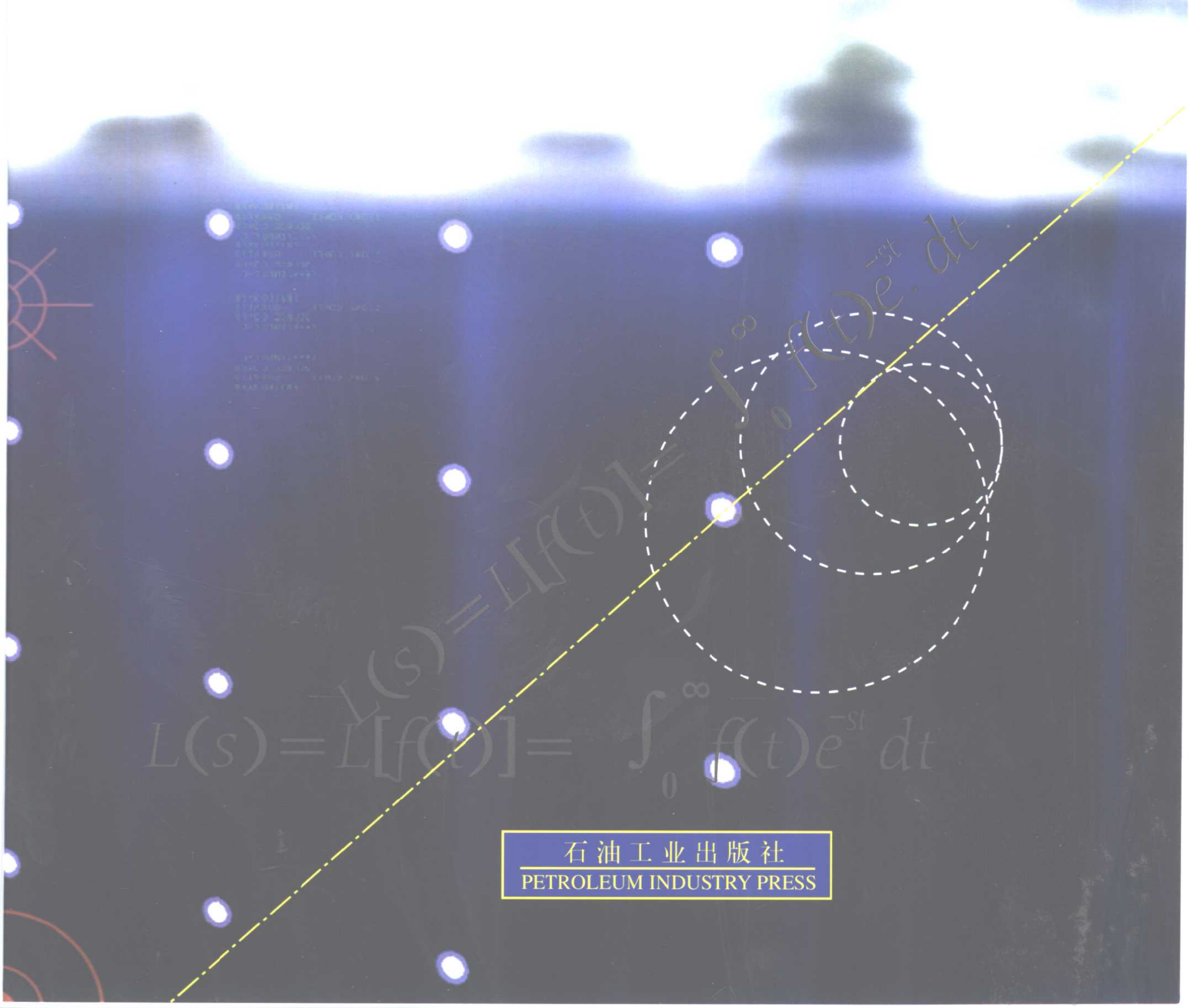
拉普拉斯变换与试井分析

崔迪生　徐建平　赵平起　刘　聪　蔡明俊　蒋　华　编著



石油工业出版社
PETROLEUM INDUSTRY PRESS

拉普拉斯变换与试井分析

崔迪生　徐建平　赵平起
刘　聪　蔡明俊　蒋　华　编著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书论述拉普拉斯变换在试井分析中的应用。第一章回顾拉普拉斯变换在试井领域的应用发展情况，第二章介绍拉普拉斯变换的基本知识，第三至第六章介绍拉普拉斯变换在试井分析中的应用，第七章介绍拉普拉斯空间的试井模型。

本书适合于从事试井分析技术研究开发和解释工作的人员学习使用，也可作为大专院校有关专业师生的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

