高等学校物理学小丛书

时空对称性与守恒定律

卓崇培　刘文杰　编

高等教育出版社

高等学校物理学小丛书

时空对称性与守恒定律

卓崇培　刘文杰　编

高 等 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书是《物理学小丛书》的一个分册，是为高等学校普通物理课教学的需要编写的参考读物。

本书内容有经典力学中的守恒定律，对称性与高速运动中的不变量、守恒量，薛定谔方程的对称性与守恒量。在上述内容中，编者从经典力学、相对论力学和量子力学三个方面阐述了时间、空间的对称性与相应的守恒定律（或不变量）间的关系。本书可扩充读者的物理知识，加深对物理概念的理解。

本书可作为高等学校物理系师生的参考书，也可供有关读者参考。

高等学校物理学小丛书

时空对称性与守恒定律

卓崇培　刘文杰　编

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

浙江洛舍印刷厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 5.5　字数 133,000

1982年1月第1版　1983年8月第1次印刷

印数 00,001—8,500

书号 13010·0717　定价 0.48元

编 者 的 话

对称性是物理学重要概念之一。在历史上，力学规律对于伽利略变换的不变性曾是经典力学的重要支柱。随着相对论的发展，人们进一步看到对称性（不变性）原理与物理规律之间存在着非常紧密的内在联系。自量子力学问世后，对称性原理又深入到微观物理学的领域，成为人们探索微观世界运动规律的重要理论方法。

本书试图从经典力学、相对论力学及量子力学三方面重点地讨论时间、空间的对称性与相应的守恒定律或不变量的关系，以供读者在普通物理学习之余，进一步扩充物理知识，加深对物理概念的理解。

本书系1977年高等工科院校物理教材会议确定编写的《物理学小丛书》之一。在编写过程中，曾多次受到兄弟院校同志们的鼓励和帮助，特别是北京师范大学物理系喀兴林教授为我们仔细地审阅了原稿，并提出了宝贵意见，谨此表示感谢。

本书第一章及第二章 §20 以前由卓崇培执笔，第二章 §21以后及第三章由刘文杰执笔。由于我们水平所限，书中谬误或不当之处在所难免，敬希广大读者批评指正。

1979 年 10 月

于河北工学院

目　录

第一章　经典力学中的守恒定律

§ 1. 物理学中的对称性

我们周围的世界是丰富多采、千变万化的．动物、植物、街道、房屋、地面的景物、天上的星辰、各种现象、各种过程——一句话，我们周围的一切是那么千差万别，仿佛彼此互不相关、没有重复、没有共同点……．然而，如果我们仔细观察一下，仍然会在这个变化万千的世界里找到一类普遍存在的现象，那就是对称．

世界上各种事物的对称性表现在两方面：一是物体形状或几何形体的对称性，另一是事件进程或物理规律的对称性．下面分别介绍它们的特点．

几何形体的对称性　在平面几何学中，人们常说等腰三角形是轴对称图形，平行四边形是中心对称图形，等等．这是因为：在图 1（a）中，如果把等腰三角形 ABC 以其高线 AD 为轴而整体地旋转 180°，则所得图形将与原来的等腰三角形完全重合；在图 1（b）中，如果把平行四边形 $ABCD$ 绕其二对角线的交点 O 整体地旋转 180°，则所得图形也将与原来的平行四边形完全重合．总之，在对它们施行一定的操作之后，所得的图形都能与原图形互相重合．

其实，对称特征并不只是几何图形所独有．向阳的葵花、水生的海星、龟背的花纹等，也都具有类似的对称特征．在建筑设计方面，轴对称与中心对称的运用，更是到处可见．雄伟的天安门、壮丽的天坛、古老的赵州桥等，由于采用了不同的对称形式而分别给人

以庄严肃穆、或和谐优美、或坚如磐石之感，都是因为它们各部分间有一定的秩序，或按一定的规律互相重复——一句话，都是由于它们具有明显的对称性．可见，很多物体的形状也具有对称性．

