高等学校教材

高等代数

（第三版）

张禾瑞 郝钢新 编

高等教育出版社

高等学校教材

高等代数

（第三版）

张禾瑞　郝钢新　编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是在第二版的基础上，为同时适应师范专科学校使用修改的。与第二版比较，本书删去了复数的内容，增加了整数的整除性，多元多项式，对称多项式，结式与判别式，群、环、域简介等内容。此外，对某些章节作了改写，对习题作了补充与调整。

本书可作为高等师范院校与师范专科学校的教材。由于师范院校与师范专科学校"高等代数教学大纲"不尽相同，使用时，可根据大纲要求，选择讲解内容。

高等学校教材

高 等 代 数

（第三版）

张禾瑞　郝钢新　编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

开本 850×1168 1/32　印张 13.625　字数 320,000

1983 年 9 月第 3 版　1984 年 3 月第 1 次印刷

印数 00,001—46,500

书号 13010·0939　　定价 1.60 元

第三版序

本书第二版是作为师范学院试用教材编写的. 1983 年教育部颁发了师范专科学校《高等代数教学大纲》. 为了使师范专科学校也能采用本书,我们又作了这次修订.

与第二版比较,主要作了以下修改:

1. 第一章去掉了复数的内容,增加了整数的一些整除性质一节.

2. 第二章增加了多元多项式和对称多项式两节.

3. 第四章增加了结式和判别式一节.

4. 增加了群、环和域简介一章.

此外,对于第二版的某些章节也作了改写. 对某些难度较大的习题补充了一些提示,并且增加了一些较简单的习题.

由于师范学院和师范专科学校的教学大纲不尽相同,在采用本书作为教材时,根据大纲的要求,对于其中某些内容可以不讲. 另外,如果认为先讲某些章节是适宜的话(例如,先讲行列式和线性方程组,后讲多项式),也可以重新安排讲授次序. 习题可针对学生情况,酌量选留.

参加本书审稿会的同志们认真地审阅了本书的原稿,并且提出了宝贵的意见,谨向他们表示谢意. 我们也深深地感谢对本书第二版提出意见的读者,有些意见已在这次修订中被采纳.

这次的修订版一定还有错误和不足之处,希望读者继续提出批评指正.

编　　者

1983年7月于北京师范大学

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 基 本 概 念

作为大学数学基础课程的代数，是中学代数的继续和提高.

在学习这门课程时将会发现，它与中学代数有很大的不同. 这种不同不仅表现在内容的深度上，更重要的是表现在观点和方法上.

在这个课程里将体现由具体事物抽象出一般概念，再从一般概念回到具体事物去的这种辩证观点和严格的逻辑推理方法. 这一点在学习过程中将逐渐体会.

作为开始，我们先介绍一些最基本的概念和方法. 这些概念和方法对于今后的学习是必要的.

1.1 集合

我们先从一个最简单的概念开始.

在日常生活中，常常谈论一组事物. 例如，一班同学，一队解放军，一组自然数，一筐苹果等等. 这里，"一班"，"一队"，"一组"，"一筐"等都表示一定事物的集体. 我们称它们为*集合*或*集*. 组成集合的东西叫做这个集合的*元素*.

我们常用大写拉丁字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \cdots$ 表示元素.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a *属于* A，记作 $a \in A$；或者说 A 包含 a，记作 $A \ni a$.

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a *不属于* A，记作 $a \notin A$，或者说 A 不包含 a，记作 $A \not\ni a$.

例如，设 A 是一切偶数所成的集合. 那么 $4 \in A$，而 $3 \notin A$.

