HZ BOOKS
华章教育

2003年
全国MPA联考
辅导用书

MPA
讲义

樊正复 王式安 编著

MPA联考数学辅导教材

机械工业出版社
China Machine Press

2003年
全国MPA联考
辅导用书

MPA讲义

MPA联考数学辅导教材

樊正复 王式安 编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

MPA联考数学辅导教材/樊正复、王式安编著. －北京：机械工业出版社，2002.5
2003年全国MPA联考辅导用书
ISBN 7-111-10306-8

Ⅰ.M… Ⅱ.①樊… ②王… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第032368号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码100037)
责任编辑：石会敏
北京忠信诚胶印厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2002年5月第1版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 10.75印张

定 价：16.00元

出版前言

MPA是公共管理硕士(Master of Public Administration)的英文缩写。作为一种专业学位,MPA最先是在美国发展起来的。1924年美国希拉丘斯大学马克斯韦尔公民与公共事务学院首次创办该专业。现在,MPA教育在欧洲、北美很多国家十分盛行,MPA与MBA(工商管理硕士)、法律学硕士一起成为欧美国家文科职业研究生教育的三大支柱。

在国家教育部、国务院学位办等有关部门的积极推动下,我国公共管理教育与研究正在迅速发展,1999年5月,国务院学位委员会正式批准在中国设立公共管理专业硕士学位,并决定于2001年10月进行首次MPA联考。MPA是一种应用性而非学术性的研究生学位,与管理类其他硕士学位尤其是工商管理硕士学位处于同一层次,但类型不同,各有侧重:第一,MPA的培养目标是政府部门及非政府公共机构的高层次、应用型专门人才。第二,MPA的培养对象主要为获得学士学位后、有四年以上实际工作经历的政府部门及非政府公共机构的工作人员。第三,MPA毕业生主要是到政府部门、非政府公共服务机构从事管理工作。MPA学位获得者的就业方向是公共部门的各个领域,包括党政机关尤其是政府部门和非政府公共机构(非营利组织、社会中介组织及社会团体、思想库或咨询公司等)以及企事业单位的人事与行政部门等。第四,在培养过程中,注重实际能力与素质的培养,教学内容面向社会,尤其是公共领域中所面临的实际问题。

目前,我国MPA培养试点院校有24所,分布在全国各地。我国MPA入学考试实行全国MPA入学联考制度。2001年我国24所MPA试办院校计划招生2850人,全国31个省、直辖市、自治区(除西藏外)均有报名,报名总人数达11 836人。实际录取超过3000人,录取按8:2的比例,优先录取公务员,扩招的20%也全部用于录取公务员。MPA入学考试分为初试(笔试)和复试(面试)。全国联考科目有英语、综合知识(语文40%、数学30%和逻辑30%)、管理学、行政学(每门课的考试时间均为3小时,满分为100分,由教育部统一组织命题、考试、阅卷)。政治理论考试由各院校自行组织,多以面试的形式进行。录取主要依据考生的考试成绩以及面试情况,并结合工作业绩和资历择优录取。总之,力求体现公共管理学科的跨学科、综合性和交叉性强的特点及新发展趋势,体现公共管理硕士专业学位教育,培养复合型、应用型、通才式人才的特点。

由于刚刚推出的MPA联考大多借鉴了MBA联考的做法,所以,我们利用做MBA辅导教

材的成功经验、心得以及作者资源,联合有关专家并根据最新 MPA 联考考试大纲,开发了本套 MPA 联考辅导教材(英语、行政学、管理学、数学和逻辑),希望能给您带来帮助。(考虑到 2002 年增加的语文部分比较简单,本套书暂不包括语文辅导教材,我们将根据考生的需要在今后增补。)来自全国各地的多位专家参加了本套书的编写工作。在此向所有为本套书的编写、出版做出贡献的人士表示诚挚的感谢。

作为考前辅导教材,本书内容力求简明扼要,准确反映 MPA 联考考试大纲的要求,尽量适应考生备考的需要。但由于组织者的经验和水平所限,难免有疏漏和不足之处。欢迎广大考生、各 MPA 招生院校的辅导老师及各方面的专家提出宝贵建议。

