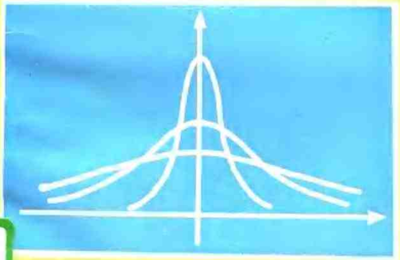
成人高等学校教材

经济数学

主编：张献廷



西南师范大学出版社

(川)新登字 019 号
责任编辑 胡小松
封面设计 王正端 舟 雨

经 济 数 学

张献廷 主编

西南师范大学出版社出版、发行
(重庆 北碚)
西南师范大学印刷厂印刷
*
开本:787×1092 1/32 印张:12.75 字数:276 千
1994 年 11 月 第一版 1994 年 11 月 第 1 次印刷
印数:1—5,000
*
ISBN 7—5621—1188—X/G · 802

定价:9.00 元

前　言

本书根据重庆市教委及兄弟省市教委颁发的成人高等专科学校经济类《经济数学》教学大纲编写。内容包括一元函数微积分，多元函数微分学，微分方程简介，行列式，矩阵与线性方程组。本书可作为成人高等专科学校经济类《经济数学》教材，还可供成人大专层次经济管理专修科、进修班使用。

本书由重庆兵器工业职大张献廷副教授担任主编，西南航天职大李伦副教授、重庆兵器工业职大长江分校马贤铭副教授、重庆特钢职大雷毓明副教授任副主编。参加本书编写的有：重庆机械局职大庞世强、重钢职大黄虹、重庆化工职大张温良、重庆兵器工业职大江陵分校张华等同志。牛安亚、张锐谋、黄光武等同志参加本书的审稿工作。

由于编者水平有限，书中缺点错误在所难免，诚请同行和专家批评指正。

编　者

1994年10月

目　录

第一章　函数

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学. 函数是微积分学中最重要的基本概念之一，它也是微积分研究的主要对象. 在经济领域中涉及到大量数量关系从理论上讲，都可以用函数关系来表达. 因此，经济工作者熟悉和掌握这个概念是很重要的. 本章主要介绍集合的基本概念，函数的定义及其表示方法，函数的性态及初等函数的构成.

§1.1　实数集

一、集合的概念及表示法

1. 集合的概念

集合是现代数学中的一个重要概念，它在现代数学中起着非常重要的作用. 在人们的生产活动中要研究某些事物组成的集体，如一个车间的全体职工，某车间生产的一批产品，某公司盈利的所有企业，全体正整数等等，这些事物组成的集体都是集合.

一般地说，集合就是指具有某种共同属性的事物的全体. 构成集合的事物，称为该集合的元素.

下面举几个集合的例子.

【例 1】某市生产同一种产品的工厂构成一个集合.

【例 2】某工厂一天生产的产品构成一个集合.

【例 3】一元二次方程 $x^2-3x+2=0$ 的根构成一个集合.

【例 4】全体奇数构成一个集合.

【例 5】在直线 $x+y-1=0$ 上所有的点构成一个集合.

通常，我们用大写字母 A、B、C……等表示集合，用小写字母 a, b, c……等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in}A$，读作 a 不属于 A.

例如：Q 表示全体有理数的集合，如 $\frac{3}{5}\in Q$，$\sqrt{2}\overline{\in}Q$.

由有限个元素构成的集合，称为有限集合. 由无限个元素构成的集合，称为无限集合. 如上述例中，例 1、例 2、例 3 都是有限集合，例 4、例 5 是无限集合.

数的集合简称数集. 我们常见的几种数集及其符号有：

N 表示全体自然数的集合，简称自然数集.

Z 表示全体整数的集合，简称整数集.

Q 表示全体有理数的集合，简称有理数集.

R 表示全体实数的集合，简称实数集.

2. 集合的表示法

(1) 列举法 把集合的所有元素不重复、不遗漏、不计秩序地写在花括号内来表示集合的方法.

例如，由 a、b、c、d、四个元素构成的集合 A 可以表示为

$$A=\{a, b, c, d\}$$

或 $A=\{b, d, c, a\}$ 等.

又如，全体偶数 2、4、6、8、……构成的集合 B 可以表

示为

$$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\cdots\cdots\}$$

（2） 描述法 在花括号内先写出该集合中元素的代表符号，在隔开号“|”后边用数学语言描述出集合各元素的共同属性或应满足的条件.

例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 的根构成的集合 A 可以表示为：

$$A=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}$$

又如，直线 $x+y-1=0$ 所有的点构成的集合可以表示为：

$$\{(x,\ y)\,|\,x+y-1=0\}$$

（3） 图象法（文氏图） 在平面上用封闭曲线围成的图形来表示集合的方法. 如图 1—1. 这样的图形称为文氏图.

图 1—1

3 集合与集合的关系

对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 中每一个元素都是集合 B 的元素，则称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

如 $N\subset Z$

如 $A=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 100,\ x\in R\}$

$B=\{x\,|\,10<x<50,\ x\in R\}$

则 $B\subset A$

如果 $A\subset B$，又 $B\subset A$，则称 A，B 相等. 记作 $A=B$

不包含任何元素的集合叫空集，记作 $\varnothing$. 如方程

$x^2-2x+3=0$ 的实根构成的集合是一个空集.

