

经贸数学

方 尚 斌 丁 振 华 主 编

中国商业出版社

前 言

为适应社会主义市场经济发展的需要,培养经贸管理人才应具有的定量分析能力和决策能力,我们编写了这本《经贸数学》。

本书特点在于:既介绍了经贸实务中的常用计算知识,又较系统地介绍了高级经贸人才所必备的高等数学应用基础理论知识和应用方法。本书内容突出针对性、实用性,表述简明易懂,适合于作为经济贸易、市场营销、财务会计、经营管理等专业的大专教材和经贸干部高级培训班教材,也可供财经院校师生和经贸实际工作者学习参考。

本书由杨欣、鄢茵、李华文、丁振华、杨淑华、张海强、方尚斌、王仁祥等同志共同编写,方尚斌、丁振华两同志任主编,杨欣、鄢茵两同志任副主编。

本书难免欠妥之处,敬请读者指正。

编 者

1994年8月

目 录

第一章 经贸实务常用计算知识	(1)
§ 1.1 价格指数	(1)
一、物价指数(1)	
二、股价指数(5)	
§ 1.2 税收	(8)
一、新的工商税制(8)	
二、价外增值税的计算(9)	
三、个人所得税的计征(10)	
§ 1.3 利率与利息	(13)
§ 1.4 年金	(15)
一、等额年金复利公式(16)	
二、等差变动年金复利现值公式(17)	
三、等比变动年金复利现值公式(19)	
四、永续年金(20)	
§ 1.5 证券收益	(22)
一、股票交易收益(22)	
二、借款购买股票收益(23)	
三、债券转卖收益(23)	
§ 1.6 保险	(25)
一、概率与数学期望(25)	
二、保险种类与计算(25)	
§ 1.7 资金操作案例解析	(28)
习题一	(34)
第二章 函数与极限	(37)
§ 2.1 函数的概念	(37)
一、常量与变量(37)	
二、函数的定义(38)	

三、函数的表示法(41)	四、函数的几种简单性质(43)
五、初等函数(47)	六、多元函数的概念(50)
§ 2.2 常用经济函数	(52)
一、收益函数(52)	二、成本函数(53)
三、平均成本函数(53)	四、利润函数(54)
五、需求函数(54)	六、供给函数(55)
§ 2.3 极限	(55)
一、极限定义(55)	二、无穷大量与无穷小量(60)
三、极限的运算法则(62)	四、两个重要极限(65)
§ 2.4 函数的连续性	(67)
一、函数改变量(67)	二、连续函数的概念(68)
三、函数的间断点(71)	四、初等函数的连续性(72)
习题二	(74)
第三章 函数的微分法	(79)
§ 3.1 导数	(79)
一、导数的概念(79)	二、导数的计算(83)
三、高阶导数(94)	
§ 3.2 微分	(95)
一、微分的定义(95)	二、微分的几何意义(97)
三、微分形式的不变性(98)	四、微分的计算(99)
四、微分的应用(101)	
§ 3.3 偏导数和全微分	(102)
一、偏导数(102)	二、全微分(105)
习题三	(107)
第四章 微分学的应用	(111)
§ 4.1 边际分析	(111)
一、边际成本(111)	二、边际收入和边际利润(112)
§ 4.2 函数的弹性	(114)

§ 4.3 罗必塔法则	(116)
§ 4.4 函数的性态与作图	(120)
一、函数的单调性(120) 二、函数的极值(122)	
三、最大(小)值求法(126) 四、曲线的凹向与拐点(127)	
五、曲线的渐近线(128) 六、曲线的图形描绘(129)	
§ 4.5 极值的经济应用	(131)
一、一元函数优化题例(131) 二、二元函数优化题例(133)	
习题四	(135)
第五章 积分方法及其经济应用	(140)
§ 5.1 不定积分	(140)
一、原函数与不定积分的概念(140)	
二、不定积分的计算(141)	
§ 5.2 定积分	(152)
一、定积分的概念(152) 二、定积分的基本性质(155)	
三、定积分与不定积分的关系(158) 四、定积分的计算(162)	
§ 5.3 广义积分	(165)
一、无限区间上的积分(165) 二、无界函数的积分(167)	
§ 5.4 积分的应用	(169)
一、平面图形的面积计算(169)	
二、积分的简单经济应用(174)	
§ 5.5 二重积分	(178)
一、二重积分的概念(178)	
二、直角坐标系中二重积分的计算(183)	
习题五	(191)
第六章 最小二乘法与经济预测	(199)
§ 6.1 最小二乘法与相关性检验	(199)
§ 6.2 回归预测法	(205)
一、一元线性回归预测(206)	