拉普拉斯变换与试井分析/崔迪生等编著.
北京：石油工业出版社，2002.6
ISBN 7－5021－3762－9

Ⅰ.拉…
Ⅱ.崔…
Ⅲ.拉普拉斯变换－应用－试井
Ⅳ.TE353

中国版本图书馆CIP数据核字（2002）第027761号

石油工业出版社出版
（100011　北京安定门外安华里二区一号楼）
石油工业出版社印刷厂排版印刷
新华书店北京发行所发行
*
787×1092毫米 16开本 7.75印张 197千字 印1—1000
2002年6月北京第1版 2002年6月北京第1次印刷
ISBN 7－5021－3762－9/TE·2747
定价：24.00元

前　言

从试井分析理论的诞生之日起，拉普拉斯变换就与试井分析理论结下了不解之缘。随着试井分析理论和分析方法的发展，这种关系变得越来越重要，应用的范围越来越广大。早期仅仅是求解试井微分方程的工具，而现在变成了一种进行现代试井分析所不能离开的手段。为此，许多过去不是使用拉普拉斯变换求解的试井模型，无一例外地使用拉普拉斯变换再次求解。即使是使用拉普拉斯变换求解有困难，也要尽可能地朝着这个方向靠拢，原因在于利用拉普拉斯空间的解可以方便地进行非线性回归分析，这是唯一被认为是进行试井分析最先进的方法。此外，拉普拉斯空间为压力导数、褶积和反褶积的计算提供了有效的途径，更何况还可以直接在拉普拉斯空间进行试井分析。

作为一般的现代试井分析人员，可能对拉普拉斯变换还比较生疏，甚至不知道什么是拉普拉斯变换。因为所有用到拉普拉斯变换的地方，都包含在数学推导过程中或已经变成计算机程序了，你只要会操作计算机程序，懂得一些基本的试井分析知识，就可以进行试井分析。但是为了更好地进行试井解释工作，或者在试井解释领域有所发挥，阅读本书是会有所帮助的。

在本书的编写过程中，王承毅、楮冠求和王志愿同志帮助搜集了大量文献资料，在此表示感谢。

由于作者水平有限，错误在所难免，敬请读者批评指正。

作者

目　　录

第一章 引　论

第一节 题　解

本书的题目可能有一点叫人费解，怎么能将求解微分方程的一种数学方法和石油工业中的一种油气井的测试技术方法联系到一起来写一本书，究竟有多少内容值得写呢？这就是首先要谈论的问题。

让我们还是从试井说起。

在石油工业中有一个属于油藏工程的专业叫试井。顾名思义，它是测试井的特性的，更确切地说是测试井的流动特性的。井的流动特性包含了井身固有的流动特性和与井身连通的油气藏的流动特性，包括油气藏的压力温度、渗流特性、边界形态、储量大小和井的完善程度等信息。

石油与天然气是埋藏在地层深处的一种可流动的流体矿物，要把它们从地层深处开采出来要建立一个通道，也就是要钻井。钻井是人类了解地层深处是否存在油气储藏的一种最直接的勘探手段，也是将油气开采到地面的必要手段，油气井成了石油工业的命根子。然而井本身的好坏制约着井的流动特性，制约着人们对地下油气藏的认识和开采速度，这里主要是指井与油气藏沟通的好坏，用试井的术语来说就是井的完善程度，或者说是井的表皮效应。当流体流进井筒时不需要克服附加阻力的井是完善井（称为理想条件），要克服附加阻力的井是不完善井，而当流体流进井筒所消耗的力比理想条件下所需要的力还要小时是超完善井。为了衡量表皮效应的大小，试井分析理论中引入了表皮系数 S 这个无量纲数。当表皮系数等于零时，井是完善井，大于零是不完善井，小于零是超完善井。不完善和超完善的程度是以这个数的绝对值大小来区分的。但是负的表皮系数，最小也只能达到 -7 左右，无法使它变得更小。

在现代试井分析中，完善程度或者表皮效应包含着对井身两个方面的评价。

一是井身表面是否真正地和油气层实现了沟通。这主要取决于两个方面的因素，完井方式和和地层伤害。完井有裸眼完井、套管射孔完井、衬管完井、筛管完井和砾石充填完井等方式，使用最多的是套管完井。套管射孔完井是在井中下入钢制套管，并在套管与井壁的环空中注入水泥使之固结起来，然后在油气层井段用高能射孔枪将套管与水泥环射穿，使井筒与油气层连通，油气就可以流入井筒，流到地面。套管射孔完井能够加固井壁，对不同的油气层或油气层的局部进行选择性测试与作业，特别适合多层油藏的开采。无论使用何种完井方式，都可能使井筒与油气层连通得很好，即使是套管射孔完井，因为现代的射孔技术威力是很强大的，射穿套管和水泥环是不成问题的，问题是地层伤害。无论是钻井、固井、完井或其它作业，都有可能使井身附近的地层受到伤害，孔隙被堵塞，使流体无法流入井筒，这种影响与井壁效应融合一体，对流体进入井筒的流动过程发生作用。形成堵塞现象的机理可以是物理的，也可以是化学的。例如钻井液颗粒堵塞油气层孔隙是物理的机械的堵塞，而两种互不相容的流体在井底条件下产生反应生成沉淀堵塞孔隙通道就是一种化学现象。为了防止和解除地层伤害，形成了两套专门的技术即油层保护技术和油层改造技术。例如，油层水