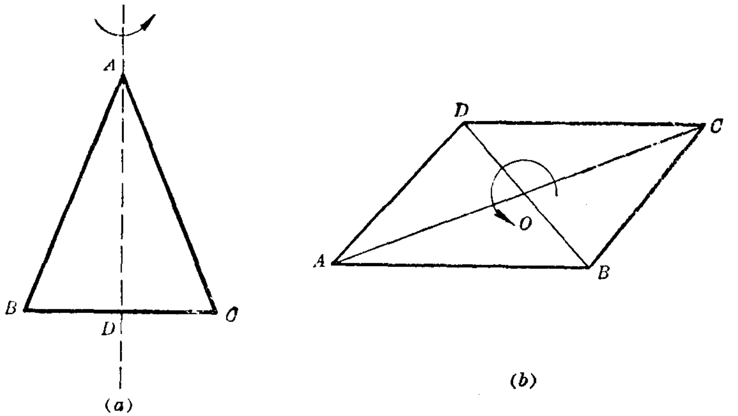

图 1　几何图形的轴对称与中心对称

轴对称常常也叫**左右对称**．在图 1 (*a*)中，如果沿高线 AD 在铅直平面内安放一块平面反射镜，那么，三角形 ABD 在镜中形成的像恰好能与镜后被遮住的三角形 ACD 完全重合．所以，这种对称还可以叫做**镜像对称**．意思是说，具有这种对称性的形体，其一部分可以看成另一部分在镜中的映像．

中心对称又叫**旋转对称**．

还有一种形体对称的情形，叫做**平移对称**，它是指一个几何形体或它的一部分经过一段距离的平移后，能够和另一几何形体或它的一部分完全重合．比如花布图案之间、墙砖房瓦之间，就具有这类对称性．

在物理学中，对称概念的大量应用，最早是在晶体结构的研究方面．晶体的点阵结构，具有高度的对称性，通常叫做晶体对称性．对称性使晶体具有很多特殊性质，人们利用这些性质所进行的一系列实验，解决了许多原来无法解决的课题．例如，X射线的

衍射实验就是直接和晶体对称性密切相关的。在此基础上，人们才发展了X射线的结构分析技术。

大致说来，在对称的形体或它的各部分间存在某种秩序，有某种重复，因此，如果对它们施行某种操作，或如通常所说施行某种对称性变换的话，就能把它们或它们的不同部分重合到一起。几何形体的对称性变换共有三种：一种是使物体在空间平移一段距离的平移变换，通过它可以形成平移对称；另一种是使物体在空间围绕某个轴线旋转一定角度的旋转变换，通过它可以形成旋转对称（即中心对称）；还有一种是取物体在镜面里形成的映像的镜像变换或空间反射，通过它可以形成镜像对称（即轴对称、左右对称）。

物理规律的对称性 以上关于几何形体对称性的讨论，很容易推广到物理规律对称性的问题上去。

所谓物理规律的对称性，指的是物理规律在某种变换下的不变性。例如，一只手表，无论把它戴到哪里，一般说来，走动的快慢都是一样的。这说明当手表所处的空间位置变换时，表内机件运动所遵循的物理规律是不变的，也可以说物理规律是具有空间平移① 的不变性或对称性的。不过，这里所说的物理规律（主要表现为运动方程），与物体在特定条件下的具体运动规律是不同的。为说明其差别，再举一个大家熟悉的例子。当把一只具有摆锤的旧式座钟放到地球上不同地点时，它走动的快慢是不一样的（因为各地的重力加速度值不同，摆锤的振动周期也随之改变），这时，我们可以说座钟的运动规律在不同地方并不具有重复性和不变性。但是，能否由此得出结论，认为摆锤振动的物理规律在各处就不同了呢？答案是否定的。因为摆锤的振动周期与重力加速度之间的依赖关系并未改变，所以尽管运动规律改变了，但物理规律的（空间平移的）不变性却仍然存在着。