二、化曲线为直线的回归问题(208)

三、二元线性回归预测(213)

§ 6.3 时间系列预测 (217)

一、时间系列预测的原理和步骤(218)

二、一次方程式倾向线的配置(219)

三、二次方程式倾向线的配置(225)

四、季节变动影响的修正(228)

习题六 (232)

第七章 矩阵知识和投入产出技术 (236)

§ 7.1 矩阵 (236)

一、矩阵概念(236) 二、几类特殊矩阵(237)

三、矩阵的计算(239) 四、矩阵的初等变换(246)

五、矩阵的秩(248)

§ 7.2 逆矩阵 (249)

一、逆矩阵的概念(249) 二、用初等行变换求逆矩阵(250)

三、用伴随矩阵法求逆矩阵(253)

§ 7.3 线性方程组的矩阵解法 (261)

§ 7.4 投入产出方法 (268)

一、投入产出表(268)

二、直接消耗系数和完全消耗系数(272)

三、投入产出方法的应用(280)

习题七 (290)

第八章 线性规划 (298)

§ 8.1 线性规划数学模型 (298)

§ 8.2 线性规划问题的特殊解法 (307)

一、图解法(307) 二、运输问题的表上作业法(313)

三、运输问题的图上作业法(323)

四、分派问题的方阵作业法(329)

§ 8.3 单纯形法	(334)
一、线性规划数学模型的标准形式(334)	
二、线性规划问题的概念(337)	
三、单纯形法引例(341)	四、单纯形方法(345)
五、人工变量法(361)	
§ 8.4 对偶线性规划问题	(369)
一、对偶问题的具体理解(369)	
二、原问题与对偶问题的关系(370)	
三、对偶问题的基本性质(375)	
四、影子价格(381)	五、对偶单纯形法(383)
习题八	(388)

第一章 经贸实务常用计算知识

§ 1.1 价格指数

一、物价指数

物价指数是说明不同时期商品价格水平变动的相对指标,通常用小数来表示。编制物价指数的目的,在于分析市场供求情况,反映居民消费倾向和生活水平,用以研究和制订货币、金融、价格等政策,进行宏观调控,指导产品结构调整和商业经营。

(1) 零售物价指数

零售物价指数分为个体价格指数和综合价格指数。

个体价格指数是说明单一商品价格变动的相对数,其计算公式为:

$$\text{个体价格指数 } G_{\uparrow} = \frac{\text{某商品报告期价格水平 } P_1}{\text{该商品基期价格水平 } P_0} \quad (1-1)$$

例如:某型号空调机上年三季度每台 2540 元,今年三季度每台 2890 元。于是可以说,与上年三季度相比,今年三季度该型号空调机的价格指数为:

$$G_{\uparrow} = \frac{2890}{2540} \times 100\% \approx 113.78\%$$

显然,物价指数大于 100%,表示物价上涨;物价指数小于 100%,则表示物价下跌。

综合价格指数是说明社会全部商品价格水平变动的相对数。因为不同类的商品不可比,故只能在固定销售量的情况下,用销售额的变动来反映价格水平的变动。为了反映当前市场价格对国家财政和人民生活的实际影响,使物价指数具有现实经济意义,故在计算综合物价指数时一般都采用固定报告期销量的办法,其计算公式为:

设商品 $A_i (i=1,2,\dots,n)$ 基期价格为 P_{0i} ,报告期价格和销量依次为 P_{1i}, q_{1i} , 则有:

$$\text{零售综合价格指数 } G_{\text{综}} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{1i} q_{1i}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{1i}} \quad (1-2)$$

例 1 某地选取 5 种有代表性家用电器商品的销售统计资料如表 1-1:

表 1-1

商品代号	销售价格(元)		销售量(万台)	
	1993 年	1994 年	1993 年	1994 年
A_1	380	420	261	314
A_2	2750	2900	32	37
A_3	3200	2950	74	65
A_4	5440	6260	95	156
A_5	148	140	163	178