力压裂和油层酸化就是使用广泛的油层改造技术，它们用来解除井附近的地层堵塞，改善流动特性，提高油气井的产量。

由于油气藏埋在很深的地下，钻一口井通常要有数百米或数千米的深度，怎么来认识井身附近有了伤害呢，如何评价伤害的程度呢？试井可以说是一种唯一的有效方法了。最近，在大港油田千米桥古潜山凝析气藏的板深8井，以$16\times10^4m^3/d$天然气和40t左右凝析油的产量稳定地生产了近一年之后，突然产量下降到了只有$3\times10^4m^3/d$天然气的产量，是不是地层中的流体已经枯竭了，还是什么别的原因。幸好在停喷前测试了压力恢复，分析结果是地层堵塞，计算表皮系数S为630，这是试井分析中少见的高表皮系数，而该井原来是完善井，表皮系数为零左右。后来采取措施解除堵塞之后，又恢复了原有的产量。可见试井是一种重要的科学测试技术。分析堵塞的原因是结垢，是两种不相容的水在井底温度条件下产生了化学沉淀。

二是井身在油气藏中展布的几何形状。井身垂直地通过油气藏建立的是直井，斜着穿越油气藏是斜井，当井钻到油气藏后然后拐弯在油气藏中水平地延伸就是水平井。当然有着另一类斜井，出于地面条件的考虑，要绕开建筑物、障碍物或江河湖海，需要钻斜井才能达到地下深处的油气藏，也许到了通过油气层的时候，变成了直井，这种情况对于试井分析来说，还是只能当成直井。对于水平分布的厚度相同的油气层中的斜井与地层的接触面积比直井大，斜井的完善程度比直井高；而水平井与油气层的接触面积比斜井又可能要大得多，水平井的完善程度又比斜井高得多，当然这里是指井身与油气层实现了真正沟通的情况。由于历史上最早出现的是直井，随着勘探开发的需要和钻井技术的发展，出现了斜井和水平井，所以有关斜井和水平井的试井分析理论在井的完善程度方面都是以直井为基准进行比较来分析的，同时无论是斜井还是水平井，远离井身处地层中的流动最后都要变成水平径向流，这就是直井周围地层中流体的流动方式，只不过对于斜井和水平井来说，靠近井身附近的流动不是水平径向流，所以又将斜井和水平井的水平径向流，称之为拟水平径向流。增大井身与油气层的接触面积来提高井的流动特性，增加油气井产量，是现代石油工业的一个发展方向。由此，促进了水平井、分支井和多支井的钻井技术及其相应的配套技术的出现与发展。

井本身具有的流动能力或流动特性主要体现在井筒与油气层的连接处，好比这里有一道门一样，这道门开得大，完全打开了，流通能力就大；开得小，不是完全打开，半开半掩，流通能力就差；门是关闭的，尽管门可能是很大，就没有流通能力。

油气井的流动特性除了井身固有的流通特性以外，还体现在井所连通的油气藏的性质。油气藏的厚度、渗透性、流体的流动性能、压力高低、供油范围大小、边界形状和能量补充条件都会影响井的流动特性。油气藏的渗流特性是多种多样的，有均质的，也有非均质的。非均质油气藏有双重介质的、多重介质的、双渗的、多渗的、多层油气藏、复合油气藏等，就渗透性来说，有渗透率高的，有渗透率低的。油气藏的边界有封闭的、半封闭的、敞开的、定压的、变压的，边界距离的远近不同，各种边界组合的形状多样，油气藏的压力与所含流体性质也千差万别，影响油气藏的流动性质的因素是复杂的。我们只有很好地了解它们，认识它们，才能对它们做出正确的评价，才可以更好地利用它们，开发好油气资源。即使在油气藏的开发过程中，也要对它们进行不断地监测，以修正我们的认识，调整我们的开采措施。因为事物总是处在变化的过程中，处在开发过程中的油气藏更是如此，这里再次说明了试井的重要性。当然油气藏的监测手段不仅仅是试井，只不过试井是一项开发比较早、使用广泛的技术。