一个集合可能只含有有限多个元素，这样的集合叫做*有限集*

合．例如，前十个自然数的集合；一个学校里全体学生的集合；一本书里所有汉字的集合等等都是有限集合．如果一个集合是由无限多个元素组成的，就叫做无限集合．例如，全体自然数的集合；全体实数的集合；小于1的全体正有理数的集合等等都是无限集合．

我们把一个含有 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的有限集合记作 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$．

例如，前五个自然数的集合就记作 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$．

一个集合当然可以只含有一个元素．例如，一切偶素数的集合就只含有一个元素2．只含有一个元素 a 的集合，用上面的记法，就记作 $\{a\}$．

设 A, B 是两个集合．如果 A 的每一元素都是 B 的元素，那么就说 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（读作 A 属于 B），或记作 $B\supseteq A$（读作 B 包含 A）．根据这个定义，A 是 B 的子集必要且只要对于每一元素 x，如果 $x\in A$，就有 $x\in B$．

例如，一切整数的集合是一切有理数的集合的子集，而后者又是一切实数的集合的子集．

我们现在引入几个记号．

用 $(\cdots)\Longrightarrow(\cdots)$ 表示“如果 $(\cdots)$，则 $(\cdots)$”．例如，“如果 $x\in A$，则 $x\in B$”就记作 $x\in A\Longrightarrow x\in B$．

用符号 $(\cdots)\Longleftrightarrow(\cdots)$ 表示“$(\cdots)$ 必要且只要 $(\cdots)$”．

因此，“A 是 B 的子集”就可以表示为

$$(A\subseteq B)\Longleftrightarrow(\text{对一切 } x\text{: } x\in A\Longrightarrow x\in B).$$

如果 A 不是 B 的子集，就记作 $A\nsubseteq B$ 或 $B\nsupseteq A$．因此，A 不是 B 的子集必要且只要 A 中至少有一个元素不属于 B．即

$$(A\nsubseteq B)\Longleftrightarrow(\text{存在一个元素 } x,\ x\in A \text{ 但 } x\notin B).$$

例如，一切可以被3整除的整数所成的集，不是一切偶数所成

的集的子集，因为3属于前者但不属于后者. 集合$\{1,2,3\}$不是$\{2,3,4,5\}$的子集.

根据定义，一个集合A总是它自己的子集. 即

$$A\subseteq A.$$

如果集合A与B是由完全相同的元素组成的，就说A与B相等，记作$A=B$. 我们有

$$(A=B)\Longleftrightarrow(\text{对一切 } x\text{-}x\in A\Longleftrightarrow x\in B).$$

例如，设$A=\{1,2\}$，B是二次方程$x^2-3x+2=0$的根的集合，则$A=B$.

下列事实是明显的:

$$(A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq C)\Longrightarrow(A\subseteq C).$$

$$(A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A)\Longleftrightarrow(A=B).$$

现在设A,B是两个集合. 由A的一切元素和B的一切元素所成的集合叫做A与B的并，记作$A\cup B$.

例如，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4\}.$$

又例如，A是一切有理数的集合，B是一切无理数的集合，则$A\cup B$是一切实数的集合. 显然$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$.

根据定义，我们有

$$(x\in A\cup B)\Longleftrightarrow(x\in A \text{ 或 } x\in B).$$

$$(x\notin A\cup B)\Longleftrightarrow(x\notin A \text{ 且 } x\notin B).$$

由集合A与B的公共元素所组成的集合叫做A与B的交，记作$A\cap B$. 显然，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$.

例如$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则

$$A\cap B=\{2,3,4\}.$$

我们有

$$(x\in A\cap B)\Longleftrightarrow(x\in A \text{ 且 } x\in B).$$

$$(x \notin A \cap B) \Longleftrightarrow (x \notin A \text{ 或 } x \notin B).$$

A与B的并和交可以由下面的图来示意，图 1.1 的阴影部分表示 $A \cup B$，图 1.2 的阴影部分表示 $A \cap B$.

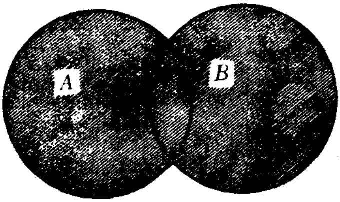

图 1.1

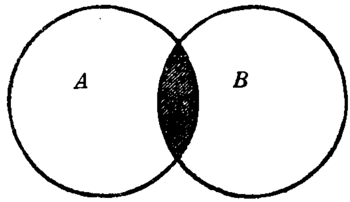

图 1.2

两个集合A与B自然不一定有公共元素. 为了说话方便，这时就说它们的交是空集. 不含任何元素的集合叫做空集.

