数学分析题解

（四）

白玉兰　彭树森　陆子采　编解

黑龙江科学技术出版社

数学分析题解

（四）

白玉兰 彭树森 陆子采 编解

黑龙江科学技术出版社

一九八五年·哈尔滨

责任编辑：张宪臣
封面设计：昕 晖

数学分析题解

（四）

白玉兰 彭树森 陆子采 编解

黑龙江科学技术出版社出版
（哈尔滨市南岗区建设街35号）
黑龙江省教育厅印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行
开本787×1092毫米1/32·印张9.875·字数202千
1985年2月第一版·1985年2月第一次印刷
印数：1—12,305

书号：13217·119 定价：1.90元

目　　录

第十三章　函数项级数……………………………………（1）

内容提要……………………………………………………（1）

§1　基本概念和一致收敛性……………………………（1）

§2　一致收敛判别法……………………………………（4）

§3　一致收敛级数的性质………………………………（6）

§4　幂级数………………………………………………（9）

§5　初等函数的幂级数展开

——泰勒（Taylor）级数……………………（12）

题目之部……………………………………………………（15）

解答之部……………………………………………………（42）

第十四章　广义积分……………………………………（208）

内容提要……………………………………………………（208）

§1　广义积分的定义……………………………………（208）

§2　广义积分的一些性质及有关概念………………（210）

§3　广义积分收敛的判别法……………………………（214）

题目之部……………………………………………………（217）

解答之部……………………………………………………（228）

题号对照表…………………………………………………（308）

第十三章

函数项级数

内容提要

§1 基本概念和一致收敛性

定义在数集X上的一列函数

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots$$

称为函数序列。设对每一个$x\in X$，数列$\{f_n(x)\}$有极限，我们得到定义在X上的一个函数$f(x)$：

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

这个函数 $f(x)$称为函数序列$\{f_n(x)\}$的极限函数。

上述数集X虽具普遍性，但在数学分析中，实际上用到的数集大都是区间（闭或不闭、有限或无限）。为简便计，以下我们说到数集X，都指区间。

设有定义于区间X上的函数序列 $\{u_n(x)\}$，将此序列的各项用加号“+”连接起来，成为

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，称为函数项级数。象数项级数一样，记

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

则$\{S_n(x)\}$是$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和的函数序列。如果这个函数序列在区间$X$上有极限函数$S(x)$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$X$上收敛，有和函数$S(x)$。记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$$

使此式成立的x的全体叫做级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域。

函数序列和函数项级数有数列和数项级数同样的关系，不赘述。

设在区间X上

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

按极限定义，对任意的$\varepsilon>0$，存在N，使当$n>N$时

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \qquad (1)$$

一般地，N既依赖于ε，又依赖于x。如果求得的N，与x无关，即（1）对一切$x\in X$成立，则称函数序列$\{f_n(x)\}$在区间X上一致收敛或均匀收敛或匀敛于$f(x)$。

设有区间X上的函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，其部分和函数序列是

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

其余式是

$$\gamma_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$$

如$\{S_n(x)\}$一致收敛于极限函数 $S(x)$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛于和函数 $S(x)$。就是说，对 $\varepsilon>0$，存在 N，使当$n>N$时

$$|S_n(x)-S(x)|=|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-S(x)|<\varepsilon$$

或

$$|\gamma_n(x)|=|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)|<\varepsilon$$

对一切$x\in X$成立，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$X$上一致收敛于 $S(x)$。

我们给出区间X上的函数序列$\{f_n(x)\}$一致收敛的另一定义。

设区间X上的函数序列收敛于极限函数 $f(x)$，记

$$\|f_n-f\|=\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$$

如果

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$$

则称函数序列$\{f_n(x)\}$在区间X上一致收敛于 $f(x)$。对于函数项级数的一致收敛，当有与此相应的另一定义，请读者自己叙述。

上述两种一致收敛的定义是等价的。

与数项级数一样，可以定义函数项级数的绝对收敛，我们从略。值得注意的是，函数项级数的一致收敛与绝对收敛没有必然的关系.有的函数项级数一致收敛，而非绝对收敛；又有的函数项级数绝对收敛，而非一致收敛。