试井是对井的流动特性的测试。究竟测试什么呢？油气井测试主要是对油气井产量和压力的测试。产量通常是在地面测试的，由试油或采油部门完成。试井测试的是井底压力，即油层中部的压力，分为稳定试井和不稳定试井。根据测试的压力资料和产量资料，对井的流动特性进行分析这就是试井分析，包括稳定试井分析和不稳定试井分析。其中稳定试井又称之为产能试井，测试几个不同工作制度下的稳定产量和流动压力，对井的产能进行分析，求取产能方程、油井的合理产量和气井的无阻流量等参数。不稳定试井测试关井或开井或改变工作制度时井底压力随时间的变化曲线，用来了解井的完善程度、油气藏渗流特征和压力情况，计算地层压力、表皮系数、渗透率等参数，如果有边界反映，还要分析边界的性质与组合情况，计算边界距离与储量等参数。不稳定试井有单井不稳定试井和多井不稳定试井之分，前面介绍的是单井不稳定试井，多井不稳定试井对两口或两口以上的井进行测试，其中进行压力测试的井，称之为观测井，开井生产或关井恢复或改变工作制度以产生压力激动的井，称之为激动井。主要用于测试井间地层的连通性，计算井间地层的渗流参数与储容参数。

不稳定试井是怎样来分析压力资料的呢？首先要建立试井解释模型。试井解释模型就是数学模型，建立在多孔介质渗流力学的基础之上，油气藏就是多孔介质，用数学方法对油气藏及井的流动变化规律进行描述，建立微分方程，在规定的条件下对方程求解，将流动变化规律的特征及影响因素找出来，并确定合适的分析方法。试井微分方程通常是偏微分方程，描述流体在多孔介质中流动的规律，即压力与流动的变化关系，也可以说是描述压力变化（压力波）在地层中的传播过程，在数学物理方程范畴称之为扩散方程。扩散方程除了能够描述压力传导过程以外，还可以描述热传导和电传导等许多物理变化。由于人类对热能和电能的利用开发比较早，对热传导和电传导研究已十分广泛深入。比如固体热传导就是一门十分成熟的科学，可以利用或借鉴这些领域的已有成果来研究多孔介质的渗流，研究试井分析理论。有一本由 H. S. Carslaw 和 J. C. Jaeger 编著、牛津大学出版、1946 年第一版、1959 年第二版、书名为《Conduction of Heat in Solids》[1]的书，就是一本有关固体热传导的经典理论书籍，许多试井理论专家就是以这本书为蓝本开展试井分析理论研究的。

在求解试井微分方程过程中用到过许多方法，其中拉普拉斯变换是使用最多的方法。拉普拉斯变换是一种积分变换，是求解微分方程的有效方法，可以将偏微分方程变成常微分方程、将常微分方程变成代数方程求解，求解后再通过拉普拉斯逆变换将解变到实空间来。

但是，现代试井分析方法表明，拉普拉斯变换不仅在求解微分方程、建立试井解释模型方面起着重要的作用，而且还可以用来计算压力导数、计算压力褶积和反褶积、进行试井分析。在近 20 年中，许多研究者或试井分析专家就拉普拉斯变换在试井分析方面的应用，进行了许多研究与开拓，取得了重要的成果，有的已经成为现代试井分析的组成部分，有的成为了其它方法无法替代的分析工具，大大推进了试井分析技术的向前发展。拉普拉斯变换与试井分析的关系得到了扩充，得到了深化，并且越来越密切，这一点我们在下一节还要详细介绍。

第二节 历史回顾

1949 年由 van Everdingen A.F. 和 Hurst W. 在美国矿冶石油工程师学会学报（Trans, AIME）上发表了一篇题为《The Application of The Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs》[2]的论文，开创了拉普拉斯变换在试井分析领域的应用。后来许多的试井分析理论的研究者将这篇论文作为开发试井解释模型的指南，直到今天还有许多研究者在引用这篇著作，不愧是应用拉普拉斯变换于试井分析理论研究的经典之作。1950 年 C.C.Miller、A.B.Dyes 和 C.A.Hutchinson Jr. 在同一刊物上发表了题为《The Estimation of Permeability And Reservoir Pressure From Bottom Hole Pressure Build－Up Characteristics》[3]的论文，1951 碾 D.R.Horner 又在同一刊物上发表了《Pressure Build－Up in Wells》[4]的论文，前者提出了利用油气井压力恢复测试计算地层有效渗透率和地层压力的方法，就是后来称之为 MDH 的分析方法；后者提出了压力恢复的另一种分析方法，即著名的 Horner 法。这两种分析方法被称之为常规分析法，或传统分析方法，或半对数分析法，在现代试井分析中仍然起着重要的作用。其中 Horner 法使用更加普遍，因为它考虑了生产时间短时的影响，并且可以对多个流动期的影响进行校正。这两篇论文是石油工业中不稳定试井分析的开山之作。同时，也可以说拉普拉斯变换应用到油藏流动问题和不稳定试井技术在石油工业中诞生几乎是处在同一时期。