例如，设A是一切有理数的集合，B是一切无理数的集合. 那么$A \cap B$是空集. 又如，方程 $x^2+1=0$ 的实根的集合是一个空集.

我们用符号 $\varnothing$ 表示空集，并且约定空集是任意集合的子集.

例 1 我们证明

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

设 $x \in A \cap (B \cup C)$. 那么 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$，于是 $x \in A$ 且 x 至少属于B与C中之一. 若 $x \in B$，那么因为 $x \in A$，所以 $x \in A \cap B$；同样若 $x \in C$，则 $x \in A \cap C$. 不论哪一种情形都有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 所以

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

反之，若 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$，那么 $x \in A \cap B$ 或者 $x \in A \cap C$. 但$B \subseteq B \cup C$，$C \subseteq B \cup C$，所以不论哪一种情形都有 $x \in A \cap (B \cup C)$，所以

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

这就证明了上述等式.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

两个集的并与交的概念可以推广到任意 n 个集上去. 设 A_1, $A_2, \cdots, A_n$ 是给定的集. 由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一切元素所成的集叫做 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并；由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的一切公共元素所成的集叫做 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交. $A_1, A_2, \cdots, A_n$的并和交分别记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 和 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. 我们有

$(x \in A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \Longleftrightarrow (x$至少属于某一 A_i, $i=1, 2, \cdots, n)$.

$(x \in A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \Longleftrightarrow (x$ 属于每一A_i, $i=1, 2, \cdots, n)$.

由于以下几种数集经常被用到，所以习惯上用一些特定的字母来表示. 我们约定:

$\mathbf{Z}$ 表示全体整数的集.

$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集.

$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集.

$\mathbf{C}$ 表示全体复数的集.

如果一个集 A 是由一切具有某一性质的元素所组成的，那么就用记号

$$A = \{x \mid x \text{ 具有某一性质}\}$$

来表示. 例如,

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -1 < x < 1\}$$

就表示一切大于 -1 且小于 1 的实数所组成的集.

给了两个集 A 和 B, 除了上面所定义的交集和并集以外，我们有时还要用到两个概念.

设 A, B 是两个集. 令

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

也就是说, $A-B$ 是由一切属于 A 但不属于 B 的元素所组成的. 称为 B 在 A 中的余集，或者称为 A 与 B 的差. 例如, $\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 就是一切无理数所组成的集.

应该注意的是，在 $A-B$ 的定义里，并没有要求 B 是 A 的子集. 例如 $\mathbf{Q}-\mathbf{C}=\varnothing$.

最后介绍两个集的积的概念.

设 A, B 是两个集. 令

$$A\times B=\{(a, b)\mid a\in A, b\in B\}.$$

称为 A 与 B 的积.

$A\times B$ 是由一切元素对 (a, b) 所成的集，其中第一个位置的元素 a 取自 A，第二个位置的元素 b 取自 B.

两个集的积对我们来说并不是什么新的东西. 例如，取定一个坐标系以后，平面上的点的坐标是一对实数 (x, y). 平面上所有点的坐标的集就是 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的积:

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}=\{(x, y)\mid x, y\in\boldsymbol{R}\}.$$

习　题

1. 设 $\boldsymbol{Z}$ 是一切整数的集，X 是一切不等于零的有理数的集. $\boldsymbol{Z}$ 是不是 X 的子集？

2. 设 a 是集 A 的一个元素. 记号 $\{a\}$ 表示什么？写法 $\{a\}\in A$ 对不对？

3. 设 $A=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}, -1\leqslant x\leqslant 1\}$;

$B=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}, x>0\}$;

$C=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}, -1<x<2\}$.

