经济数学

（下册 概率论与数理统计）

主编 李敏 刘心

大连海事大学出版社

目　　录

第一章　随机事件与概率

在自然界和人类社会中，存在着两类不同性质的现象。一类是确定现象，即在一定条件下必然发生(或必然不发生)的现象。例如，上抛石子必然下落；在标准大气压下，水加热到100℃必然沸腾；水温高于4℃必然不会结冰。另一类现象呈现不确定性，即在一定条件下可能 发生也可能不发生。例如，明天某地要下雨；抛一枚硬币国徽向上，从含有2件次品的10件产品中任取3件，其中含有次品等。像这样在相同的条件下每次试验可能发生的结果不惟一的现象称为**随机现象**(或**偶然现象**)。

人们经过长期研究和实践，发现随机现象虽然就每次试验(或观察)结果来看，它具有不确定性，但在大量重复试验中，它的结果却呈现某种规律性—统计规律性。例如，多次抛掷一枚均匀的硬币，正面朝上大致有半数，而且抛掷次数越多越接近这个比例；根据各国各时期人口统计资料，新生婴儿中男婴的比例总是在51%左右，1982年我国人口普查结果，男性约占51.5%，也证实了这一点。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它是近代数学的重要组成部分。

§1.1 随机事件

一、随机试验

在概率论中，我们把对随机现象进行的试验或观察统称为**随机试验**，简称**试验**，用字母 E 表示。它具有以下三个特点：

1. 试验可在相同条件下重复进行，即重复性。

2. 每次试验的结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果，即明确性。

3. 每次试验之前无法确定会出现哪个结果，即随机性。

例 1 设有下列试验：

E_1：抛一硬币，观察出现正(H)面反(T)面的情况。

E_2：掷一枚骰子，观察出现的点数。

E_3：从含有 3 件一等品的 10 件产品中任取 3 件，观察出现的一等品数。

E_4：袋中装有红、黄、白各一球，从中任取一球，观察球的颜色。

E_5：从一批灯泡中任取一只试用，观察使用寿命。

E_6：将一枚硬币连抛三次，观察正反面的情况。

以上六个试验，都具有 1 ～ 3 的特点，因而都是概率论中所说的试验。

二、随机事件

随机试验的结果，称为**随机事件**，简称**事件**。用大写字母 A，

$B, C, \cdots$ 表示。试验的每一个直接结果，是该试验的最简单的不可能再分解的事件，称为**基本事件**。试验中的任何事件都是由基本事件组成的，由两个或两个以上基本事件组合而成的事件，称为**复合事件**。

例 2 作如下试验

E_1：掷一枚骰子，观察出现的点数。

E_2：从 0，1，2，…，9 十个数字中，任取一个数字，观察取到的是哪个数字。

E_1 中出现 1 点、2 点、3 点、4 点、5 点、6 点均为基本事件，而出现"偶数点"，是由出现 2 点，4 点和 6 点这样三个基本事件构成的复合事件。

E_2 中取出 0，1，2，…，9 均为基本事件，而取出的是"奇数"，是由取出 1，3，5，7，9 这样五个基本事件构成的。

在一定条件下，必然发生的事件，称为**必然事件**，记作 Ω。在一定条件下，必然不发生的事件，称为**不可能事件**，记作 Φ。例 2 的试验 E_1 中，"点数大于 0"是必然事件；而"点数大于 7"则是不可能事件。

需要指出的是：必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现，不是随机事件。但是为了讨论问题方便，把它们都看成是特殊的随机事件，作为随机事件的两个极端情况。

三、样本空间与事件

随机试验的每一个最基本的可能结果，称为该试验的**样本点**（或称**基本事件**）通常用 ω 表示。随机试验的所有样本点（或基本事件）组成的集合称为该试验的**样本空间**。用 Ω 表示。所谓随机

事件，就是样本空间 Ω 的子集，而 Ω 的单元素子集，就是基本事件。显然，Ω 本身就是必然事件，空集 Φ 就是不可能事件。把事件和集合等同起来，这是把概率论纳入现代数学行列的关键性一步，对概率论的发展有重大意义。

例 3 写出例 1 中试验 $E_k(k = 1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 Ω_k。