1970 年 H.Stehfest 在美国计算机协会通信上发表了一篇《Numerical Inversion of Laplace Transforms》[5]的论文，介绍了一种进行拉普拉斯数值反演的方法与计算机程序，可以将拉普拉斯空间的解用数值的方法变换到实空间来，这好像为石油工业中试井分析理论的发展送来了及时雨，为拉普拉斯空间的难以反演的复杂解、或即使能够反演到实空间来由于存在无穷积分或级数也无法使用的试井解释模型提供了另一种利用的途径，同时也为现代试井分析方法的形成与发展起了重要的促进作用。现代试井分析的一个主要标志是提出了双对数典型曲线拟合分析方法，即实测压力资料与试井理论模型在同一比例的双对数坐标做曲线图进行拟合分析。典型曲线是数值化了的试井解释模型，可以直接从拉普拉斯空间进行数值反演得到，当然也可以通过其它的数值方法得到，如实空间解析解的数值处理和油藏模拟等。典型曲线通常使用无量纲量制作，具有通用性，开发出来试井解释模型可以适用于任何单位制系统。现代试井分析用的典型曲线通常由无量纲压力和无量纲压力导数两条曲线组成，视模型的复杂程度与影响因素不同而产生差异。有的模型只有一条曲线，比较简单，很好拟合，而有的模型有一簇曲线或多簇曲线，每条曲线的参数不同，每簇曲线也有不同的参数，拟合时有多解性。但是由于典型曲线是对整个数据进行拟合分析，所以分析结果的可靠性比常规法更为可靠。另外，双对数压力导数曲线的分辨率高，可以用于试井解释模型的诊断。总之，双对数典型曲线拟合分析技术是一个很大的进步。由于双对数典型曲线拟合分析技术的兴起，拉普拉斯空间的数值反演被应用于试井分析理论研究中，使用拉普拉斯变换求解复杂试井解释模型的情形越来越多。

到了 1983 年 A.J.Rosa 和 R.N.Horne 在 SPE（石油工程师协会）第 58 届年会上发表了题为《Automated Type－Curve Matching in Well Test Analysis Using Laplace Space Determination of Parameter Gradients》[6]的论文，将拉普拉斯变换的在试井分析中的应用推向了一个新阶段，即使用在拉普拉斯空间确定参数的变化梯度进行自动的试井分析，拉普拉斯变换不仅是能够建立试井分析模型的工具，而且也能够参与到试井分析方法中来了。当然这种技术的实现首先应该归功于拉普拉斯数值反演的诞生。自动试井分析方法又称之为非线性回归法，这种分析方法由来已久，需要有油藏压力降落的解析表达式和它们与未知油藏参数的导数，这些对于已有的典型曲线来说不是都可以利用的，通过拉普拉斯空间的已知解析表达式的数值反演很容易计算这些函数。由于利用了拉普拉斯变换的数值反演技术在拉普拉斯空间进行

参数的梯度计算，大大推进了自动试井分析技术的向前发展，与此同时，也激起了使用拉普拉斯变换开发新的试井解释模型的热情，即使过去已经使用其它方法开发出来的模型，也要重新使用拉普拉斯变换方法进行再开发。其中最有影响的是 E.Ozkan 和 R.Raghavan 在 1991 年发表的题为《New Solutions for Well - Test - Analysis Problems：part 1 - Analytical Considerations》[7]的论文，类似于 A.C.Gringarten 和 H.J.Jr.Ramey[8]使用源函数和格林函数开发出来的不稳定流动的解库一样，他们也提出了一个不稳定试井问题在拉普拉斯空间的解库，有利于通过拉普拉斯变换的数值反演进行自动的历史拟合分析。经过自动拟合分析算法的完善与改进和拉普拉斯变换空间试井解释模型的开发与扩充，自动试井分析达到了工业应用水平，几乎所有的现代试井解释软件都使用了这种分析方法。

1988 年 A.Roumboutsos 和 G. Stewart 在 SPE（石油工程师协会）第 63 届年会上发表了题为《A Direct Deconvolution or Convolution Algorithm for Well Test Analysis》[9]的论文，提出了根据分段线性逼近函数的数值拉普拉斯变换方法。主要是为了在拉普拉斯空间进行压力与产量资料的褶积和反褶积计算，因为在拉普拉斯空间计算只要进行一次乘法或一次除法，比在实空间计算要快得多，然后通过数值反演再返回到实空间。这是拉普拉斯变换在试井分析中的一种新的应用。褶积又称之为卷积，反褶积又称之为反卷积，这是数学中的概念。试井中使用褶积和反褶积是利用测试不稳定压力的同时测试到的井底砂面产量，对不稳定压力资料进行处理，消除早期井筒储集或续流的影响，获得准确的径向流数据，恢复早期地层渗流的本来面目。有的试井资料早期受井筒储集或续流影响，晚期的边界反映出现较早，缺失中间反映地层渗流的曲线，或者只测到了早期的不稳定压力数据，要分析地层的渗流特性，计算有关参数，就可能出现错误，没有把握得到可靠的结果。利用同时测试的井底产量资料进行褶积或反褶积就可能消除井筒储集的影响，得到可靠的分析。压力与产量数据的反褶积具有识别地层模型的功能，引起试井理论研究者和试井分析工作者的注意 。

