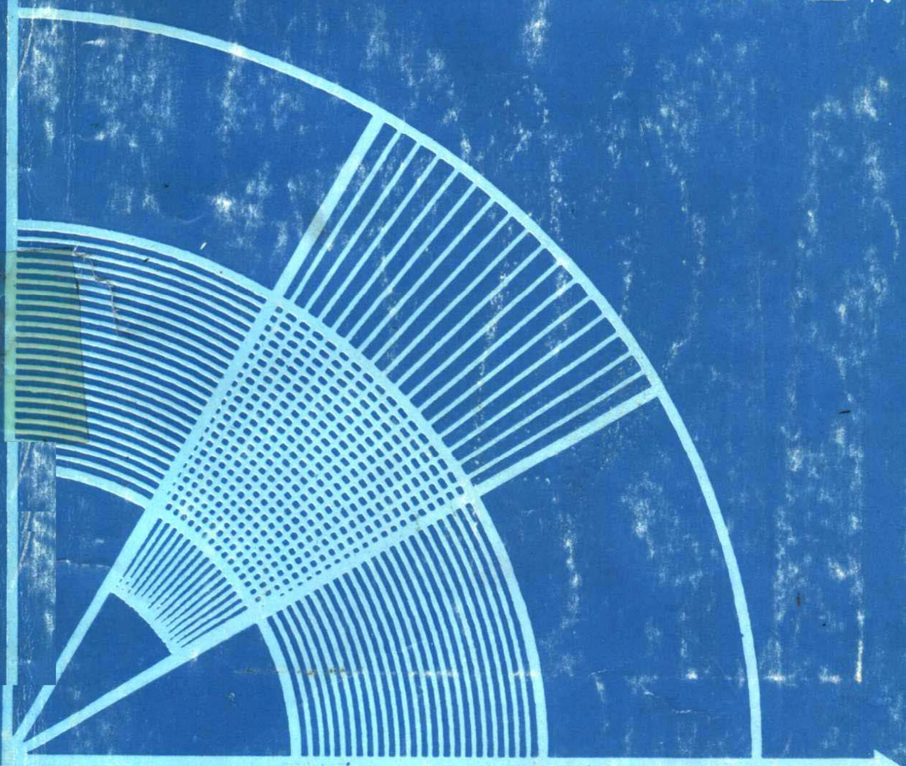
GAODENG SHUXUE GAINIAN SHIYI YU CUOJIE BIANXI

高等数学概念释疑与错解辨析

刘渭川　龙洪波　主编



武汉工业大学出版社

高等数学概念释疑与错解辨析

刘渭川　龙洪波　主编

武汉工业大学出版社

（鄂）新登字13号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学概念释疑与错解辨析/刘谓川，龙洪波主编. 武汉：武汉工业大学出版社，1995.6
ISBN 7-5629-0972-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘…②龙… Ⅲ.①高等数学-概念-解释-高等学校-教学参考资料②高等数学-解题-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

武汉工业大学出版社出版发行
（武汉市洪山区珞狮路14号 邮政编码430070）
郑州粮食学院印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：11.25 字数：242千字
1995年6月第1版 1995年6月第1次印刷
印数1—5000
定价：9.80元

前　　言

高等数学是工科院校的一门重要基础课，学生对它掌握得好坏，将直接影响到后继课程的学习．而对于高等数学的初学者，往往会感到学习起来比较困难，本书正是为了帮助读者克服学习高等数学的困难而编写的．本书是工科院校本、专科学生的实用辅导教材，也能满足职大、电大、函授及自学考试的学生的需要．

本书根据国家教委制订的《高等数学课程教学基本要求》，针对教学实践中基本概念、基本理论和基本运算中常见的易混淆的概念性错误，主要以答疑及错解分析的方式编写而成．在阐述过程中，侧重于基本概念的深化理解；着眼于区分模棱两可的模糊认识；注意到相关概念的区别与联系；剖析了初学者易出现的似是而非的错误解法；对于一些重要概念和方法也给出了小结．本书的特点是针对性强、涉及面广，对于高等数学的初学者无疑将会颇有帮助．

本书由刘渭川、龙洪波主编；阎秉钧副教授任主审；（以下均按姓氏笔画排序）张同斌、杨茂、崔丽鸿任副主编，参加编写的还有孙会霞、江世璟、黄守佳．

本书在编写过程中得到了郑州粮食学院基础部王有安、刘一勋、史本广三位副教授的关心与支持，在此深表谢意．

限于编者的学识水平，加之编写的时间仓促，疏漏之处在所难免．对于本书的不妥之处恳请读者指正．

编者

1995 年元月

目　　录

第一章　函数、极限、连续

一、基本概念归纳

1. 函数概念

(1) 函数的定义

函数是一个变量对另一个(或多个)变量的依赖关系的抽象模型. 定义域和对应法则是确定函数的两个基本要素. 对应法则可以是各种各样的(如解析式、几何图象、函数表等), 高等数学主要研究以解析式给出(或定义)的函数, 即通过一系列解析运算(包括代数运算、极限运算等), 由自变量的已知值确定函数值.