① 严格地讲，钟、表等在地球上不同地点之间转移时，不只进行着平动，而且还有转动伴随发生；但此处为简便起见，假定并不发生转动。

上面两个例子涉及的只是：当空间位置移动时，物理规律是否具有对称性的问题．其实，除去这种坐标平移的不变性外，物理规律还可以具有许多其它对称性．从表面上看，这些对称性似乎平淡无奇，没有什么值得注意的地方，但实际上，无论在理论研究或在生产实践中，它们都发挥了很大的作用．特别是今天，在为揭露物质世界的奥秘而作的努力中，对称性原理已成为科学工作者手中的强有力的工具．

不过，限于本书的目的和任务，我们将只讨论与时空性质有关的几种对称性，即空间坐标平移的不变性、时间坐标平移的不变性、空间转动的不变性、镜像变换（空间反射）的不变性、伽利略变换或洛伦兹变换的不变性．

§ 2．守恒定律的缘起

在物理学中存在着许多守恒定律，其中有一些是我们已经熟悉的，如能量守恒、动量守恒、动量矩守恒及电荷守恒定律等，也有一些是人们不大熟悉而在微观世界里却经常遇到的守恒定律，如奇异数守恒、重子数守恒、同位旋守恒以及“宇称守恒”等定律．

这么多守恒定律的存在，不是偶然的．它们是物理规律具有多种对称性的自然结果．下面将会看到：**一种对称性对应着一条守恒定律**．我们的任务只限于从时间、空间的不同对称性质出发，导出相应的守恒定律，并讨论它们之间的关系．为此，首先看一下时间、空间具有哪些基本属性．

时间的均匀性　在物理学中曾经假定时间具有均匀性．这可以具体地理解为：古往今来的物理现象应该服从相同的客观规律．如以氢原子的光谱实验为例，那就是说，不但十年、百年、千年以前所得的光谱和今天的一样，而且今天所得的光谱也将和十年、百年、千年以后的光谱一样．这种看法是同人们在实践中所获得的直接经验相一致的．又如牛顿时代所做的一个物理实验，我们今

天重复去做时，得出的还是同一结果，而且谁也不会怀疑牛顿所总结的力学规律今天是否还能适用．因此，时间的均匀性意味着：当时间的计算起点移动时，物理规律（表现为运动方程）的具体形式不会改变．通常所谓物理规律对于时间平移变换 $t=t'+t_0$ 具有不变性，也就是说在一个具体的物理规律中，如果把时间变量从 t' 变换为 t 或反过来从 t 变换为 t'，所得的结果都与变换以前相同．所以，这种不变性表明，不同的时刻在物理上是等价的．从这个意义上说，我们看到了时间的对称性．

空间的均匀性　在物理学中还假定了空间具有均匀性．这可以具体理解为：空间各处的物理现象应该服从相同的客观规律．如仍以氢原子的光谱实验为例，那就是说，不管我们选择在什么地方进行这项实验，都会发现氢原子是服从同一个运动方程的（这正是物理规律所具有的不变性的具体体现）．但是，由于在不同地方，比如说，在北极、在赤道、在山巅、在海滨等处地磁以及科里奥利力的影响不同，氢原子的能级也就不同（即运动规律有所改变），只有消除这些影响后，各地的光谱实验才会得出相同的结果（这样所得的结果才足以反映物理规律的主要特征）．也只有这样，才与人们的日常经验相吻合：如果物理条件相同，则同一物理实验无论放在哪里做，都会得到相同的结果．否则，处在世界各地的物理学家也就很难具有共同语言了．由上所述可知，空间的均匀性意味着：当坐标原点移动时，物理规律（表现为运动方程）的具体形式不会改变．也可以表述为：物理规律对于坐标平移变换 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_0$ 具有不变性，或者说在一个具体的物理规律中，如果把矢径 $\boldsymbol{r}'$（或者是直角坐标 x',y',z'）变换为 $\boldsymbol{r}$（或 x,y,z）或反过来把 $\boldsymbol{r}$（或x,y,z）变换为 $\boldsymbol{r}'$（或 x',y',z'），所得结果都与进行这种变换以前相同．因此，这种不变性表明物理空间中的一切点都是等价的．从这里我们看到了空间对称性的一个侧面．