写出 $A\cap(B\cup C)$ 和 $A\cup(B\cap C)$.

4. 写出含有四个元素的集 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 的一切子集.

5. 设 A 是含有 n 个元素的集. A 中含有 k 个元素的子集共有多少个？

6. 下列论断哪些是对的，哪些是错的？对于错的论断举出反例，并且把错误的论断改正过来.

(i) $x\in A\cup B$ 且 $x\notin A \Longrightarrow x\in B$.

(ii) $x\in A$ 或 $x\in B \Longrightarrow x\in A\cap B$.

(iii) $x\notin A\cap B \Longrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$.

(iv) $x\notin A\cup B \Longrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$.

8. 证明下列等式:

(i) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(ii) $A\cap(A\cup B)=A$.

(iii) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

1.2 映射

在中学数学里，已经学习过映射的概念．映射是数学中最基本的概念之一．在这一节里，我们将讨论这个概念和它的一些简单性质．

定义 1 设A, B是两个非空集合．A到B的一个映射指的是一个对应法则，通过这个法则，对于集合A中每一元素x，有集合B中一个唯一确定的元素y与它对应．

我们常用字母$f, g, \cdots$表示映射．用记号$f: A\to B$表示f是A到B的一个映射．

如果通过映射f，与A中元素x对应的B中元素是y，那么就写作

$$f: x\longmapsto y.$$

这时y叫做元素x在f之下的象，记作$f(x)$.

如果对于每一$x\in A$, $f(x)$都已给出，那么映射f就完全给出了．

例 1 令$\mathbf{Z}$是一切整数的集．对于每一整数n，令$f(n)=2n$与它对应．那么f是$\mathbf{Z}$到$\mathbf{Z}$的一个映射．

例 2 令$\mathbf{R}$是一切实数的集合，B是一切非负实数的集合．对于每一$x\in\mathbf{R}$，令$f(x)=x^2$与它对应；$f: x\longmapsto x^2$，那么f是$\mathbf{R}$到B的一个映射．

例 3 设$A=B=\{1, 2, 3, 4\}$.

$$f:\ 1\longmapsto 2,\ 2\longmapsto 3,\ 3\longmapsto 4,\ 4\longmapsto 1.$$

这是 A 到 B 的一个映射.

例 4 设 A 是一切非负实数的集合, B 是一切实数的集合. 对于每一 $x\in A$, 令 $f(x)=\pm\sqrt{x}$ 与它对应. f 不是 A 到 B 的映射, 因为当 $x>0$ 时, $f(x)$ 不能由 x 唯一确定.

例 5 令 $A=B$ 等于一切自然数的集合.

$$f: n\longmapsto n-1$$

不是 A 到 B 的映射, 因为 $f(1)=1-1=0\notin B$.

例 6 设 A 是任意一个集合. 对于每一 $x\in A$, 令 $f(x)=x$ 与它对应:

$$f: x\longmapsto x.$$

这自然是 A 到 A 的一个映射. 这个映射称为集合 A 的恒等映射.

从上面所举的这些例子看出, 关于 A 到 B 的映射应该注意以下几点:

1° A 与 B 可以是相同的集合, 也可以是不相同的集合.

2° 对于 A 的每一个元素 x, 需要有 B 中一个唯一确定的元素与它对应.

3° 一般说来, B 的元素不一定都是 A 中元素的象(参看例1).

4° A 中不相同的元素的象可能相同(参看例 2).

设 $f: A\to B$, $g: A\to B$ 都是 A 到 B 的映射. 如果对于每一 $x\in A$, 都有 $f(x)=g(x)$, 那么就说映射 f 与 g 是相等的, 记作 $f=g$.

例 7 令

$$f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\longmapsto |x|,$$
$$g: \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ x\longmapsto +\sqrt{x^2}.$$

那么 $f=g$.

映射这个概念对我们说来并不陌生, 它就是我们所熟悉的函数概念的推广, 因此也常常把 A 到 B 的映射叫做定义在 A 上, 取值在 B 内的函数.