试求该地家用电器商品 1994 年与 1993 年相比的零售价格指数。

$$\begin{aligned} \text{解 零售价格指数 } G_{\text{零}} &= \frac{\sum_{i=1}^n p_{1i} q_{1i}}{\sum_{i=1}^n p_{0i} q_{1i}} \\ &= \frac{420 \times 314 + 2900 \times 37 + 2950 \times 65 + 6260 \times 156 + 140 \times 178}{380 \times 314 + 2750 \times 37 + 3200 \times 65 + 5440 \times 156 + 148 \times 178} \\ &\approx 1.0984 \end{aligned}$$

这表明该地家用电器商品零售价格 1994 年比 1993 年相比上涨了 9.84%。但从单个商品而言其价格涨跌是各不相同的。

(2) 服务性支出价格指数

服务性支出项目主要有房租、水电、饮食、理发、洗染、影剧、照相、交通、通讯、修补等。

首先求出各类服务业的个体价格指数 $g_i (i=1, i=2, \dots, n)$, 然后以各类服务业的营业额 q_i 作权数, 计算出加权平均数, 即得到服务性支出综合价格指数:

$$G_{\text{服}} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i q_i}{\sum_{i=1}^n q_i} \quad (1-3)$$

(3) 职工生活费指数

职工生活费指数是反映职工生活费开支的价格变动的指数, 其计算公式是:

若用 $W_{\text{物}}$ 、 $W_{\text{服}}$ 表示报告期零售额和服务性支出额, $G_{\text{物}}$ 、 $G_{\text{服}}$ 表示零售物价指数和服务性支出综合价格指数, 则职工生活费指数:

$$S_{\text{取}} = \frac{\frac{W_{\text{物}} + W_{\text{服}}}{G_{\text{物}} + G_{\text{服}}}}{\frac{W_{\text{物}}}{G_{\text{物}}} + \frac{W_{\text{服}}}{G_{\text{服}}}} \quad (1-4)$$

显然, 职工生活费指数上升, 反映价格上涨; 职工生活费指数降低, 表示价格下降。职工生活费指数是政府研究工资政策和

确定工资水平的重要参考依据。

(4) 居民货币购买力指数

居民货币购买力指数是指单位货币能购买到的商品或支付社会服务费用的实际数量。其计算公式是：

$$H_{\text{币}} = \frac{1}{S_{\text{货}}} \quad (1-5)$$

即货币购买力指数是职工生活费指数的倒数。很明显，商品的价格和服务性支出的价格提高，则单位货币对二者支付能力将减少，反映货币贬值；若价格下跌，单位货币支付能力将增加，反映货币升值。

例2 某地1994年与1993年相比，零售物价上涨9.2%，服务性支出价格上涨16.1%。1994年商品零售额7580万元，服务性支出额2360万元。求该地职工生活费指数和货币购买力指数。

解 因为零售物价指数 $G_{\text{物}} = 9.2\% + 100\% = 1.092$

服务性支出价格指数 $G_{\text{服}} = 16.1\% + 100\% = 1.161$

故由公式(1-4)可得该地职工生活费指数：

$$S_{\text{货}} = \frac{7580 + 2360}{\frac{7580}{1.092} + \frac{2360}{1.161}} = 1.1076$$

居民货币购买力指数：

$$H_{\text{币}} = \frac{1}{S_{\text{货}}} = \frac{1}{1.1076} \approx 0.9028$$

这表明该地1994年职工生活费指数比上年增加10.76%，货币购买力指数比上年下降 $1 - 0.9028 = 0.0972$ ，即9.72%。

例3 假设已知某地今年零售物价和服务性支出价格都比去年上涨了10%，而该地职工名义收入比上年增加了15%。试就职工生活水平、货币购买力等变动情况作出分析。

解 由公式(1-4)可知，因零售物价和服务性支出价格同步

上涨 10%，则职工生活费指数也增加 10%，即 $S_{\text{费}} = 1.10$ 。

于是，货币购买力指数：

$$H_{\text{币}} = \frac{1}{1.10} \approx 0.91$$

这意味着今年用 1 元钱只能买到上年 0.91 元钱买到的商品或服务。

该地职工名义收入扣除物价上涨因素，实际收入提高幅度为：

$$\frac{1+15\%}{1+10\%} - 100\% \approx 4.55\%$$

二、股价指数

股价指数是反映股价变动和走势的一种动态统计指标。一般有两种计算方法：一种是简单算术股价指数；一种是加权股价指数。

(1) 简单算术股价指数。其基本方法是以各种股票某一交易日或交易期为基期，并用报告期股价与基期股价相比较，将各股价波动幅度简单加总平均，即：

$$\begin{aligned} \text{简单算术股价指数} &= \frac{1}{n} \left(\frac{P_{11}}{P_{01}} + \frac{P_{12}}{P_{02}} + \cdots + \frac{P_{1n}}{P_{0n}} \right) \times 100 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_{1i}}{P_{0i}} \times 100 \end{aligned} \quad (1-6)$$

