秦元勋 著

常微分方程定义的积分曲面

西北大学出版社

ON INTEGRAL SURFACES DEFINED BY ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

常微分方程定义的积分曲面

秦元勋 著

西北大学出版社

常微分方程定义的积分曲面

秦 元 勋 著

西北大学出版社出版

（西安市小南门外）

陕西省新华书店发行　　交大印刷厂印装

850×1168 毫米 1/32　印张 6.5　　字数 140 千

1985 年 9 月第 1 版　1985 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—5,000

统一书号：13320·5　定价：1.25元

序　言

为了研究自然界的确定性的运动规律，人类发明了微积分和微分方程．从牛顿应用微分方程来解决行星运动算起，常微方程已经有三百年的历史。因此，常微分方程是一个古老的学科。另一方面，由于人类探索自然现象和社会现象的确定性运动规律的需要，常微分方程也不断面临新的研究课题，其中还出现了许多带根本性的重要的困难问题，这就推动了这一学科的不断发展。因此，常微分方程又是一个正在发展的新兴科学。

从牛顿在实域的解析形式的解开始，发展到柯西在复域的解析形式的解。以后又转到庞加莱在实域的定性研究，即常微分方程所定义的积分曲线的研究。这些都已取得巨大的成就。

为了研究自然现象和社会现象以及工程技术中出现的周期运动，极限环的概念在自然科学、工程技术、生态平衡、经济周期等广阔的领域中都已得到普遍的应用。

但是，从理论上系统地解决非线性系统的孤立周期运动的问题遭到很大的困难。在这方面常微分方程遭遇到和代数方程同样的命运。代数方程的基本定理：n 次代数方程有 n 个根，这是在复域中用拓扑学的概念证明的。因此，在求常微分方程的极限环的最大数的问题上，人们也自然地必须转入复域的定性理论的研究，亦即常微分方程所定义的积分曲面(1)族的研究。

本书就已经取得的一批成果作一个初步的但稍带系统性的阐述．作为复域的定性研究的应用之例，本书概述了希尔伯特第16

问题在二次系统的成果。难题推动学科的深入发展，但是解决难题只是一个次要的目的，主要是推动对于微分方程的解的结构深入理解，以便使微分方程为解决实际问题有更规律性的基础。

本书内容，1981年曾以“复域定性理论”为题在西北大学开过讲座；以后又以“常微分方程定义的积分曲面”为题，于1984年在海南大学开过讲座；于1983年北京第四次国际微分方程与微分几何会议和1984年英国第八次丹地国际微分方程会议上作过报告。现在，承西北大学的大力支持，使报告的细节得以迅速地和读者见面，在此，特对西北大学致以衷心的感谢。

复域定性研究是一个刚刚打开大门的新分支，它牵涉到复域的解析理论，实域的定性理论，连续变换群的理论，复变函数论，拓扑学以及现代化计算机的工具。问题的提出，方法的创造和成果的取得都有着广阔的前景。希望有一批新生力量投入这一新的领域，也希望有关学科的老专家把各专业的有力工具应用于这一新领域，为共同开拓这一新领域作出贡献。

秦 元 勋

一九八四年于北京

内 容 简 介

本书是秦元勋教授在常微分方程复域定性理论方面研究成果的系统著述．书中包含了 1978 年获得我国科学大会重大成果奖以来的研究进展及在西北大学开设讲座和先后两次在国际微分方程学术会议上报告的内容．全书共分四篇，第一篇概述了常微分方程发展的历史，其余三篇分别对复域定性理论中的奇点理论、奇点与全局联系的理论及希尔伯特第 1 6 问题作了详细深入的论述与探讨．本书对大专院校理工科各专业的教师、研究生、高年级学生，以及数、理、化、工程技术等方面的研究人员，有重要参考价值．

目　　次

第二章 联系理论

第三章 高阶焦点与串环定理

第四篇 希尔伯特第16问题

第一章 问题、方法与结果之一例

第二章 具有三阶细焦点的二次系统

第三章 二次系统的一般情形

第　一　篇

常微分方程发展的历史概论

第一章　实域解析理论

§1.　常微分方程的产生及发展阶段

常微分方程是数学中一个古老的分支，也是一个仍然充满活力的数学分支。

常微分方程产生于三百多年前.当时微积分还未发明，但是，由于历算、航海和力学等的需要，人们从实质上说已经在建立和求解常微分方程了。最早的例子是计算对数表。

在微积分发明以后，牛顿(Newton　1642-1727)力学第二定律的数学表达形式便是常微分方程，在此基础上天体力学的数学表达形式便是常微分方程，并且是在实数域中的方程。在十七世纪末和十八世纪，主要的问题是求用初等解析函数表示的通解，这是常微分方程发展的第一阶段，即实域解析理论的阶段。

作为数学中的一个分支，常微分方程的发展也必然受到数学内部其他分支发展的影响。十九世纪初，严格的极限概念、收敛概念在分析中建立起来，复变函数的研究得到大发展，其代表人物之一为柯西(Cauchy 1789-1857)。柯西将常微分方程求解的