§2 一致收敛判别法

前节所述一致收敛，有函数序列的一致收敛和函数项级数的一致收敛.关于一致收敛判别法，也有函数序列的一致收敛判别法与函数项级数的一致收敛判别法，二者实质上是一回事.为简单计，我们只叙述函数项级数的一致收敛判别法。

定理1 歇希准则

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$X$上一致收敛的充要条件是，对任意的$\varepsilon>0$，存在$N$，使当$n>N$时

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m}u_n(x)\right|=\left|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)\right|<\varepsilon$$

对一切自然数m和一切$x\in X$成立。

定理2 外尔斯特拉斯 Weierstrass 判别法

设（i）级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的项在区间$X$上适合不等式

$$|u_n|\leqslant c_n,\quad n=1,2,\cdots$$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$X$上一致收敛。

这个判别法又名"M——判别法"。定理中的收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$叫做优势级数。

定理3 亚贝尔(Abel)判别法

设（i）级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$在区间$X$上一致收敛；

(ii) 对每一个固定的$x\in X$，数列$a_n(x)$单调；

(iii) 对任意的x与n，$|a_n(x)|\leqslant k$，k为一常数；

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$在$X$上一致收敛。

定理4 狄里希莱（Dirichlet）判别法

设（i）级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$的部分和$B_n(x)=\sum_{k=1}^{n} b_k(x)$在区间上一致有界，即存在常数$k$，使

$$|B_n(x)|\leqslant k$$

对一切$x\in X$与一切自然数n成立；

(ii) 在区间X上，函数序列$a_n(x)$一致收敛于零，且对每一$x\in X$，序列$a_n(x)$是单调序列；则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$在$X$上一致收敛。

定理 5　狄尼 (Dini) 判别法

设 (i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且都不取负值或都不取正值；

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的和函数 $f(x)$；则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

用函数序列的形式来叙述，这条定理是：设 $\{S_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数序列，收敛于连续函数 $S(x)$，且 $[a,b]$ 上每一个 x，$S_n(x)$ 是单调数列，则 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$。

§3　一致收敛级数的性质

定理 6 (和函数的连续性)

设在区间 X (闭或不闭，有限或无限) 上，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每项 $u_n(x)$ 连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛于和函数 $S(x)$，则 $S(x)$ 在区间 X 连续。

定理 7　(逐项取极限)

设 (i) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 定义于区间 X (闭或不闭，有限或无限) 上，

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = c_n \quad (n=1,2,\cdots)$$

(ii) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛于 $S(x)$；

(iii) 极限 c_n 所组成的数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，和为 c，

即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c$$

则

$$\lim_{x \to a} S(x) = c$$

即

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to a} S(x) = c$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x)$$

这表示在一致收敛的前提下，极限号与求和号可以交换。

定理 8 （逐项积分）

设在闭区间 $[a, b]$ 上，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每项 $u_n(x)$ 可积，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛于和函数 $S(x)$，则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 可积，且有

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx \quad (1)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

又可写成

$$\int_a^b\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right]dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_k(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right]dx$$

记 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}S_n(x)dx \qquad (2)$$

在一致收敛的前提下，（1）式表示积分号与求和号可以交换；（2）式乃本定理用函数序列来叙述的形式，表示极限号与求积分号可以交换。

定理9（逐项微商）

设在$[a,b]$上，

（i）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛于$S(x)$；

（ii） $u_n(x)$有连续的导函数 $u_n'(x)$ $(n=1,2,\cdots)$；

（iii） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$一致收敛于 $\sigma(x)$。

则在$[a, b]$上，$S(x)$可导，且有

$$S'(x)=\sigma(x)$$

即

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\frac{d}{dx}S(x)=\sigma(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x) \quad (3)$$

又可写成

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx}u_k(x)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

记 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}S_n(x)=\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty}S_n(x) \quad (4)$$

在$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$一致收敛的前提下，（3）式表示微分号与求和号可以交换。（4）式乃本定理用函数序列来叙述的形式，表示极限号与微分号可以交换。值得注意的是，本定理并不假定$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛，但含有$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的一致收敛性。