式中， P_{1i} 是报告期第 i 种股票的价格， P_{0i} 是基期第 i 种股票的价格， n 为股票样本数，乘以 100 表示是把基期的总价格水平作为 100。

采用这种方法优点是简便易行，缺点主要是没有考虑到各种股票交易量或发行量上的差异及影响力的大小。

(2) 加权股价指数。其基本做法是把股票发行量或交易量作权数，计算报告期股价与基期股价相比较的变动率。其计算公

式为：

$$\text{加权股价指数} = \frac{\sum_{i=1}^n P_{1i} Q_{1i}}{\sum_{i=1}^n P_{0i} Q_{1i}} \times 100 \quad (1-7)$$

式中， P_{1i} 、 Q_{1i} 分别是报告期第 i 种股票的价格和发行量， P_{0i} 是基期第 i 种股票的价格。

加权法克服了简单法的缺点，而且，由于加权法以发行量为权数，当股票发生折股时，通过以上公式计算出的报告期总价格与基期总价格水平保持不变，故不必进行股价指数的调整。

一般说来，股价指数上升反映了经济繁荣和人们对未来预期的乐观，而股票指数下降则表明经济的不景气或人们对未来预期的不信任。

(3) 几种常用的股价指数

世界各地的股票市场都有自己的股票价格指数。常用的指数有：

A. 道·琼斯股价指数。这是美国历史上最古老而人们又最熟悉的一种股票价格指数，于 1884 年美国道·琼斯公司的创始人查尔斯·道首先发表，后来几经变动，至今已成为世界上影响最大的一种股价指数，在纽约证券交易所营业时间每隔半小时公布一次。

道·琼斯股价指数是以 1928 年 10 月 1 日为基期，令基期平均数为 100，采用不加权的计算方法，在股票分割时，采用修正算术平均数。道·琼斯股价指数共有 4 种：①道·琼斯工业股价指数，由 30 种工业股票构成；②道·琼斯运输业股价指数，由 20 种铁路、公路及航空股票构成；③道·琼斯公用事业股价指数，由 15 种公用事业股票构成；④道·琼斯综合股价指数，由以上共计 65 种股票构成。现在我们常用的道·琼斯股价指数指的

是第①种道·琼斯工业股价指数。

B. 标准普尔股价指数。这是由美国标准普尔公司于1957年开始编制和发表的股价数,它以1941年至1943年为基期,以基期平均数为10,统计400种工业股票、40种公用事业股票、40种金融业股票、20种运输业股票,共计500种股票进行加权平均计算,以每种股票的交易额作为权数,每小时计算和公布一次。显然,由于该指数包括股票较多且考虑了交易量对股价变动的影响,所以被人们认为能更近似地反映股票市场的真实状况,但目前仍没有取代道·琼斯股价指数。

C. 纽约交易所股价指数。于1966年由纽约证券交易所开始发表,包括在该所上市的1500多种普通股票。这些股票分为工业、运输业、公用事业和金融业四组,采用加权平均法,以交易额作权数,以1965年12月31日为基期,基期指数为50,每小时计算和发表一次。

D. 伦敦证券市场股价指数。在伦敦,表示股票行情的主要有两个指数:①英国《经济学家》股价指数。它是以1953年为基期,用50种工业股票的价格来编制的,在《经济学家》周刊上发表,每天公布2次。②金融时报指数。它包括三个指数,第1个包括30种股票;第2个包括100种股票,第3个包括500种股票。通常所说的金融时报指数是指的第1个,以1935年为基期,基期指数为100,每小时计算1次。

E. 东京证券交易所股价指数。这个指数始于1969年7月1日。它包括在东京证券交易所上市并通过交易站交易的250种较活跃的股票,用加权平均法计算,以1968年1月4日为基期,基期指数为100。

F. 香港恒生指数。香港恒生银行于1969年11月发表,包括33种股票,以1964年7月31日为基期,基期指数为100。指

数每天计算并公布三次。

中国现有深圳股票指数、上海股票指数等,但因其成份股在整个国民经济中尚不具代表性,在某种程度上还只能反映当地股市变化的情况,因而还不能作为反映国家国民经济形势的参考指标。