研究，由实域转到复域，严格论证了幂级数解的收敛性，从而严格论证了解析的常微分方程的解析解的存在性；这样，柯西便开创了常微分方程发展的第二个阶段，即复域解析理论的阶段。在问题的提法上，也有变化，由求通解转到求定解，即求已知初值的解。

类似于代数方程的发展，常微分方程的发展也经过曲折的道路。五次以上代数方程一般没有根式解，黎卡提型的常微分方程一般也没有初等解。在不求解的条件下，斯图谟(Sturm) 给出了实根个数的判定法，这就引起庞加莱 (Poincarè 1854-1912)的创造性工作。庞加莱将微分方程的研究由复域又转回实域，由解析表达式转为曲线，由定解转到曲线族，在不求解的情况下，由曲线族的定性行为得到原来的方程解的性质。这样就开创了常微分方程发展史上的第三个阶段——实域定性理论。

以下先叙述实域解析理论的历史发展。

§2. 微积分发明前的情况

远在微积分发明以前，人类由于生产实践的需要，已经用了微分方程的实质去解决实际问题，虽然当时连微积分的符号也还没有。

由于航海及天文计算的需要，对数表的计算提上了日程，为了要对连续变化的数值给出它的对数的定义，苏格兰数学家约翰·纳皮尔(John Napier 1550-1617)给出了下面的定义：

取相交于O点的两轴OX及OY，每轴上分别取一个运动的点M及N（如图 1），N由O出发沿OY以等速率v运动，M由OX上一点A出发，以变速率u向O运动，u之变化规律为：当M在A点时$u=v$，其后u与OM之长成比例减少。为了对数表的精度，纳皮尔取$OA=10^7$。这样,ON和OM便有对数关系；用现代的记号，取$OM=x$，$ON=y$，则有微分方程组

$$\frac{dy}{dt}=v,$$

$$\frac{dx}{dt}=-v\frac{x}{10^7},$$

及初值 $t=0, x=10^7, y=0$. 由此解得关系

$$y=10^7\ln\frac{10^7}{x},$$

这里取 $OA=10^7$ 是因为计算八位对数表之故。

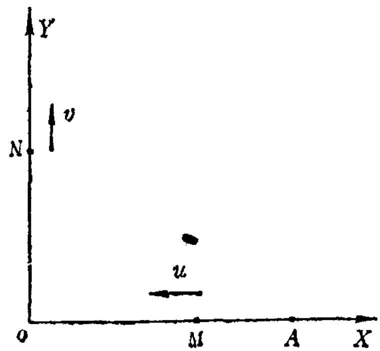

图 1

伽利略 (Galileo 1564-1642) 在研究无阻力的自由落体运动时实际上就等于在解微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.$$

这时虽然还没有发明微积分，但是由直角三角形面积的计算，他已得到解

$$x=\frac{1}{2}gt^2.$$

笛卡儿(Descartes 1596-1650)解决了几何光学中的"切线的反问题"。光线由一定点出发，经过镜面反射，反射规律是入射角等于反射角；已知镜面，求出切线，即可求出反射线，这便是切线问题，其实质是求微商。现在，镜面未知，要求从一定点出发的光线经过镜面反射，集中到另一定点，要求镜面的形式，这便是"切线的反问题"之一，其实质是解微分方程：设两定点在(x, y)平面上的座标为(1, 0)及(−1, 0)，则方程为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{x^2-y^2-1}{xy}\right)\frac{dy}{dx}-1=0,$$

其解为以(1,0)及(−1,0)为焦点的任何椭圆或双曲线；前者产生

实象，后者得到虚象；将这个二次曲线绕 x 轴旋转，即得到椭球面或双曲面。当然，笛卡尔不是用解微分方程的办法来得到结果的，因为当时还没有微积分，他是从微小量之间的相关性质来得出这一结果的。

以上的例子只是用来说明生产实践与科学实践为微分方程提供了无限丰富的研究泉源，甚至在微积分发明之前，人类的科学实践中便已经不断遇到微分方程及其求解的问题，同时也说明了任何重大发展实际上是在历史所积累的大量工作的基础上发展起来的。诚然，由于人类的创造性劳动使得这些大量积累发生质变，这样，历史就自然进入常微分方程的发生及其发展的阶段。

§3. 常微分方程的创立及实域解析理论的发展

天文学和力学的需要，以及数学中“微小量”概念的出现推动了牛顿及莱布尼兹（Leibniz 1646-1716）发明了微积分，同时也产生了微分方程，最初是常微分方程。牛顿的“流数术”发明于 1665 年。1676 年牛顿用无限级数解了一个微分方程，但他的这些工作到 1693 年才发表。莱布尼兹的工作中第一次出现微分方程也是在 1676 年，而他的微积分计算则是 1684 年发表的。现在我们通用的微积分记号，来源于莱布尼兹。