M. J. Bourgeols 和 R. N. Horne 首先在 1991 年的 SPE 年会上提出、然后发表在 1993 年3 月的 SPEFE（SPE 地层评价）刊物上的题为《Well - Test - Model Recognition With Laplace Space》[10]的论文，又将拉普拉斯变换在试井分析中的应用推进了一大步，将压力和产量数据变换到拉普拉斯空间中进行试井分析，大大加快了试井分析速度，不必进行过多的实空间与拉普拉斯空间的数值变换与反变换。在拉普拉斯空间不仅能够计算褶积与反褶积，而且能够像在实空间一样直接进行试井分析，包括常规分析、双对数拟合分析和非线性回归分析。

M.Onur 和 A.C. Reunolds 最初在 1996 年的 SPE 年会提出、然后在 1998 年 6 月的 SPEREE（SPE 油藏评价与工程）上发表的题为《Numerical Laplace Transformation of Sampled Data for Well - Test Analysis》[11]论文介绍了将实空间的压力产量数据变换到拉普拉斯空间的新算法，提高了变换的精度，减小了端部效应即测试流动期开始与结束时的数据点变换时出现的跳动，为在拉普拉斯空间进行试井分析起了推动作用。

值得一提的是我国的试井理论研究者侯晓春和王晓冬于 1996 年第四期的“油气井测试”发表了题为《Stehfest 算法在试井分析中的应用扩展》[12]论文中，提出了利用拉普拉斯变换的延展性和 Stehfest 数值反演进行导数、褶积和反褶积计算的新算法。前面已经介绍了压力导数的应用，压力导数是根据压力数据进行数值计算得来的，因此导数的算法很重要，要保证算出的导数曲线比较平滑。通常使用开窗口的方法进行计算，即针对计算点的两边截取同样长度的数据点进行计算，这个长度称之为步长。显然步长大，平滑效果好。但是，步长过

大会使曲线失真，有时不好掌握。使用上面提出的计算方法，就不存在这个问题。Stehfest算法也可以直接用来计算导数，就是将试井模型变换到实空间时可以同时计算模型的导数曲线，计算很简单，只要乘上一个数即可。

由于在拉普拉斯空间进行试井分析可以大大地提高分析速度和质量，这种技术必将会得到进一步的完善提高和推广应用。

第三节　本书的目的

试井技术的诞生与发展经历了半个世纪的时间，拉普拉斯变换在试井分析中的应用也有了半个世纪的历程，在高层次上，拉普拉斯变换与试井分析的关系变得越来越密切，应用范围越来越广阔，使得试井分析水平的现代化水平更快、更高、更好，为现代试井分析技术提供了强有力的工具。了解这种技术的发展过程，及时掌握这方面的信息，跟上时代的发展，对提高试井解释技术、更好地为油气勘探开发服务是非常重要的。

为了更好地让我们国家石油工业中有关油气藏工程和试井技术人员了解这方面的信息，我们在收集资料和实践应用的基础上编写了这本书，为需要了解这方面信息的试井理论研究人员和试井分析技术人员提供一个捷径。

这本书的后续内容包括拉普拉斯变换的数学背景、在试井分析中的应用和拉普拉斯空间的数学模型。在数学背景一章中主要介绍有关拉普拉斯变换的基础知识，包括拉普拉斯变换的概念、性质、卷积、拉普拉斯逆变换、拉普拉斯数值逆变换和大量的拉普拉斯变换公式与逆变换公式。应用方面包括求解微分方程、计算压力导数、褶积与反褶积、非线性回归分析和在拉普拉斯空间进行试井分析。拉普拉斯空间的试井模型将我们收集到的模型进行介绍，尽可能将模型的假设条件、推导结果、来源与应用条件等细节交代清楚。

路是人走出来的！世界上本来没有路，是因为有人去走，才有了路，走的人多了，路会变得越来越宽敞、越来越平坦。

参考文献

[1] H S Carslaw and J C Taeger.Conduction of Heat in Solids.Oxford U. Press（1959）

[2] A F van Everbingen and W.Hurst.Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Rservoirs.Trans.AIME（1949）186，305－324