机械工业出版社华章教育

2002 年 5 月

目 录

第一部分 微 积 分

第一章 一元函数微分学 …… (1)
第一节 函数 …… (1)
第二节 极限 …… (9)
第三节 连续函数 …… (21)
第四节 导数 …… (29)
第五节 洛必达法则 …… (42)
第六节 导数的应用 …… (49)
第七节 微分及其应用 …… (60)
第二章 多元函数微分学 …… (65)
第一节 二元函数的极限与连续性 …… (65)
第二节 偏导数 …… (68)
第三节 全微分 …… (77)
第四节 二元函数的几何表示 …… (80)
第五节 极值与条件极值 …… (83)
第三章 一元函数积分学 …… (90)
第一节 不定积分 …… (90)
第二节 定积分及其计算 …… (100)
第三节 定积分的应用 …… (114)

第二部分 概 率 论

第四章 概率统计初步 …… (121)
第一节 随机事件及其概率 …… (121)
第二节 概率的加法公式、条件概率和乘法公式 …… (134)
第三节 随机变量的数字特征 …… (147)

第一部分　微　积　分

第一章　一元函数微分学

第一节　函数

一、基础知识

1. 设 x,y 为同一过程中的两个变量，如果 x 在某个变化范围 D 内任取一个数值，变量 y 就按一定法则有惟一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的一元函数. 记为

$$y = f(x) \quad x \in D$$

称其中的 x 为自变量；x 的取值范围 D 为定义域；y 为因变量，其所取的值的集合称为函数的值域：$Y = \{y: y = f(x), x \in D\}$.

2. 称点集：

$$S = \{(x,y): y = f(x), x \in D\}$$

为函数 $y = f(x)$ 的图形.

3. 用若干个数学式子表示自变量与因变量之间的对应法则的函数，称为分段函数. 如：

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & x \in [0,1] \\ 1 + x, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

4. 若存在一个正数 M，对于定义域 D 内的任一 x，均有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立，则称函数 $y = f(x)$ 在区域 D 上有界，并称 $y = f(x)$ 在 D 上是有界函数. 否则，就称 $y = f(x)$ 在 D 上无界.

如 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是有界函数.

5. 对于定义域 D 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时总有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是单调增加的函数. 当 $x_1 < x_2$ 时总有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单

调减少的函数.

6. 设 $y=f(x)$ 的定义域 D 是关于原点对称的，如果对于 D 内任一点 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

7. 如果存在一个正数 T，使得对于定义域 D 内任一点 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数. 并称使上式成立的最小正数 T 为该函数的周期.

8. 称初等数学中常用的以下五个函数为基本初等函数：

(1) 幂函数：$y=x^{\mu}$；

(2) 指数函数：$y=a^{x}$；

(3) 对数函数：$y=\log_a x$ ($y=\ln x, a=\mathrm{e}$)；

(4) 三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$ 等；

(5) 反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 等.

关于这五个基本初等函数的定义域、图形、单调性、有界性、奇偶性、周期性，请读者务必熟练掌握，在此不再赘述.

9. 若已知函数 $y=f(x)$ ($x\in D$)，在其值域 M 内任取一点 y，都可以通过 $y=f(x)$，必有惟一的值 x 与之对应，于是 x 是定义在 M 上的以 y 为自变量的函数 $x=f^{-1}(y)$ ($y\in M$). 再交换 x 与 y，称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.

10. 如果 $y=f(u), u=\varphi(x)$，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 得 $y=f[\varphi(u)]$，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

如 $y=\sin u, u=x^2+1$，则 $y=\sin(x^2+1)$ 是 $y=\sin u$ 与 $u=x^2+1$ 的复合函数.

在复合时要注意 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集是非空的. 其中称 u 为中间变量.

11. 由常数和基本初等函数，经过有限次的四则运算与有限次的复合步骤，即得到的并且用一个数学式子表示的函数，称为初等函数.

如 $y=\arctan\dfrac{x^2+3}{x}+\dfrac{\sqrt{\sin x^2}}{\mathrm{e}^x+1}$ 是初等函数.