空间的各向同性　物理学中还认为空间是各向同性的，它可

以具体理解为：在空间任何方向上所发生的物理现象，都服从相同的客观规律．根据这种看法，在没有外来电磁场的影响时，无论把氢原子转到哪个方向，它的能级应当是一样的．这种看法也是同人们的实践经验符合的，即如果地磁及科里奥利力等影响可以忽略，那么，把一套实验装置随意转过某个角度后，所得结果是不会改变的．

所以，空间的各向同性(或者叫做“方向的均匀性”)意味着：当坐标轴转动时，物理规律的具体形式不会改变，或者说物理规律对于空间转动下的坐标变换具有不变性．与前面所讲的时间、空间平移变换的不变性一样，这种不变性表明了物理空间中的一切方向都是等价的．从这里我们看到了空间对称性的另一个侧面．

与守恒定律的关系　通过上面的讨论可以看到：物理规律(表现为运动方程)在一定的时间、空间变换下的不变性，分别对应于时间、空间的不同对称性．而从时间的均匀性、空间的均匀性及空间的各向同性这些对称性原理出发，经过严谨的推理，又可合乎逻辑地导出能量守恒定律、动量守恒定律和动量矩守恒定律，因而可以说这些守恒定律缘起于时空的对称性．

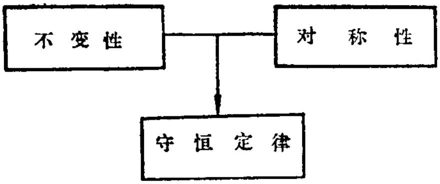

图 2　时空对称性与守恒定律的关系

综上所述，可把物理规律的不变性、时间、空间的对称性以及相应的守恒定律三者间的关系用图 2 表示出来．

能量、动量、动量矩和一系列其它量的守恒定律，因其特有的普遍性和重要性而与其它物理规律迥然不同：它们既适用于宏观客体，又适用于微观世界；既适用于低速运动场合，也适用于高速运动情形．这些定律最初都是作为大量实验事实的推广通过实验途径确立起来的，后来人们才对它们与时、空对称性原理的相互联

系有所了解，从而不仅理解了它们的普遍性，而且还能预言某种守恒定律在什么条件下将遭到破坏，或者改变原有的形式.

本章着重讨论经典力学中的几个守恒定律及其与时、空对称性的联系. 最后简略介绍一下力学规律在不同惯性系间过渡时的不变性，以与下一章衔接.

§ 3. 力学体系的状态　牛顿运动方程

在一定外部条件下，研究由一定数量的粒子①所组成的体系在一段时间以后的行为，是力学甚至也是整个物理学的基本任务. 在经典力学当中，因为所研究的粒子具有较大的质量和较低的运动速度，于是上述任务可以具体地归纳为：

(1) 选定描述粒子系的状态的若干个参量；

(2) 建立描述该体系的状态如何随时间变化的运动方程；

(3) 求解这些方程，并把所得结果与粒子系的实际情况进行比较.

力学体系的状态　我们先从如何确定最简单的力学对象，如一个粒子的状态谈起. 为了确定粒子在空间的位置，当然首先应该给出它的三个坐标 x、y、z. 但是，从某种意义说，只给出坐标的数值，还不能完全确定粒子在某一时刻的状态，因为这时还不能预言粒子在下一时刻所能到达的位置. 在给定了坐标数值的情况下，粒子还可以具有不同的速度. 因此，它在下一时刻的位置也就不同. 实验证明，只有同时给定粒子的三个坐标 x、y、z 和它的速度的三个分量 v_x、v_y、v_z 才能完全确定粒子的状态，并且在原则上可以预言它以后的运动②. 把这种考虑推广后，我们自然认为

---

① 为使全书名称统一，在这一章里我们用“粒子”代替习用的“质点”一词，并认为它们是同义语.