[3] C C Miller，A.B.Dyes and C.A.Jr.Hutchinson.The Estimation of Permeability and Reservoir Pressure from Bottom Hole Pressure Build－up Characteristics. Trans，AIME（1950）189，91－104

[4] D R Horner.Pressure Buila－up in Wells.Third World Pet.Cong.E J Brill.Leiden（1951）Ⅱ，503

[5] H Stehfest.Numerical Inversion of Laplace Transforms.Communication of the ACM（Jan. 1970）13，No.1，47－49

[6] A J Rosa and R H Horne.Automated Type－Curve Matching in Well Test Analysis Using Laplace Space Determination of Parameter Gradients.SPE12131，1983

[7] E.Ozkan and R.Raghavan.New Solutions for Well－Test Analysis Problems.Part 1－Analytical Considerations.SPEFE（Sept. 1991）359－368

[8] A C Gringarten and H J Jr Ramay. The Use of Source and Green's Functions in Solving Unsteady - Flow Problems in Reservoirs. SPEJ (Oct. 1973) 285 - 296, Trans., AIME, 255
[9] A Roumboutsos and G Stewart. A Dirext Deconvolution or Concolution Algorithm for Well Test Analysis. SPE18157, 1988
[10] M Bourgeois and R Horne. Well Test Model Recognition Using Laplace Space. SPEFE (June 1993) 17, Trans, AIME, 295
[11] M Onur and A C Reynolds. Numerical Laplace Transformation of Sampled Data for Well - Test Analysis. SPEREE (June 1998) 268 - 277
[12] 侯晓春，王晓冬 .Stehfst 算法在试井分析中的应用扩展 . 油气井测试，1996（4）21 - 24

第二章　数学背景

第一节　引　　言

在数学中，为了把较复杂的运算转化为较简单的运算，常常采用一种变换手段。例如数量的乘积或商可以通过对数变换变成对数的和或差，然后再取反对数，即得到原来数量的乘积或商。这一方法的实质就是把较复杂的乘除运算通过对数变换化为较简单的加减运算（当然，上述运算是依赖于对数表来完成的）。再如解析几何中的坐标变换、复变函数中的保角变换等都属于这种情况。所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换，一般是含有参变量 α 的积分

$$F(\alpha) = \int_a^b f(t)K(t,\alpha)\mathrm{d}t$$

它的实质就是把某函数类 A 中的函数 $f(t)$ 通过上述积分的运算变成另一函数类 B 中的函数 $F(\alpha)$，这里 $K(t,\alpha)$ 是一个确定的二元函数，称为积分变换的核。当选取不同的积分域和变换核时，就得到不同名称的积分变换。$f(t)$ 称为象原函数，$F(\alpha)$ 称为 $f(t)$ 的象函数，在一定条件下，它们是一一对应而变换是可逆的。

用积分变换法去解微分方程或其它方程，就如同用对数变换计算数量的乘积或商一样。如果从原方程中直接求未知的解 y 有困难或较为复杂时，则可求它的某种积分变换的象 Y，然后再由求得的 Y 去找 y。当然，这种变换的选择应当使得由原来关于 y 的方程经变换得到的 y 的象 Y 的方程是容易求解的。一般地说，在这种变换之下，原来的偏微分方程可以减少自变量的个数直至变成常微分方程；原来的常微分方程可以变成代数方程，从而使得在函数类 B 中的运算简化，找出在 B 中的一个解，再经过逆变换，就得到原来要在函数类 A 中所求的解（当然，上述变换与求逆变换是依赖于积分变换表来完成的）。

积分变换的理论和方法不仅在数学的许多分支中、而且在其它自然科学和各种工程技术领域中均有着广泛的应用，它已成为不可缺少的运算工具。这里介绍的拉普拉斯变换就是一种积分变换。

第二节　拉普拉斯变换的概念

一、缘起

拉普拉斯变换缘起于另一种积分变换，称之为傅立叶变换。傅立叶变换是一种形式如下式所示的积分变换，

$$F(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

式中 j 是虚数单位，ω 是弧度数，$F(\omega)$ 是象函数，它的逆变换式为，

$$f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{2.2}$$

式中 $f(t)$ 是象原函数。

对（2.1）式的最右边的积分运算，叫做取 $f(t)$ 的傅氏[1] 变换，同样（2.2）式最右边的积分运算，叫做取 $F(\omega)$ 的傅氏逆变换。一个以 T 为周期的函数 $f(t)$，如果在 $[-T/2, T/2]$ 上满足狄利克雷（Dirichlet）条件（简称为狄氏条件，即函数在 $[-T/2, T/2]$ 上满足：1°连续或只有有限个第一类间断点［即 $f(a-0)$ 和 $f(a+0)$ 两个极限都存在，而等式 $f(a-0)=f(a)=f(a+0)$ 不存在的间断点］；2°只有有限个极值点），还在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足绝对可积的条件时，就一定存在古典意义下的傅氏变换。但绝对可积的条件是比较强的，许多函数即使是很简单的函数（如单位阶跃函数、正弦、余弦函数以及线性函数等）都不满足这个条件；其次，可以进行傅氏变换的函数必须在整个数轴上有定义，但在物理、无线电技术等实际应用中，许多以时间 t 作为自变量的函数往往 $t<0$ 时是无意义的或者是不需要考虑的，像这样的函数都不能取傅氏变换。由此可见，傅氏变换的应用范围受到了相当大的限制。