二、典型考题分析

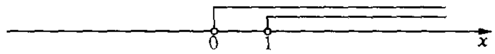
例 1 函数 $y=\log_2(x^2-x)$ 的定义域是(　　)

(A) $(-\infty,0)$　　(B) $(1,+\infty)$

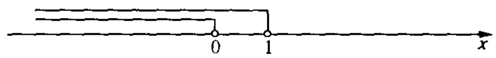
(C) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　(D) $(0,+\infty)$

解 $x^2-x>0$ (0 与负数无对数)，即 $x(x-1)>0$.

① 当 $x>0$、$x-1>0$ 时，可使 $x(x-1)>0$.



② 当 $x<0$、$x-1<0$ 时，也可使 $x(x-1)>0$.



所以 $y=\log_2(x^2-x)$ 的定义域为

$$C=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$$

应选(C).

例 2 下列函数中是奇函数的为(　　)

(A) $\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$　　(B) $x\sin x$　　(C) $\sin x-\cos x$　　(D) $x\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$

解 设 $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$,

则

$$f(-x)=\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=\frac{a^0+a^x}{a^0-a^x}=-\frac{a^x+1}{a^x-1}=-f(x)$$

故 $\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$ 是奇函数. 应选(A).

例 3 设函数 $y=\lg(kx^2-3x+2k)$ 的定义域是一切实数，求 k 的取值范围.

解 对任一实数 x 必有 $z=kx^2-3x+2k>0$,

即

$$z=k\left(x^2-\frac{3}{k}x+2\right)=k\left[\left(x-\frac{3}{2k}\right)^2+2-\left(\frac{3}{2k}\right)^2\right]>0$$

则当 $\begin{cases}k>0\\ 2-\left(\dfrac{3}{2k}\right)^2>0\end{cases}$ 时，$y=\lg(kx^2-3x+2k)$ 的定义域是一切实数.

由此可知当 $k>\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ 时即可，所以 $k\in\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},+\infty\right)$.

例 4 求 $y=\sqrt{\sin x-1}$ 的定义域.

解 由 $\sin x-1\geqslant 0$ 可知仅当 $\sin x=1$ 时所给函数才有意义. 故定义域是点集.

$$S=\left\{x: 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\right\}$$

例 5 判断 $y=f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$ 的奇偶性.

解

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(\sqrt{(1-x)^2+1}-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=\ln\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

例 6 求 $y=f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x\geqslant 0)$ 的反函数.

解

$$2y=e^x+e^{-x}$$
$$2ye^x=(e^x)^2+1$$
$$(e^x)^2-2ye^x+1=0$$
$$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}\qquad(e^x\geqslant 1)$$

所以 $x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$.

反函数是 $y=f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $(x\geqslant 1)$.

例 7 设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$,求 $f(x)$ 的定义域 D.

解

$$\begin{aligned}D&=\{x:3-x\neq 1,3-x>0,49-x^2\geqslant 0\}\\&=\{x:x\neq 2,x<3,-7\leqslant x\leqslant 7\}\\&=[-7,2)\cup(2,3)\end{aligned}$$

例 8 在曲柄连杆机构中,曲柄 $OC=r$,连杆 AC 长为 l,当曲柄绕 O 点旋转时,将带动滑块 A 沿直线轨道做往复直线运动.设 AO 的距离为 x,转动的角度为 θ,试写出 x 与 θ 之间的函数表达式(见图 1-1).

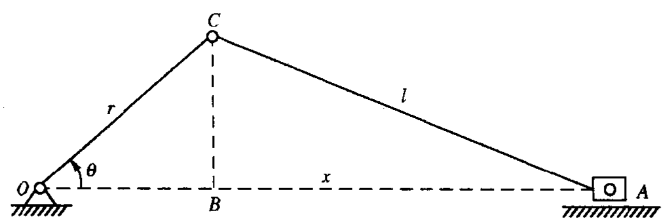


图 1-1

解 $x=OB+BA=r\cos\theta+\sqrt{l^2-(r\sin\theta)^2}$, $\theta\in(0,+\infty)$.

例 9 画出 $y=\begin{cases}x^2 & x\in[0,1]\\ x+2 & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ 的图形.

解 见图 1-2.

例 10 $y=\ln(1+x^2)^{\frac{1}{3}}$ 由哪几个简单的函数复合而成?