$\Omega_1 = \{H, T\}$

$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}$

$\Omega_4 = \{$红，黄，白$\}$

$\Omega_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$

$\Omega_6 = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

四、事件间的关系和运算

在随机试验中，各个事件之间的关系不是孤立的，而是相互联系的。下面引进事件间的主要关系及事件的运算。

1. 事件的包含与相等

若事件 A 发生必导致 B 发生，即 A 为 B 的子集，则称**事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B**（也称事件 A 是事件 B 的子事件）。记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。显然，对于任何事件 A，有

$$\Phi \subset A \subset \Omega$$

如果事件 B 包含事件 A，而且事件 A 也包含事件 B，即 $B \subset A$ 且 $A \supset B$ 则称**事件 A 与 B 相等**。记作 $A = B$。

2. 事件的和（并）

事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为**事件 A 与事**

件 B 的和(并)。记作 $A+B$ 或 $A\cup B$。

类似地，事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 中至少有一个发生，这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$。

3．事件的积(交)

事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为**事件 A 与事件 B 的积(交)**，记作 AB 或 $A\cap B$。

类似地，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 的积，记作　$A_1A_2\cdots A_n$ 或 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$。

4．事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为**事件 A 与事件 B 的差**。记作 $A-B$。

5．互不相容(互斥)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称**事件 A 与事件 B 是互不相容的(互斥的)**。类似地，称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 是互不相容的，是指它们中任何两个事件都是互不相容的。

6．对立事件

事件 A 不发生，即事件“非 A”称为 **A 的对立事件**，又称为 A 的逆事件，因此称 A 与 $\bar{A}$ 互为对立事件。由定义可知，两个对立事件一定是互不相容事件；反之，两个互不相容的事件不一定为对立事件，对立事件满足下面关系式：

$$\bar{\bar{A}}=A$$

$$A\bar{A}=\Phi$$

$$A+\bar{A}=\Omega$$

$$\bar{\Omega}=\Phi$$

$$\bar{\Phi}=\Omega$$

各事件间的关系及运算如图 1—1 所示。

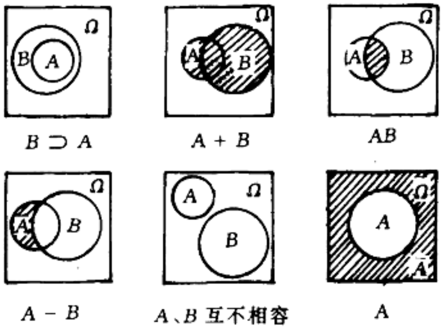

图 1—1

不难验证，事件的运算满足如下运算律：

	加　　法	乘　　法
交换律	$A+B=B+A$	$AB=BA$
结合律	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(AB)C=A(BC)$
分配律	$A(B+C)=AB+AC$	$A+BC=(A+B)(A+C)$
蕴涵律	$A+B\supset A$ $A+B\supset B$	$AB\subset A$ $AB\subset B$
重叠律	$A+A=A$	$AA=A$
吸收律	$A+\Omega=\Omega$ $A+\Phi=A$	$A\Omega=A$ $A\Phi=\Phi$
对立律	$A+\bar{A}=\Omega$	$A\bar{A}=\Phi$
摩根律	$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$	$\overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}$

例 4. 试验 E 为掷一颗骰子，观察其出现的点数，在这个试验中记 A = "奇数点"，B = "被 3 整除的点"，C = "点数小于 2"，D = "偶数点"，F = "点数不超过 4"，写出试验 E 的样本空间及各事件间的关系。

解：$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{1,3,5\}$　　　$B=\{3,6,\}$

$C=\{1\}$　　　$D=\{2,4,6\}$

$F=\{1,2,3,4\}$

$A\supset C$　　$F\supset C$　　$BC=\Phi$　　$DC=\Phi$

$AD=\Phi$　　且 A 与 D 为对立事件。

例 5. 在产品质量的抽样检验中，每次抽取一个产品，记事件 A_n = "第 n 次取到正品" $n=1,2,3$。用事件运算的关系式表示下列事件：

(1) 前两次都取到正品，第三次未取到正品；

(2) 三次都未取到正品；

(3) 三次中只有一次取到正品；

(4) 三次中至多有一次取到正品；

(5) 三次中至少有一次取到正品。

解：(1) $A_1A_2\bar{A}_3$；

(2) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ 或 $\overline{A_1+A_2+A_3}$；