(2) 函数的运算

1° 代数运算

两个函数的代数运算指在其定义域的公共部分进行的四则运算.

2° 复合运算

在一定条件下, 由 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 生成新函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的过程称为复合运算(或复合步骤).

3° 反演运算

在一定条件下, 由已知函数 $y=f(x)$ 确定 x 为 y 的函数的过程称为反演运算.

4° 微分运算(将在微分学中讨论)

5° 积分运算(将在积分学中讨论)

高等数学的主要任务就是研究函数这一系列的运算性质.

(3) 几种用不同方式表达的函数

1° 分段函数

在定义域内,用两个或两个以上的解析式确定的函数称为分段函数.

2° 复合函数

由复合运算构成的函数称为复合函数.

只有当 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的值域有公共部分时,它们才能构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 复合函数的定义域是使各中间变量有意义的自变量取值范围.

3° 隐函数

设方程 $F(x,y)=0$ 满足一定条件(将在多元函数微分学中讨论). 若限定 x 和 y 的变化范围,对于其中每一个 x 值,由方程可唯一确定 y 值,则称 y 为 x 的隐函数.

4° 参数方程确定的函数

在一定条件下,由 $x=\varphi(t)$ 及 $y=\psi(t)$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为由参数方程确定的函数.

5° 反函数

由反演运算所确定的函数称为反函数.

反函数存在的条件是直接函数为单调函数.

注:高等数学的主要研究对象是初等函数,而初等函数又是由常数及五类基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经有限次四则运算及复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

(4) 函数的性质

有界性、单调性、奇偶性、周期性.

2. 极限概念

极限概念是高等数学的基础及基本推理工具,极限概念是从常量到变量,从有限到无限,从初等数学过渡到高等数学的关键.

高等数学的许多概念正是借助极限定义的,如连续、导数、定积分等.可以说极限自始至终贯穿于高等数学之中.

(1) 极限的"$\varepsilon-N$"、"$\varepsilon-\delta$"、"$\varepsilon-X$"定义

现将数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的"$\varepsilon-N$"定义,函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的"$\varepsilon-\delta$"定义及 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的"$\varepsilon-X$"定义列表如下:

"$\varepsilon-N$"定义	"$\varepsilon-\delta$"定义	"$\varepsilon-X$"定义
若:任给 $\varepsilon>0$, 总存在自然数 N, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$ 成立, 则:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. (或称数列 x_n 收敛于 a)	若:任给 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta>0$, 使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时, 恒有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 成立, 则:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.	若:任给 $\varepsilon>0$, 总存在 $X>0$, 使当 $\lvert x\rvert>X$ 时, 恒有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$ 成立, 则:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

以极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的"$\varepsilon-\delta$"定义为例,看一看极限定义的内涵:在"$\varepsilon-\delta$"定义中,通过引入两个量化指标 ε 与 δ,采用动态形式刻划了在点 x_0 附近(或称某邻域)有定义的函数 $f(x)$,当 x 无限靠近 x_0 时,函数值 $f(x)$ 可以任意靠近常数 A 的变化趋势.这一趋势与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关.

(2) 左、右极限

在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 中，$x\to x_0$ 的方式不加任何限制，但有时需要(或只能)考虑 x 仅从 x_0 的左侧(或右侧)趋向于 x_0，这便是左(或右)极限. 点 x_0 的左极限记作 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 或 $f(x_0-0)$ (点 x_0 的右极限记作 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 或 $f(x_0+0)$).

(3) 极限存在的充要条件

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A,$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A.$

(记号“$\Longleftrightarrow$”表示“等价于”或“互为充分必要条件”)

(4) 无穷小量概念

许多变化状态比较复杂的变量，都可以转化为一种简单而重要的变量——无穷小量(简称无穷小). 无穷小量在高等数学中占有极为重要的地位.

1° 无穷小量的定义

无穷小量是以零为极限的变量. “无穷小”所描述的不是量的大小，而是变化状态或称变化趋势. 零是唯一可以作为无穷小的数.

2° 无穷小量的性质

有限个无穷小的和、积仍是无穷小；

有界量与无穷小之积是无穷小；

非零无穷小的倒数是无穷大，反之亦然.

注意：两个无穷小的商未必是无穷小.

3° 无穷小的比较

通过考察两个无穷小之比的极限来确定它们趋于零的相

对快慢程度，从而得到高阶、同阶及等价无穷小的概念.