解 由 $y=\ln u$, $u=z^{\frac{1}{3}}$, $z=x^2+1$ 复合而成.

例 11 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 1)$,求 $f[f(x)]$.

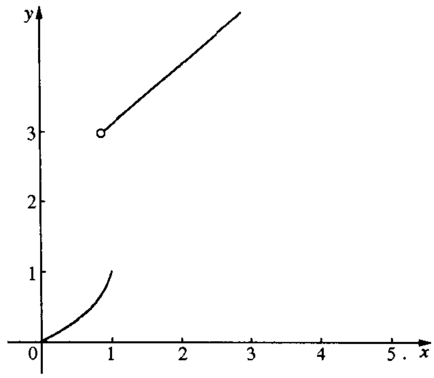


图　1-2

解
$$f[f(x)] = f\left[\frac{x}{x-1}\right] = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = x$$

例 12　试证 $y = 3^x$ 是单调增加的函数.

证　在定义域$(-\infty, +\infty)$内任取两点 x_1, x_2,若 $x_1 < x_2$,则有

$$f(x_1) = 3^{x_1} = 3^{x_1+x_2-x_2} = \frac{3^{x_2}}{3^{x_2-x_1}} < \frac{3^{x_2}}{3^0} = 3^{x_2} = f(x_2)$$

即有
$$f(x_1) < f(x_2)$$

所以 $y = f(x) = 3^x$ 在$(-\infty, +\infty)$上是单调增加的.

例 13　设 $y = f(x)$ 是以 T 为周期的函数,试证 $f(ax)(a > 0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

证
$$f\left[a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right] = f[ax + T] = f(ax)$$

故 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

例 14　设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1 \end{cases} \quad g(x) = e^x$$

求 $g[f(x)] =$ ________, $f[g(x)] =$ ________.

解
$$g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ e^{-1}, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$$

例 15 求分段函数

$$y=\begin{cases}x-2, & x\leqslant 0\\ -\sqrt{4-x^2}, & 0<x<2\\ \ln x-\ln 2, & x\geqslant 2\end{cases}$$的反函数

解 当 $x\leqslant 0$ 时，

$$y=x-2\Longrightarrow x=y+2\quad(y\leqslant -2)$$

当 $0<x<2$ 时，

$$y=-\sqrt{4-x^2}\Longrightarrow y^2=4-x^2\Longrightarrow x^2=4-y^2\Longrightarrow x=\sqrt{4-y^2}\quad(-2<y<0)$$

当 $x\geqslant 2$ 时，

$$y=\ln x-\ln 2\Longrightarrow \ln x=y+\ln 2,\quad x=e^{y+\ln 2}=2e^y\quad(y\geqslant 2)$$

综上可知反函数为

$$y=\begin{cases}x+2, & (x\leqslant -2)\\ \sqrt{4-x^2}, & (-2<x<0)\\ 2e^x, & (x\geqslant 2)\end{cases}$$

此例显示，在求分段函数的反函数时先分段求出，然后再合写在一起.

例 16 若 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)=$ ________.

解 令 $z=x+\frac{1}{x}\Longrightarrow z^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$.

故 $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+2$

即知 $$f(z)=z^2+2\Longrightarrow f(x)=x^2+2$$

例 17 函数 $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}e^{-|\sin x|}$ 是(　　).

(A) 有界奇函数　(B) 有界偶函数　(C) 无界奇函数　(D) 无界偶函数

解 $$y=f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}e^{-|\sin x|}$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}e^{-|\sin(-x)|}=\frac{1-x^2}{1+x^2}e^{-|\sin x|}$$

所以 $f(x)=f(-x)$，则 $f(x)$ 是偶函数，有

$$|f(x)|=\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right|\left|e^{-|\sin x|}\right|\leqslant 1\times|e^0|=1$$

故 $f(x)$ 是有界偶函数,应选(B).

三、自测题及参考答案

1. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$ 的定义域是________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\ln(x+2)}$,则 $f(\ln x)$ 的定义域是________.

3. 下列各选项中,两个函数相同的是(　　).