§4 幂级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots \quad (1)$$

的函数项级数叫幂级数，其中 a_n 是常数；其部分和是多项式。这个级数至少有一个收敛点，即 $x=x_0$。

对幂级数（1），存在 $R\geqslant 0$，使当 $|x-x_0|<R$ 时，级数收敛；当 $|x-x_0|>R$ 时，级数发散。我们称 R 为幂级数（1）的收敛半径。因此，这个级数有以 x_0 为中心，R 为半径的收敛区间 $(x_0-R,\ x_0+R)$，至于级数在两个端点 $x_0\pm R$ 的情况，则不能判定，可能收敛，也可能发散，因级数而异。开区间 $(x_0-R,\ x_0+R)$ 称为收敛区间

对幂级数（1），作一个简单的变换 $x-x_0=y$，变换后，仍记 y 为 x，得到幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_0x^2+\cdots \tag{2}$$

在以 $x=0$ 为中心，R 为半径的区间 $(-R,\ R)$ 收敛。以下叙述，以级数（2）为准。

定理10 歌希——阿达玛（Cauchy—Hadamard）定理

设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则幂级数（2）的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho} & \text{当 } 0<\rho<+\infty\\ +\infty & \text{当 } \rho=0\\ 0 & \text{当 } \rho=+\infty\end{cases}$$

作为本定理的推论，如存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$$

则有本定理的同样的结论。

定理11 设幂级数（2）的收敛半径 $R>0$，$0<r<R$，则幂级数（2）在$[-r, r]$绝对收敛且一致收敛。

设一个函数项级数在 (a, b) 收敛，而在任意的 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ $(a<\alpha<\beta<b)$一致收敛，我们称这个级数在 (a, b) 内闭匀敛。据此，任何幂级数在其收敛域内是内闭匀敛的。

定理12 设幂级数(2)的收敛半径 $R>0$，和为$f(x)$，则 $f(x)$在 $(-R,R)$ 连续。

定理13 幂级数（2）在其收敛区间 $(-R,R)$ 内可以逐项积分和逐项微分。

定理14 设幂级数（2）在 $x=R$ 收敛，则在 $[0,R]$一致收敛（但不一定绝对收敛）；如在 $x=R$ 发散，则在$[0, R]$必不一致收敛。

定理15 亚贝尔第二定理

设幂级数（2）在 $x=R$ 收敛，则其和$f(x)$在 $x=R$ 左连续，即有

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$$

定理16 唯一性定理

设两个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_0x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

与

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$$

在 $x=0$ 的某邻域有相同的和，那末这两级数恒等，就是说，对应的系数相等：

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots,\ a_n=b_n,\ \cdots$$

这条定理表明，一个函数如能展成幂级数，它的展式是唯一的。

§5 初等函数的幂级数展开——泰勒(Taylor)级数

根据第二册第七章的叙述，设函数 $f(x)$在 x_0 的某邻域内有任意阶导数，则在此邻域内有泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \qquad (1)$$

其中$R_n(x)$为余项，在第二册第七章中，我们曾叙述过$R_n(x)$的三种形式，即皮亚诺余项，拉格朗日余项和歌希余项，现在我们介绍一种积分表达式

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

叫做积分余式，或拉普拉斯余式。

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域上，有任意阶导数，作幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \quad (2)$$

称为 $f(x)$ 的泰勒级数。当 $x_0=0$ 时，此级数成为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

叫做麦克劳林（Maclaurin）级数。

泰勒级数、麦克劳林级数是否收敛，如果收敛，是否收敛于 $f(x)$，是待研究的问题。

定理17 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域有任意阶导数，则 $f(x)$ 在此邻域能展成幂级数（2），即有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

的充要条件是（1）式中

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

一个函数如能展成幂级数，则此幂级数必为此函数的泰勒级数，就是说，一个函数的幂级数展开的形式是唯一的。

定理18 如果存在一个正数 c，使得

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant c$$

$$-r\leqslant x\leqslant r,\quad n=0,1,2\cdots$$

则函数 $f(x)$ 在区间 $[-r,\ r]$ 上可展成幂级数。

基本初等函数的展式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad -\infty<x<+\infty$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com