4° 等价无穷小代换

在求两个无穷小之商的极限时，可将分子(或分母)用其等价无穷小代换. 这种方法常用来简化极限运算.

常用的等价无穷小：

$x\to 0$ 时：$x\sim\sin x\sim \mathrm{tg}x\sim\arcsin x\sim\mathrm{arctg}x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$.

(5) 无穷小与极限的关系

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha$$

(其中 α 是 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小).

(6) 极限运算法则及存在准则

1° 极限的四则运算

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=B$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A\pm B$;

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\cdot\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A\cdot B$;

当 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

2° 夹逼准则

若 $x\in U(\hat{x}_0,\delta)$(或 $|x|>X$)时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，

且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$存在且等于 A.

3° 数列单调有界准则

单调有界数列必有极限.

3. 函数的连续性

函数的连续性是一个局部的概念，并且是用极限来定义的，它描述了函数的一种变化性态.

(1) 函数在一点连续的定义

定义 1 设 $y=f(x)$在 $U(x_0,\delta)$内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 x_0 连续.

定义 2 设 $y=f(x)$在 $U(x_0,\delta)$内有定义，若 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$，则称 $f(x)$在点 x_0 连续.

定义 3 设 $y=f(x)$在 $U(x_0,\delta)$内有定义，若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当$|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$在点 x_0 连续.

上述三个定义的区别在于：定义 1 把极限与连续这两个概念联系起来，提供了连续函数求极限的简便方法；定义 2 采用了无穷小定义法，即在连续点 x_0，当自变量增量是无穷小时，函数增量亦为无穷小；定义 3 把定义 1 用“$\varepsilon-\delta$”语言加以严密化，便于分析论证.

上述三个定义的联系在于：它们的本质相同，即均含三个要素：①$f(x)$在点 x_0 有定义；②$f(x)$当 $x\to x_0$ 时有极限；③极限值等于该点函数值.

(2) 左、右连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 x_0 左连续；

若 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

左、右连续多用于判断分段函数在分段点的连续性.

(3) 左、右连续与连续的关系

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Longleftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 左连续且右连续.

(4) 函数在区间的连续性

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是指在 (a,b) 内每点均连续，且在点 a 右连续，在点 b 左连续.

(5) 连续函数的性质

四则及复合运算不改变函数的连续性；

闭区间上的连续函数满足最大(小)值定理、有界性定理、介值定理.

(6) 初等函数的连续性

基本初等函数在定义域上连续；

初等函数在定义区间上连续.

(7) 间断点的分类

对于连续定义中的三要素，只要有一条不满足，函数便不连续，即间断.

函数的间断点是由单侧极限的性质决定的，这也是间断点分类的依据.

$$\text{间断点}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{第一类}\\(f(x_0\pm 0)\text{均存在})\end{array}\begin{cases}\text{可去型}(f(x_0-0)=f(x_0+0))；\\ \text{跳跃型}(f(x_0-0)\neq f(x_0+0)).\end{cases}\\[2ex] \begin{array}{l}\text{第二类}\\(f(x_0+0)\text{或} f(x_0-0)\text{不存在})\end{array}\begin{cases}\text{无穷型}；\\ \text{振荡型}；\\ \text{其它}.\end{cases}\end{cases}$$

对于第一类可去型间断点只要略加改造(补充或改造定义，使之等于极限值)，便可使函数在间断点处连续.

二、概念、方法问答

问题 1.1 "有两个变量，一个变，另一个也变，它们就构成函数关系."这种说法对吗？如何理解函数记号 $f(x)$？

[答] 不对，这种说法不确切. 两个变量之间是否构成函数关系，不在于一个变化引起另一个变化，而在于是否存在一法则，使一个变量在其取值范围内任取一值时，另一个变量总有确定的值与之对应. 一个变，另一个也变，未必构成函数关系. 如：在极限的"$\varepsilon-\delta$"定义中，一般 ε 变化时，δ 也相应地变化，但 δ 不是 ε 的函数(详见问题 1.4)；再如：$f(x)=c$ 一个变，另一个不变，却构成函数关系.

函数记号 $f(x)$ 中的字母"f"表示 y 与 x 的对应法则，一般指对 x 施加的运算. 例如：

$$f(x)=\sin(3x+1).$$

这里"f"表示对给定的 x 值先乘上 3，再加上 1，最后取正弦值的运算过程.

问题 1.2 分段函数是初等函数吗？

[答] 分段函数一般不是初等函数. 初等函数是指由常数及基本初等函数经有限次四则运算及复合步骤所得的，并能用一个式子表示的函数. 而分段函数在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子表示. 所以，一般分段函数不是初等函数.

但是，有些分段函数亦可用一个式子表达，如：$f(x)=|x|$ 通常写成分段函数的形式：

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

但也可写成一个表达式$|x|=\sqrt{x^2}$. 因此,$f(x)=|x|$是初等函数.

