$x\geqslant 5$

② $-\frac{2}{3}<x<5$ 时，

$\begin{cases} x-5<0, \\ 2x+3\geqslant 0. \end{cases}$ 原不等式化为

$-(x-5)-(2x+3)<1$.

∴ 解为 $\frac{1}{3}<x<5$

③ $x<-\frac{3}{2}$ 时，

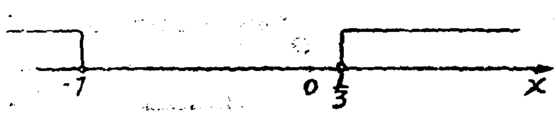
$\begin{cases} x-5<0, \\ 2x+3<0. \end{cases}$ 原不等式化为

$(x-5)+(2x+3)<1$.

∴ 解为 $x<-7$.

综上所述：得原不等式的解

$x>\frac{1}{3}$，　　或　$x<-7$.



2．（本题10分）解方程组

$\begin{cases} \lg x-\lg y=1 \\ x^{\lg y}=100 \end{cases}$

解：原方程组可化成

$\lg x-\lg y=1$　　①

$\lg x\cdot\lg y=2$　　②

令　$\lg x=u$，$\lg y=V$，①，②化成

$$\begin{cases} u - V = 1 & ③ \\ uV = 2 & ④ \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} u = -1 \\ V = -2 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} u = 2 \\ V = 1 \end{cases}$ ⑥

由⑤得

$$\begin{cases} lg\,x = -1 \\ lg\,y = -2 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{10} \\ y = \dfrac{1}{100} \end{cases}$$

由⑥得

$$\begin{cases} lg\,x = 2 \\ lg\,y = 1 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x = 100 \\ y = 10, \end{cases}$$

经检验 $\begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{10} \\ y = \dfrac{1}{100} \end{cases}$ 都适合原方程组。

3.（本题10分）解方程组

$$\begin{cases} (x + 2y - 8)^2 + (2 - x)^2 = 0 & ① \\ xz^2 + yz - 5\sqrt{xz^2 + yz + 9} + 3 = 0 & ② \end{cases}$$

解：由①得

$$\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 2 - x = 0 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \qquad ③$$

把③代入②得：

$$2z^2 + 3z - 5\sqrt{2z^2 + 3z + 9} + 3 = 0$$

令 $t = \sqrt{2z^2 + 3z + 9}$ 则 $t^2 - 5t - 6 = 0$

$\therefore$ $t_1 = 6$ 或 $t_2 = -1$ （增根舍去）

得 $2z^2 + 3z + 9 = 36$

$$2z^2+3z-27=0$$

$$(2z+9)(z-3)=0$$

$$z_1=3 \quad 或 \quad z_2=-\frac{9}{2}$$

得 $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3 \\ z_1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2 \\ y^2=3 \\ z^2=-9/2 \end{cases}$

经检验，都适合原方程组、 ∴ 原方程组有上面的两组解。

4．（本题10分）证明：不存在这样两个分数，它们的和与它们的积都是整数。

证：用反证法

假定存在这样两个即约分数$\frac{m_1}{n_1}$，$\frac{m_2}{n_2}$

$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=P$， $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=q$（$P$、$q$都是整数）

那末 $\frac{m_1}{n_1}$、$\frac{m_2}{n_2}$是方程$x^2-Px+q=0$的两个根、就有

$\frac{m^2}{n^2}-P\frac{m}{n}+q=0$ $\frac{m^2}{n}=Pm-qn$

上式等号右边是一个整数，等号左边是一个即约分数，这是矛盾的，因而命题得证。

5．（本题15分）设A、B、C为同时满足

$\sin A+\sin B+\sin C=0$

$\cos A+\cos B+\cos C=0$

的任意三个角，求证$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$为定值。

解：$0=(\cos A+\cos B+\cos C)^2$

$=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2(\cos A\cos B$

$+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$　　（1）

$2(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)$

$=\cos(A+B)+\cos(A-B)+\cos(B+C)$

$+\cos(B-C)+\cos(C+A)+\cos(C-A)$

（2）

令　$A+B+C=D$，则

$\cos(A+B)+\cos(B+C)+\cos(C+A)$

$=\cos(D-C)+\cos(D-A)+\cos(D-B)$

$=\cos D(\cos C+\cos A+\cos B)+\sin D(\sin C$

$+\sin A+\sin B)=0$

又由　$\sin A+\sin B=-\sin C$，

得　$(\sin A+\sin B)^2=\sin^2 C$　　（3）

$\cos A+\cos B=-\cos C$，

得　$(\cos A+\cos B)^2=\cos^2 C$　　（4）

（3）（4）两边相加，得 $2+2\cos(A+B)=1$、

$\therefore\ \cos(A-B)=-\dfrac{1}{2}$

同理得$\cos(B-C)=\cos(C-A)=-\dfrac{1}{2}$。

因此（2）右边成为$-\dfrac{3}{2}$，

代入（1），得$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\dfrac{3}{2}$它是一个定值。

6．（本题15分）$ABCDE$为凸五边形，（如图），AD是一条对角线．已知$\angle EAD>\angle ADC$，