(3) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$；

(4) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

或 $\bar{A}_1\bar{A}_2+\bar{A}_1\bar{A}_3+\bar{A}_2\bar{A}_3$；

(5) $A_1+A_2+A_3$

例 6. 甲、乙、丙三人各进行一次试验，事件 A_1,A_2,A_3 分别表

示甲、乙、丙试验成功，说明下列事件所表示的试验结果：$\bar{A}$；A_1+A_2；$\overline{A_2A_3}$；$\bar{A}_2+\bar{A}_3$，$A_1A_2A_3$；$A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$。

解：$\bar{A}$ = “甲试验失败”；

A_1+A_2 = “乙、丙二人中至少有一人试验成功”；

$\overline{A_2A_3}=\bar{A}_2+\bar{A}_3$ = “乙、丙二人最多有一人试验成功”，即乙、丙二人至少有一人试验失败”

$A_1A_2A_3$ = “甲、乙、丙三人均试验成功”；

$A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$ = “甲、乙、丙三人中至少有两人试验成功”。

§ 1.2 事件的概率

一、概率的统计定义

我们知道，随机事件在一次试验中是否发生是无法确定的，但大量重复试验，却有统计规律性。例如，我们考虑抛硬币的试验。设进行了 n 次试验，正面(H) 出现了 k 次，k 称为频数，而$\frac{k}{n}$ 称为频率，设出现 H 为事件A，k 是A 发生的频数，$\frac{k}{n}$ 是A 发生的频率。当试验次数 n 不大时，A 发生的频率可能变化很大，无规律可寻，比如作 10 次试验，A 发生的频率可能是 8/10，作 20 次试验，A 发生的频率可能是 8/20。但是如果 n 充分大，A 发生频率$\frac{k}{n}$ 就会稳定在一个常数 $0\leqslant P\leqslant 1$ 左右，称为频率稳定性。

历史上，有人做过抛掷硬币的试验，结果如下表所示：

试验者	试验次数 n	出现正面频数 k	出现正面频率 k/n
莫　根	2048	1061	0.518
蒲　末	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

容易看出，随着抛掷次数的增加，出现正面的频率 $\frac{k}{n}$ 围绕着一个确定的常数 0.5 做幅度越来越小的摆动，稳定在 0.5。频率的稳定性是事件本身所固有的，不以人们的主观意志而改变的一种客观属性。其稳定值 p 反映了事件A 在一次试验中发生可能性的大小。

设进行 n 次重复试验，若当 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $\mu(A)=\frac{k}{n}$ 稳定地在某一常数 p 附近摆动，则称 p 是事件A 的**概率**，记作 $P(A)=p$

这就是说，频率的稳定性是概率的试验基础，而频率的稳定值是随机事件的概率。频率是个试验值，具有偶然性，可能取多个不同值，它近似地反映了事件可能性的大小；概率是个理论值，只能取惟一值。只有概率，才能精确地反映出事件发生可能性的大小。

二、概率的古典定义

用概率的统计定义计算某一事件的概率有时是非常困难的，甚至不可能。下面我们就古典概型进行研究。

1. 古典概型

若试验 E 满足条件：

1° 样本空间中的样本点只有有限个，即基本事件总数是有限的(有限性)。

2° 每个基本事件发生的可能性相同(等可能性)。

则称为**古典概型**。这是因为它曾是概率论发展初期的主要研究对象。

例如：抛一枚硬币(基本事件只有2个：H,T，且出现 H,T 的可能性均为0.5)；

掷一枚骰子(基本事件只有6个，1～6点，且出现某点的可能性均为1/6)等。都是古典概型。

2. 概率的古典定义

在古典概型中，若总的基本事件数为 n，而事件 A 包含了 m 个基本事件，

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

称为**概率的古典定义。**

3. 古典概率的基本性质：

(1) 对任意事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$，　　$P(\Phi)=0$

(3) 若 $AB=\Phi$，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$；

若 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 两两互斥，即 $A_iA_j=\Phi\quad(i\neq j)$

则 $P(\sum_{i=1}^{n}Ai)=\sum_{i=1}^{n}P(Ai)$ (有限可加性)。

例1. 将一枚匀称的硬币连续掷两次，计算正面只出现一次及正面至少出现一次的概率。

解　设事件 $A=$“正面只出现一次”，$B=$“正面至少出现一

次"则　$\Omega=\{(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)\}$

而　$A=\{(正,反),(反,正)\}$

$B=\{(正,正),(正,反),(反,正)\}$

故　$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{4}=0.5$　　　$P(B)=\frac{3}{4}=0.75$