(A) $f(x)=\cos x, g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$

(B) $f(x)=\dfrac{x\ln(1-x)}{x^2}, g(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$

(C) $f(x)=\sqrt{x(x-1)}, g(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(D) $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$

提示　两个函数 $f(x), g(x)$,当它们的定义域相同,且对应法则也相同时方能认为两函数相同.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}-4x^2, & (-3\leqslant x<0)\\ x, & (0<x\leqslant 4)\\ \dfrac{x^2}{4}, & (x>4)\end{cases}$ 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是________.

5. 函数 $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}(-\infty,+\infty)$ 的反函数是________.

6. 已知 $f(x)=\begin{cases}x-1, & (x<0)\\ x^2, & (x\geqslant 0)\end{cases}$,求 $f(x+1)$.

7. 设 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$,$f(x)$ 是奇函数,试判断 $F(x)$ 的奇偶性.

8. $f(x)=e^{\cos x}, g(x)=e^{-\sin x}$,则 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内(　　)成立.

(A) $f(x)$ 是单调增函数;$g(x)$ 是单调减函数

(B) $f(x)$ 是单调减函数;$g(x)$ 是单调增函数

(C) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是单调增函数

(D) $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是单调减函数

9. $f(x)=xe^{-|\sin x|}(-\infty<x<+\infty)$ 是(　　).

(A) 有界函数　　(B) 单调函数　　(C) 周期函数　　(D) 奇函数

10. 函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 的定义域是________.

11. 设 $x\in(-1,1)$，则 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$ 是(　　).

(A) 单调减的奇函数　　(B) 单调增的奇函数

(C) 单调减的偶函数　　(D) 单调增的偶函数

12. $f(x)=\frac{ax}{2x+3}$ 且 $f[f(x)]=x$，则 $a=$ ________.

13. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $\underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{\text{复合}n-1\text{次}}=$ ________.

14. $y=\frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为全体实数，则 k 的取值范围是________.

15. 求 $y=\ln(1-e^{-x})$ 的反函数.

16. 求 $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0\\ -\sqrt{1-x^2}, & 0<x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 的反函数.

17. 试证反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图形关于 $y=x$ 轴对称.

参考答案

1. $(-2,-1)\cup(-1,3]$

2. $(e^{-2},e^{-1})\cup(e^{-1},e^3]$

3. (B)

4. $y=\begin{cases}-\sqrt{\frac{-x}{4}}, & (-36\leqslant x<0)\\ x, & (0<x\leqslant 4)\\ \sqrt{4x}, & (x\geqslant 4)\end{cases}$

5. $y=\ln\frac{y}{1-y}$

6. $f(x+1)=\begin{cases}x, & x<-1\\ (x+1)^2, & x\geqslant -1\end{cases}$

7. 偶函数

8. (D)　　9. (D)

10. $[-3,-2]\cup[3,4]$

11. (A)

12. $a=-3$

13. $\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$

14. 对 $k<0, k=0, k>0$ 分别讨论可知 $0\leqslant k\leqslant\frac{3}{4}$

15. $y=-\ln(1-e^{-x})$

16. $y=\begin{cases}x+1, & x\leqslant -1\\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<0\\ e^x, & x\geqslant 0\end{cases}$

第二节　极限

一、基础知识

1. 按照自然数顺序排列的一列数：

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n, \cdots = \{x_n\}$$

如果(存在数 $M > 0$)对于任意的 n 皆有 $|x_n| \leqslant M$，则称该数列$\{x_n\}$是有界数列.

2. 如果对于任意自然数 n，皆有 $x_n \leqslant x_{n+1}$，则称数列$\{x_n\}$是单调增加的数列.反之，如果对于 $\forall n$(自然数)，皆有 $x_n \geqslant x_{n+1}$，则称$\{x_n\}$是单调减少的数列.