设 $f: A \to B$ 是一个映射. 对于 $x \in A$, x 的象 $f(x) \in B$. 一切这样的象作成 B 的一个子集, 用 $f(A)$ 表示:

$$f(A)=\{f(x) \mid x \in A\},$$

叫做 A 在 f 之下的象, 或者叫做映射 f 的象.

例如, 在上面的例 1 里, $f(\mathbf{Z})$ 就是一切偶数的集合, 在例 2 和例 3 里, $f(A)=B$.

映射 f 的象 $f(A)$ 可能是 B 的一个真子集 (即 $f(A) \subseteq B$ 但 $f(A) \neq B$), 也可能等于 B. 对于后一情形, 给予以下的

定义 2 设 f 是 A 到 B 的一个映射. 如果 $f(A)=B$, 那么就称 f 是 A 到 B 上的一个映射, 这时也称 f 是一个满映射 (简称满射).

例 2, 例 3 和例 6 都是满射, 但例 1 不是满射.

根据这个定义, f: $A \to B$ 是满射必要且只要对于 B 中每一元素 y, 都有 A 中元素 x 使得 $f(x)=y$.

关于映射, 只要求对于 A 中每一个元素 x, 有 B 中一个唯一确定的元素 y 与它对应, 但是 A 中不同的元素可以有相同的象. 例如, 在例 2 里, 对于绝对值相同的两个非零实数 x 和 $-x$, 它们的象都是 x^2. 然而有的映射具有这样的性质: A 中任意两个不同元素的象也不相同. 例 1, 例 3 和例 6 中的映射都具有这一性质. 对于这样的映射, 我们也给它起一个名字:

定义 3 设 f: $A \to B$ 是一个映射. 如果对于 A 中任意两个元素 x_1 和 x_2, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 那么就称 f 是 A 到 B 的一个单映射, 简称单射.

上面的例 1, 例 3 和例 6 都是单射.

设 $f: A \to B$ 是 A 到 B 的一个映射, 而 g: $B \to C$ 是 B 到 C 的一个映射. 那么对于每一 $x \in A$, $f(x) \in B$, 因而 $g(f(x))$ 是 C 中的一个元素. 因此, 对于每一 $x \in A$, 就有 C 中唯一确定的元素 $g(f(x))$

与它对应，这样就得到 A 到 C 的一个映射，这个映射是由映射 $f: A\to B$ 和 $g: B\to C$ 所决定的，称为 f 与 g 的合成．记作 $g\circ f$．于是我们有

$$g\circ f:\ A\to C;\ g\circ f(x)=g(f(x)),\ \text{对一切}\ x\in A.$$

f 与 g 的合成可以由下面的图来示意:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

例 8 设

$$f:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R};\ x\longmapsto x^2.$$

$$g:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R};\ x\longmapsto \sin x.$$

那么
$$g\circ f:\ \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R};\ x\longmapsto \sin x^2.$$

例 9 设 $A=\{1, 2, 3\}$.

$$f:\ A\to A;\ 1\longmapsto 2,\ 2\longmapsto 3,\ 3\longmapsto 1.$$

$$g:\ A\to A;\ 1\longmapsto 3,\ 2\longmapsto 1,\ 3\longmapsto 2.$$

那么

$$g\circ f: A\to A;\ 1\longmapsto 1,\ 2\longmapsto 2,\ 3\longmapsto 3.$$

映射的合成也不是什么新的概念，它不过是复合函数概念的推广而已.

设给定映射

$$f: A\to B,\ g: B\to C,\ h: C\to D.$$

那么合成映射 $h\circ(g\circ f)$ 和 $(h\circ g)\circ f$ 都是 A 到 D 的映射．我们有：

(1) $$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

事实上，令 $u=g\circ f$, $v=h\circ g$．那么对于 A 的任意元素 x,

$$h\circ u(x)=h(u(x))=h(g(f(x))),$$

$$v\circ f(x)=v(f(x))=h(g(f(x))).$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com