② 关于粒子状态的这一定义，可以看作是经典物理学的一条基础性定律. 它的应用限度是 $mvr \gg \hbar$，其中 m 是粒子的质量，v 是其平均速度，r 是运动范围的大致线度，而 $\hbar = 1.05443 \times 10^{-34}$ 焦·秒，是普朗克常数.

N个粒子组成的体系的状态，完全应由各个粒子状态的总体来决定，即由它们的 3 N个坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_N$；$y_1, y_2, \cdots, y_N$；$z_1, z_2, \cdots, z_N$ 和它们的 3 N 个速度分量 $v_{1x}, v_{2x}, \cdots, v_{Nx}$；$v_{1y}, v_{2y}, \cdots, v_{Ny}$；$v_{1z}, v_{2z}, \cdots, v_{Nz}$ 共同来决定.

粒子系的状态经这样确定以后，描写体系力学特征的所有其它各量，如加速度、动量、能量等，就可以表示为这些粒子的位置与速度的函数.

牛顿运动方程 对于一个由N个粒子组成的体系，可以根据牛顿第二定律，把其中每一粒子的加速度与所受力的关系写成如下形式：

$$m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i \tag{3.1}$$

式中 $i=1,2,\cdots,N$.

式(3.1)中的 $\boldsymbol{F}_i$ 是体系中第 i 个粒子所受的力，这个力具体说来可以是万有引力、弹性力(它们与粒子的位置有关)或空气阻力、摩擦力(它们与粒子的速度有关)等等，也可以是其中某些力的合力．总之，$\boldsymbol{F}_i$ 应当理解为各粒子的矢径及速度的函数，从而，粒子的加速度 $\boldsymbol{a}_i$ 也应是它们的矢径及速度的函数．由此看来，式(3.1)实际上是给出了粒子的加速度与它的坐标及速度的关系，因此，我们把它叫做牛顿运动方程.

加速度 $\boldsymbol{a}_i$ 是矢径对时间的二阶微商，即 $\boldsymbol{a}_i=\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}$. 因此，方程式(3.1)是函数 $\boldsymbol{r}_i(t)$的二阶微分方程，对它们进行积分后，原则上可以确定体系中各个粒子的运动轨道.

在特殊情况下，当体系中各粒子间的相互作用力只是保守力(如万有引力、弹性力)时，可以通过一定的坐标函数——势能U来表示这些力：

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} U \text{①} \qquad (3.2)$$

式中 $i=1,2,\cdots,N$. 例如，对于一个沿 X 轴方向振动的一维谐振子，如认为势能 $U=U(x)=\frac{1}{2}kx^2$，则根据式(3.2)可求得它在不同位置所受力的大小 $F_x=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right)=-kx$，这与弹性力的定义相符.

当式(3.2)成立时，牛顿运动方程可以写成如下形式：

$$m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}U \qquad (3.3)$$

式中 $i=1,2,\cdots,N$.以后，在不作特殊申明时，我们总认为构成体系的各粒子都满足上述运动方程，即认为体系内只存在保守力而不存在耗散力. 这样的体系，叫做**保守体系**.

封闭体系 一个不与任何外界物体相互作用，而只是内部粒子彼此间相互作用的粒子系，叫封闭体系. 封闭体系是为了研究问题的方便而引入的一种理想化模型. 严格的封闭体系是不存在的，但在许多情况下，当体系与外界物体的相互作用远小于其内部的相互作用时，就可近似地把它看作封闭体系. 例如，整个太阳系(包括太阳本身、各大行星以及它们的天然卫星、人造卫星，还有火星与木星间的许多小行星等等在内)就是一个准确度很高的封闭体系.

§ 4. 时间的均匀性与能量守恒

物理学史上永动机的不可能实现，以及自然现象间存在普遍联系的无数事实，使我们相信能量守恒定律是一个最普遍的自然

---

① 根据矢量分析的定义，$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}$是所谓梯度算符，它作用于某个标量函数 U 后，可得一个矢量函数：$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}U=\hat{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial U}{\partial z}$，其中 $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 是分别沿 X，Y Z 各坐标轴方向的单位矢量.