这种将样本空间中的基本事件一一列出的作法，仅适用简单的情况，一般我们是利用排列、组合方法，分析求解古典概型问题。因为我们感兴趣的不是各基本事件是什么，而是其个数。

例 2　袋中装有 5 个白球，3 个黑球，从中任取 2 个球，求取出的 2 个都是白球的概率。

解　设 $A=$"取到 2 个白球"，由题意

$n=C_8^2$　　　$m=C_5^2$　　故

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}$$

例 3　有 10 件产品，其中 2 件次品，无放回地取 3 件，求：

(1) 这三件产品全是正品的概率；

(2) 这三件产品恰有一件次品的概率；

(3) 这三件产品至少有一件次品的概率。

解　设 $A=$"全是正品"；$B=$"恰有一件次品"；$C=$"至少有一件次品"，则

基本事件总数 $n=C_{10}^3$；

(1) A 所含的基本事件数为 C_8^3，

所以　$P(A)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$

(2) B 所含的基本事件数为 $C_8^2C_2^1$，

所以　$P(B)=\frac{C_8^2\,C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$

(3) C 所含的基本事件数为 $C_8^2\,C_2^1 + C_8^1\,C_2^2$

所以 $\quad P(C) = \dfrac{C_8^2\,C_2^1 + C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \dfrac{64}{120} = \dfrac{8}{15}$

例 4 一批产品有 93 件，其中有 3 件次品，从中接连取 2 件产品，第一次取后不再放回(不放回抽样) 求：

(1) “第一次取得次品，第二次取得正品”的概率；

(2) “取得一正品一次品”的概率。

解 设 A =“第一次取得次品，第二次取得正品”，B =“第一次取得正品，第二次取得次品”；C =“取得一正品一次品”，则：

(1) 由题意 $\quad n = C_{93}^1\,C_{92}^1, \qquad m = C_3^1\,C_{90}^1$

故 $\quad P(A) = \dfrac{C_3^1 C_{90}^1}{C_{93}^1\,C_{92}^1} = \dfrac{45}{1426}$

(2) A 所含的基本事件数为：$C_3^1\,C_{90}^1$

B 所含的基本事件数为：$C_{90}^1\,C_3^1$

C 所含的基本事件数为 $A \cup B = C_3^1\,C_{90}^1 + C_{90}^1\,C_3^1$

$(AB = \Phi)$

故：$\quad P(C) = \dfrac{C_3^1\,C_{90}^1 + C_{90}^1\,C_3^1}{C_{93}^1\,C_{92}^1} = \dfrac{45}{713}$

例 5 在例 4 中，其它条件不变，只是改“第一次取后不放回”为“第一次取后放回”(放回抽样)。求 $P(A)$ 与 $P(C)$。

解 这时，基本事件总数 $n = 93^2$；A 所含的基本事件数为 $C_3^1\,C_{90}^1$；B 所含的基本事件数为 $C_{90}^1\,C_3^1$；C 所含的基本数为：$A \cup B = C_3^1\,C_{90}^1 + C_{90}^1\,C_3^1 \quad (AB = \Phi)$；

故 $\quad P(A) = \dfrac{C_3^1\,C_{90}^1}{93^2} = \dfrac{30}{961}$；

$$P(C) = \frac{C_3^1\,C_{90}^1 + C_{90}^1\,C_3^1}{93^2} = \frac{60}{961}$$

§1.3 概率的加法公式

一、互不相容事件的加法公式

在§1.2节中，我们已经给出，两个互斥事件之和的概率等于两个事件概率之和，即若 $AB=\Phi$

则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

这一法则是公理，无法证明，不过我们可以用古典概型加以说明。

设试验 E 的基本事件总数为 n，A 包含 m 个基本事件，B 包含 k 个基本事件。由于 A 与 B 互斥，则 $A+B$ 包含 $m+k$ 个基本事件，于是：

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B)$$

在§1.2节已经指出，这一法则可推广到有限个情形，即

推论1 若 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

推论2 对任意事件 A，有

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

证 $A\bar{A}=\Phi,\quad A+\bar{A}=\Omega$

所以 $\quad P(A+\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})=P(\Omega)=1$

故 $\quad P(A)=1-P(\bar{A})$

例1 从含有4件一等品的10件产品中，任取3件，求其中含有一等品的概率。

解 设 $A=$“含有一等品”；