§ 1.2 税收

一、新的工商税制

为统一税法、公平税负、简化税制、合理分权、理顺分配体系,规范分配方式、保障财政收入、建立符合社会主义市场经济要求的税制体系,我国从1994年元月1日起全面实施了新的工商税制。

新的工商税制的主要内容是:

1. **流转税改革** 改革后的流转税由增值税、消费税、营业税、资源税组成,统一适用于内外资企业。

2. **企业所得税** 所有企业所得税实行33%的比例税率,取消税前还贷。

3. **个人所得税** 即以前执行的个人所得税、个人收入调节税和城乡个体工商户所得税合并,建立统一的个人所得税。

4. **其它税种改革** 开征土地增值税、证券交易税、遗产和赠予税,改革城建税,取消盐税、筵席税、集市交易税、牲畜交易税、特别消费税、烧油特别税、奖金税和工商调节税等。

改革后我国工商税种将由32个减少到18个,税制结构趋

于合理,初步实现税制的高效和简化,对理顺宏观分配关系具有决定性作用,对增强中央的宏观调控能力将产生积极影响。

二、价外增值税的计算

根据 1994 年 1 月 1 日起实施的《增值税暂行条例》规定,增值税征税范围包括生产、批发、零售和进口商品以及加工、修理修配。除粮油、农用生产资料、居民生活用水用气、图书报纸杂志等增值税率为 13% 以外,其它货物的增值税基本税率为 17%。在生产、批发环节,新的增值税是价外税,即不是商品价格的组成部分,而是在价格之外另行收取。

需要正确理解价外增值税,它既不是在原销售价格之外加 17% 的增值税,也不是在商品流通每个环节都要交 17% 增值税。过去我们在流转环节上一直实行价内税,即销售价格=成本+利润+税金,税金按这个销售价格计征;而现行的价外税则是制定商品价格时不再包含税金,即销售价格=成本+利润,税金则是按不含税的销售价来计征。

例 4 华胜商店从海天厂购进一批空调机,每台购进支付 3200 元,商店零售销价 3680 元,假定制造一台空调机需支付原材料和零配件费 1900 元,问每台空调机华胜店和海天厂各应代交多少增值税金?

解 对于海天厂来说,因为每台空调机:

$$\text{出厂价} + \text{税金} = 3200$$

即 $\text{出厂价} + \text{出厂价} \times 17\% = 3200$

所以 $\text{出厂价} = 3200 \div (1 + 17\%) \approx 2735.04(\text{元})$

$$\text{税金} = 2735.04 \times 17\% \approx 464.96(\text{元})$$

因为海天厂应扣进项税金:

$$1900 \div (1 + 17\%) \times 17\% \approx 276.07(\text{元})$$

所以海天厂开给华胜店的增值税发票上应写明：

每台空调机单价 2735.04 元，税额 464.96 元，价税合计 3200 元。

实际上，海天厂支付的税金为：

$$464.96 - 276.07 = 188.89(\text{元})$$

对于华胜商店来说，因为每台空调机：

$$\text{价格} = 3680 \div (1 + 17\%) \approx 3145.30(\text{元})$$

$$\text{税金} = 3145 \times 17\% \approx 534.70(\text{元})$$

价税合计为 3680 元，而华胜商店实际支付的税金为：

$$534.70 - 464.96 = 69.74(\text{元})$$

以上计算说明，价外增值税实行道道环节征税，但又不重复征税。一个产品从进入生产环节开始，到它退出流通环节，不管其价格如何变化，增值税的税收负担始终保持 17% 比率。

实行价外税，把税款和价格分离开来，使企业的成本核算、经济效益不受税收影响，可以更鲜明地体现增值税的转嫁性质：不是经营者创造了税收，而是消费者负担了税收。

三、个人所得税的计征

此次税制改革对个人所得税进行了较大改革，废止了《个人收入调节税暂行条例》和《个体工商户所得税暂行条例》，修改了《个人所得税法》，将个人收入调节税、个体工商户所得税并入个人所得税，统一为个人所得税。

修正后的《个人所得税》实行分项定率和分项扣除费用的征税办法，规定了个人取得的 11 项所得应依法交纳所得税。

个人工资、薪金所得，就每月收入额减除 800 元费用的余额纳税，适用的税率为 5%~45% 的九级超额累进税率，见表 1-2。