规律．根据这个定律，能量既不能凭空产生，也不会凭空消失，而只能由一种形式转化为另一种形式——由机械能转化为热能，由热能转化为化学能，等等．

在注意到能量守恒定律具有牢固实验基础的同时，也不应忽视它与时空对称性（具体说来是与时间的均匀性）之间的联系．下面，我们试图在经典力学范围内，以简明但不很严格的方式，论述时间的均匀性与力学体系的能量守恒定律的联系①．为避免过多的计算，我们只考虑由两个粒子组成的封闭体系，并假定两粒子只沿 X 轴方向运动．

现以 x_1 和 x_2 表示两粒子的坐标，v_1 和 v_2 表示它们的速度，则两粒子的动能之和为

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

显然，动能的表达式中是不明显地包含时间变量 t 的，以后为简便起见，我们说它是不显含时间的．因而 $\frac{\partial T}{\partial t}=0$．至于两粒子间的相互作用能，则一般地应表示为 $U(x_1,x_2;v_1,v_2;t)$．

现在假定我们进行了一次很小的时间平移变换 $t'=t+\Delta t$．这时，相互作用能也随之改变为 $U(x_1,x_2;v_1,v_2;t+\Delta t)$．把变换后的这一能量展开成泰勒级数，我们得到

$$U(x_1,x_2;v_1,v_2;t+\Delta t)=U(x_1,x_2;v_1,v_2;t)+\frac{\partial U}{\partial t}\Delta t+\cdots$$

因 Δt 很小，展开式中 Δt 的二次项以后各项均可略去，上式可近似地表示为

$$U(x_1,x_2;v_1,v_2;t+\Delta t)=U(x_1,x_2;v_1,v_2;t)+\frac{\partial U}{\partial t}\Delta t$$

如果时间具有均匀性，则进行时间平移变换前后的相互作用能应当保持不变，即应有

① 更为严格的讨论见 § 12 所述．

$$U(x_1,x_2;v_1,v_2;t+\Delta t)=U(x_1,x_2;v_1,v_2;t)$$

但因 Δt 是任意的，故必须有$\frac{\partial U}{\partial t}=0$。既然$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t}=0$，于是$\frac{\partial E}{\partial t}$也应等于零．这时体系的总能量就不显含时间，而可一般地写为

$$E=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+U(x_1,x_2;v_1,v_2)$$

但当体系为保守体系时，两粒子间的相互作用能即势能只是各粒子坐标的函数，上式变为

$$E=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+U(x_1,x_2) \tag{4.1}$$

此式对时间的全微商是

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2\right)\frac{dv_1}{dt}+\frac{\partial}{\partial v_2}\left(\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)\frac{dv_2}{dt}+\frac{\partial}{\partial x_1}U(x_1,x_2)\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial}{\partial x_2}U(x_1,x_2)\frac{dx_2}{dt} \tag{4.2}$$

因为二粒子间的作用力是保守力，根据式(3.2)和牛顿方程(3.3)，由式(4.2)可得

$$\frac{dE}{dt}=m_1v_1\frac{dv_1}{dt}+m_2v_2\frac{dv_2}{dt}-F_{12}\frac{dx_1}{dt}-F_{21}\frac{dx_2}{dt}=m_1\frac{dv_1}{dt}v_1+m_2\frac{dv_2}{dt}v_2-F_{12}v_1-F_{21}v_2=0 \tag{4.3}$$

此式恰好表明二粒子体系的总能量（机械能）是守恒的．可以证明，当体系包含有N个相互作用粒子，而且彼此间的作用力都是保守力时，这个结论仍然成立．

通过上述讨论我们看到：一方面，从物理规律的时间平移不变性出发，能够自然地得出封闭的保守体系机械能守恒的结论；另一方面，从封闭的保守体系的机械能守恒出发，也能自然地推出物理规律所应具有的时间平移不变性．但是，如果体系内各粒子除彼