牛顿力学的第二定律为：动量随时间的变化率等于力，其数学表示形式为

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\vec{F},$$

这便是常微分方程。要求出运动轨迹则要求解这个方程。

当时，在牛顿之前，万有引力的具体表示关系是不清楚的，要研究行星在引力作用下的运动，不知道 $\vec{F}$，便建立不起微分方程，更谈不上求解这一微分方程了。

但是，在浩瀚的观测材料的基础上，刻普勒（Kepler 1571-

1630)已经总结出了经验性的行星运动三定律，即：

每个行星的轨道是一条以太阳为一焦点的椭圆；每个行星与太阳的联线所扫过的面积的速度是一个常数；任何行星的周期的平方除以此行星的椭圆轨道的半长轴的三次方是一个常量。

也就是说，在万有引力 $\vec{F}$ 还不清楚的条件下，这个微分方程的解——一系列的椭圆，以及它的许多性质都已经知道了。利用已知解来决定方程，牛顿导出了万有引力 $\vec{F}$ 是与距离的平方成反比，与质量之乘积成正比。这样，便可将问题全部反转过来，从引力的平方反比性质出发，列出方程

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{R}}{dt}\right)=-\frac{GmM}{|\vec{R}|^2}\ \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|},$$

其中 G 为万有引力常数，M 为太阳质量，m 为行星质量，太阳位置取作座标原点时，$\vec{R}$ 为行星的位置。

刻普勒行星运动三定律便可直接由这个微分方程推导出来，从经验规律上升到理论结果。先有经验的解，后有理论的方程，再有理论的解，这就是牛顿万有引力规律发现的实际过程。重温这种历史发展的事实，可以极大地增强从实际工作提升理论成果的人们的信心，这些实际问题都表现为实域中的变量，要求得到“初等解”；也即是，从方程式的系数或系数函数，经过有限次初等运算（包括加、减、乘、除、乘方、开方、对数、指数、微分和积分）来求得方程的解，这便是实域的解析理论的中心问题。

对于实域中的常微分方程求出通解的明显表达公式，成为十七世纪末及十八世纪常微分方程研究的中心工作，在这方面有一系列的重大进展。

莱布尼兹以及伯努利 (Bernoulli) 家族的数学力学家们开始系统地分类研究微分方程的求解方法。

最初莱布尼兹和雅可布·伯努利 (Jacob · Bernoulli 1654-1705)及约翰·伯努利 (Johann Bernoulli 1667-1748) 兄弟研究

了"分离变量法"，接着将这一方法利用变换 $y=ux$，成功地用于齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

即可将 u 和 x 分离变量。进一步，利用变换 $y=uv$，将线性方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

化为可分离变量的类型，求出 u，v．例如从

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)=q$$

取 v 使得

$$\frac{dv}{dx}+pv=0$$

分离变量求出 $v(x)$，然后从

$$v\frac{du}{dx}=q$$

中分离变量求出 $u(x)$。

比线性方程再进一步，他们利用变换 $y^{1-n}=u$ 将现在通称的伯努利方程

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$$

化为线性方程

$$\frac{du}{dx}+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x)$$

求解。

伯努利家族的一员丹尼尔·伯努利(Daniel Bernoulli 1700-1782)对于 ν 是整数时，用初等方法求出了下面的特殊形式的黎卡提(Riccati 1701-1775)方程

$$\frac{dy}{dx}+y^2=1+\frac{\nu(\nu+1)}{x^2}$$

的积分。

这个方程有两个特解

$$y=y_1(x)=\frac{\nu+1}{x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{d^\nu}{d(x^2)^\nu}\left(\frac{e^x}{x}\right)\right)$$

及

$$y=y_2(x)=\frac{\nu+1}{x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{d^\nu}{d(x^2)^\nu}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)\right).$$

而当黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^2+B(x)y+C(x),$$

已知一个特解 $y_1(x)$ 时，则可用 $z(x)=y(x)-y_1(x)$，将它化为 $\frac{1}{z(x)}$ 的线性方程再加以求解。

进一步阿贝耳(Abel 1802-1829)研究了形如

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^3+B(x)y^2+C(x)y+D(x)$$

及

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A(x)y^2+B(x)y+C(x)}{y+D(x)}$$

的若干特殊类型，现在通称阿贝耳第一类和第二类方程。但是它已经既不完整，也极烦琐，逐步走入困境。当然，偶然也出现象雅可比(Jacobi 1804-1851)方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(ay+bx+c)-dy-ex-f}{x(ay+bx+c)-gy-hx-k}$$

其中 a,b,c,d,e,f,g,h,k 为常数。如果其“特征方程”

$$\begin{vmatrix} d-\mu & e & f \\ g & h-\mu & k \\ a & b & c-\mu \end{vmatrix}=0$$

的三根 μ_1，μ_2，μ_3 互不相等，则通解形式可写成下形

$$(\alpha_{11}y+\alpha_{12}x+\alpha_{13})^{(\mu_2-\mu_3)}(\alpha_{21}y+\alpha_{22}x+\alpha_{23})^{(\mu_3-\mu_1)}$$
$$\cdot(\alpha_{31}y+\alpha_{32}x+\alpha_{33})^{(\mu_1-\mu_2)}=\text{const}.$$