虽然有些分段函数是初等函数,但把它们写成一个表达式无助于讨论其性质. 因此,对于分段函数,除特殊需要外,通常没有必要鉴别其是否为初等函数,而把它当作非初等函数.

因此,分段函数一般不是初等函数.

问题 1.3 极限概念有何重要意义?

[答] 高等数学的主要研究对象是初等函数,而极限是研究函数的主要工具之一. 许多概念的引入,许多基本定理的论证都要用到极限. 例如:连续性、导数、定积分、级数及多元函数的偏导数、重积分、曲线积分、曲面积分等概念都是借助于极限概念才得以抽象化、严密化的. 因此,可以毫不夸张地说,极限概念是微积分的基础,是高等数学的基本推理工具. 没有极限的概念,就没有高等数学的严密结构.

问题 1.4 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的"$\varepsilon-\delta$"定义中,ε 与 δ 的关系与意义如何? δ 是 ε 的函数吗?

[答] ε 与 δ 的关系是:ε 事先任意给定,δ 随后相应找到,δ 依赖于 ε(一般 ε 越小,δ 亦越小).

ε 与 δ 的意义是:ε 具有任意性与相对固定性,是用以刻划 $f(x)$与极限值 A 的接近程度的,它除了限于正数外不受任何限制. 只有 ε 的任意性才能保证 $f(x)$与 A 可以无限接近. ε 一旦给定,就应暂时固定,以便由它来找 δ. "$\varepsilon-\delta$"定义正是借助于 ε 与 δ 的引入,才能够使用精确化的定量方法描

述 x 与 x_0 无限接近时，函数 $f(x)$与 A 无限接近的事实.

δ 不是 ε 的函数. 因为 δ 不是由 ε 唯一确定的. 即对于给定的 ε，若存在一个满足要求的 δ，则必然有无限多个满足要求的 δ. 因此，δ 与 ε 的关系不满足函数定义.

问题 1.5 "数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示当 n 越来越大时，x_n 越来越接近于 a."这种说法对吗？

[答] 这种说法不妥. 应当说"当 n 任意大时，x_n 与 a 之差的绝对值可以任意小."或者说"当 n 越来越大时，x_n 越来越无限接近于 a."

因为"越来越接近于 a"只说明 $|x_n-a|$ 单调减少，而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则表示 $|x_n-a|$ 趋于 0. 单调减少未必趋于 0，趋于 0 也不见得一定单调减少. 例如：$x_n=1+\dfrac{1}{n}$ 当 n 增加时，x_n 越来越接近于 0，但 $x_n\not\to 0$；再如：$y_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}\longrightarrow 0(n\to\infty)$，但 $|y_n-0|$ 并非单调减少，即 y_n 并非越来越接近于 0.

综上所述，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示当 n 无限增大时，x_n 任意（或无限）地接近于 a 或称 x_n 趋于 a.

问题 1.6 若 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 A 一定大于 0 吗？

[答] $A\geqslant 0$. 例如：$f(x)=x^2+1>0$，$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1>0$；再如：$f(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)>0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

问题 1.7 求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$时，在什么情况下需考虑 x_0 点的

左、右极限？

［答］ 若 $f(x)$ 是分段函数且 x_0 是分段点，则必须考察 x_0 的左、右极限. 若 $f(x)$ 不是分段函数，则应先观察一下单侧极限的情况：若 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 两侧变化一致，则不必分开讨论；若两侧变化趋势可能有差别，则应分别研究 x_0 的左、右极限.

一般有些三角函数、反三角函数、指数函数在特殊点的左、右极限不同. 例如，$\mathrm{tg}x$ 在 $x_0=\frac{\pi}{2}$ 处左、右极限不同：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\mathrm{tg}x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\mathrm{tg}x=+\infty$；$\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$、$e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x_0=0$ 处左、右极限也不同：

$$\lim_{x\to0^+}\mathrm{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to0^-}\mathrm{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\ \lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0.$$

问题 1.8　无界函数就是无穷大量吗？

［答］ 此说法不对. 无界是就某区间而言函数的一种取值特性，无穷大量（简称无穷大）是指 $x\to\infty$（或 $x\to x_0$）时，函数的一种变化性态. 如：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界是指对任何正数 M（无论多么大），总至少存在一点 $x_1\in(0,+\infty)$，使 $|f(x_1)|>M$；而 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 为无穷大是指对任意给定的正数 M，总存在正数 X，使当 $x>X$ 时的一切 x，恒有 $|f(x)|>M$ 成立.

例如：$f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，但 $x\to+\infty$ 时不是无穷大. 事实上，对于点列 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$. 可见，无论给定多么大的正数 M，当 n 充分大时，总会有使