3. 当 n 无限增大(记为 $n \to \infty$)时，x_n 与某一常数a 无限接近(记为 $x_n \to a$)，则称 a 是数列$\{x_n\}$的极限.记为：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad (x_n = f(n))$$

4. 如果对于任意正数 N，$y = f(x)$ 在 $x \geqslant N$ 上有定义，当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 无限接近某一常数 a，则称 a 是当 $x \to +\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad (\infty \text{ 代表无穷大})$$

5. 如果对于任意正数 N，函数 $y = f(x)$ 在 $x \leqslant -N$ 上有定义，当 $x \to -\infty$ 时，$f(x)$ 无限接近某一常数 b，则称 b 是当 $x \to -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = a \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

6. 若 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 内有定义，当 x 无限接近$x_0(x \to x_0)$时，函数 $f(x)$ 无限接近某一常数 a，则称 a 是$f(x)$当 $x \to x_0$ 时的极限.记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

当 x 仅从x_0的左方逼近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近某一常数 a，则称 a 是$f(x)$当 $x \to x_0$ 时的左极限.记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a \quad (\text{或记作 } f(x_0 - 0) = a)$$

当 x 仅从x_0的右方逼近 x_0 时，$f(x)$ 无限接近某一常数 b，则称 b 是$f(x)$当 $x \to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = b \quad (\text{或记作 } f(x_0 + 0) = b)$$

显然

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=a\Longleftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=a$$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,则称 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

7. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,则称 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量(x_0 可以是 ∞).

8. 设 $\alpha(x),\beta(x)$ 都是 $x\to x_0$ 时的无穷小量,则有:

(1) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ 时,称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小.记作

$$\alpha=o(\beta)\quad(\text{或说 }\beta(x)\text{ 是 }\alpha(x)\text{ 的低阶无穷小})$$

(2) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$ 时,称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

特别当 $C=1$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ 时,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小.记作

$$\alpha(x)\sim\beta(x)$$

(3) 当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}=C\neq 0$ 时,称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 n 阶无穷小.(n 是自然数)

9. 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量.可记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$$

(但不能说 $f(x)$ 的极限是无穷大量!仍说当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 的极限不存在.)

10. 重要定理和公式

(1) 任一数列都不能有两个不同的极限.(惟一性)

(2) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,则 $\{x_n\}$ 一定有界;若 $\{x_n\}$ 无界,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

(3) 单调有界的数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在.(极限存在准则)

(4) 如三个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$,满足条件:① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$(对 $\forall n$);② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(夹逼定理).

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0$(或 <0),则存在去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$,当 $x\in N(\hat{x}_0,\delta)$ 时,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(6) 若当 $x\in N(\hat{x}_0,\delta)$ 时,$f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$,则有 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$)(保号定理).

(7) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,且 $A>B$,则在某 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内 $f(x)>g(x)$.

(8) 若在 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内 $f(x)\geqslant g(x)$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x\to x_0} g(x) \quad (\text{若两极限都存在})$$

(9) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$,则在某 $N(\mathring{x}_0,\delta)$ 内 $f(x)$ 有界.

(10) 若在某 $N(\mathring{x}_0,\delta)$ 内,$g(x)\leqslant f(x)\leqslant \varphi(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$　(夹逼定理).

(11) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$;$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$,则有:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=a\pm b$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=ab$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$ ($b\neq 0$ 时)

4) $\lim\limits_{x\to x_0}[kf(x)]=k\cdot a$

5) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=a^n$($n$ 为自然数)

(此定理称为极限的四则运算法则)

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}=2.71828\cdots$　或　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}=2.71828\cdots$.

((12)与(13)称为两个重要极限.)

(14) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Longleftrightarrow f(x)=a+\alpha(x)$,其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

(15)

1) 若 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

2) 若 $\alpha(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量,则 $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量.($\alpha(x)\neq 0$)

(16) 有限个无穷小的和,仍然是无穷小量.

(17) 有界函数与无穷小量的乘积仍然是无穷小量.

(18) 有限个无穷小量的乘积仍然是无穷小量.

(19) $\alpha(x)\sim\beta(x)\Longleftrightarrow\beta(x)-\alpha(x)=o(\alpha(x))$.

(20) 若当 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$,$\beta(x)\sim\beta_1(x)$,则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \quad (\text{等价无穷小代替})$$

(21) 当 $\blacksquare\to 0$ 时,有

$$\sin\blacksquare\sim\blacksquare,\quad \tan\blacksquare\sim\blacksquare,\quad 1-\cos\blacksquare\sim\frac{\blacksquare^2}{2},$$