对于任意一个函数 $\phi(t)$，能否经过适当地改造使其进行傅氏变换时克服上述两个缺点呢？像单位阶跃函数 $u(t)$ 和指数衰减 $e^{-\beta t}$ $(\beta>0)$ 就具有这样的特点。用前者乘 $\phi(t)$ 可以使积分区间由 $(-\infty, +\infty)$ 换成 $[0, \infty)$，用后者乘 $\phi(t)$ 就有可能使其变得绝对可积，因此，为了克服傅氏变换的上述两个缺点，我们自然会想到用 $u(t)\,e^{-\beta t}$ $(\beta>0)$ 来乘 $\phi(t)$，即

$$\phi(t)u(t)\,e^{-\beta t} \quad (\beta>0)$$

结果发现，只要 β 选得适当，一般来说，这个函数的傅氏变换总是存在的。对函数 $\phi(t)$ 进行先乘以 $u(t)\,e^{-\beta t}$ $(\beta>0)$，再取傅氏变换的运算，就产生了拉普拉斯（Laplace）变换。

对函数 $\phi(t)\,u(t)\,e^{-\beta t}$ $(\beta>0)$ 取傅氏变换，可得

$$\begin{aligned} G_{\beta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)u(t)e^{-\beta t}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-(\beta+j\omega)t}dt = \int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt \end{aligned}$$

其中

$$s=\beta+j\omega, f(t)=\phi(t)u(t)$$

若再设

$$L(s)=G_{\beta}\left(\frac{s-\beta}{j}\right)$$

则得

$$L(s)=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$$

由此式所确定的函数 $L(s)$，实际上是 $f(t)$ 通过一种新的变换得来的，这种变换我们称为拉普拉斯变换。通常可以定义为

$$L(s)=L[f(t)]=\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-st}dt \tag{2.3}$$

---

[1] 傅氏即为傅立叶，下同。

式中 $L(s)$ 称为 $f(t)$ 的拉氏❶ 变换（或称为象函数）。拉普拉斯逆变换为

$$f(t) = L^{-1}[L(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\chi+j\infty} L(s)e^{st}ds \tag{2.4}$$

式中 $f(t)$ 称为 $L(s)$ 的拉氏逆变换（或称为象原函数）。

由第三节（2.5）或（2.6）式可以看出，$f(t)$（$t\geqslant 0$）的拉氏变换，实际上就是 $f(t)u(t)e^{-\beta t}$的傅氏变换。

例 1 求单位阶跃函数（见下式）的拉氏变换。

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geqslant 0 \end{cases}$$

根据拉氏变换的定义，有

$$L[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st}dt$$

这个积分在 $\mathrm{Re}(s)>0$（s 的实部>0）时收敛，而且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

所以

$$L[u(t)] = \frac{1}{s} \quad [\mathrm{Re}(s) > 0]$$

例 2 求指数函数 $f(t)=e^{kt}$的拉氏变换（k 为实数）。

根据（2.5）式，有

$$L[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}dt$$

所以

$$L[e^{kt}] = \frac{1}{s-k} \quad [\mathrm{Re}(s) > k]$$

二、拉普拉斯变换存在的条件

从上面的例题可以看出，拉氏变换存在的条件比傅氏变换存在的条件弱得多，但是对一个函数作拉氏变换也还是要具备一些条件的。那么，一个函数究竟满足什么条件时，它的拉氏变换一定存在呢？下面介绍拉氏变换存在的条件。

（1）$f(t)$ 和 $f'(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 上除掉第一类间断点外连续；

（2）当 $t<0$ 时，$f(t)=0$；

（3）$f(t)$ 是有限阶的，也就是说可以找到常数 $a\geqslant 0$ 和 $A>0$，使得

$$|f(t)| \leq Ae^{at} \quad (t \geq 0)$$

这里数 a 称为$f(t)$ 的增长指数，$f(t)$ 是有界函数时，可取 $a=0$。

如果满足以上三个条件，那么 $L(s)$ 是半平面 $\mathrm{Re}(s)>0$ 上的解析函数。而反演公

❶ 拉氏即为拉普拉斯，下同。