即 $\varnothing=\{x\mid x^2+2x+3=0,\ x\in R\}$

由被研究的所有对象构成的集合称为全集，记作 U. 全集是相对的. 一个集合在一定条件下是全集，在另一个条件下就可能不是全集. 例如：讨论仅是一车间一天生产的次品，则全部次品的集合为全集. 如果讨论的是一天的产品，则全部次品的集合就不是全集.

由属于 A 或属于 B 的一切元素所组成的集合叫 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$.

即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

文氏图如图 1—2

图 1—2

图 1—3

例如 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x>0\}$ 则

$A\cup B=\{x\mid x\geqslant -1\}$

由定义知 $A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$

由同时属于 A 和 B 的一切元素组成的集合叫 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$.

即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

文氏图如图 1—3.

例如 $A=\{x\mid x>-2\}$，$B=\{x\mid x<3\}$，则

$A\cap B=\{x|-2<x<3\}$

由定义知 $A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$

由属于 A 而不属于 B 的一切元素组成的集合叫 A 与 B 的差集，记作 $A-B$.

即　$A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in}B\}$

文氏图如图 1—4

图　1—4

图 1—5

例如，$A=\{x|-2<x\leqslant1\}$，$B=\{x|x>0\}$，则

$$A-B=\{x|-2<x\leqslant0\}$$

由定义知 $A-A=\varnothing$

若 U 为全集，由 U 中所有不属于 A 的元素所组成的集合叫 A 的补集，记作 A'. 即　$A'=\{x|x\in U x\overline{\in}A\}$

文氏图如图 1—5.

一个集合 A 的补集 A' 是相对某一全集而言. 例如，某一集团公司所属的所有企业为全集 U，A 表示不亏损的企业的集合，则 A' 表示亏损企业的集合.

又如实数集 R 为全集，Q 是有理数集，则 Q' 是无理数集.

由定义知、$A\cup A'=U$，$A\cap A'=\varnothing$，$A-A'=A$

二、实数集与绝对值

1. 实数是数学中一个重要的研究对象，经济数学中所研究的问题，一般都在实数范围内讨论的，所以我们得先回顾一下学过的实数系统表：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\left.\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\right\}\text{有限小数和无限循环小数}\end{cases}\\ \text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

人们对数的认识是在生产活动中逐步发展的．首先产生了自然数（正整数），继而发展到有理数（正负整数、零、正负分数），再进一步发展到无理数（例如 $\sqrt{2}$，π 等都是无理数）．有理数和无理数统称为实数．

在一条直线上取定一点作为原点 O，规定这直线的正方向（在直线的一端画上箭头表示正方向），再取定一个单位长度，我们把这种规定了原点、正方向和单位长度的直线称为数轴．如图 1—6．

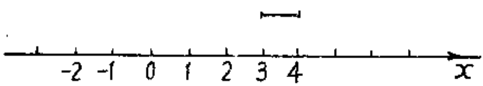


图 1—6

可以证明实数充满数轴而且没有空隙，这就是实数的连

续性．从而知道，全体实数与数轴上的所有点之间形成一一对应关系．对任意一个实数x在数轴上都有一点P与之对应*（简记为点x），称x为点P的坐标，记作$P(x)$．

2．绝对值及其简单性质

设x为一实数，它的绝对值用$|x|$表示，定义为：

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

由定义可知，任何一个实数的绝对值是非负的．$|x|$表示数轴上点x与原点间的距离．

绝对值有如下的运算性质：

(1) $\sqrt{x^2}=|x|$　　(2) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$

(3) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$　$y\neq 0$　　(4) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$

常用的简单绝对值不等式有：

(1) $|x|<a\Leftrightarrow -a<x<a$ $(a>0)$

(2) $|x|>b\Leftrightarrow x<-b$ 或 $x>b$ $(b>0)$

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$　　(4) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$

3．区间与邻域

在讨论变量时常常是限制在一部分实数范围内来考虑，而这部分实数是界于某两个实数之间的一切实数．为了能够既明确又简便地表明这部分实数，我们引入区间这个概念．

设a、b为实数，且$a<b$．

(1) 数集$\{x|a<x<b\}$称为开区间，记作(a, b)，即$(a, b)=\{x|a<x<b\}$．在数轴上的表示如图1—7．

* 反之，数轴上任意一个点都有一个实数x与之对应．

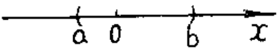


图 1—7

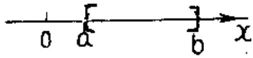


图 1—8

(2) 数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a, b]$，即 $[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，如图 1—8.

(3) 数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 与 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间，分别记作 $[a, b)$ 与 $(a, b]$.

即 $[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 分别如图 1—9 与图 1—10.

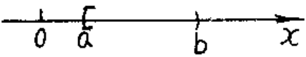


图 1—9

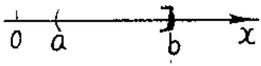


图 1—10

以上三类区间统称为有限区间，a，b 称为区间的端点，数 $b-a$ 称为区间的长度.

(4) 数集 $\{x|x>a\}$，$\{x|x<b\}$，$\{x|x\geqslant a\}$，$\{x|x\leqslant b\}$，$\{x|x\in R\}$ 都称为无限区间，分别记作：

$$(a, +\infty)=\{x|x>a\}$$
$$(-\infty, b)=\{x|x<b\}$$
$$[a, +\infty)=\{x|x\geqslant a\}$$

$(-\infty, b]=\{x|x\leqslant b\}$

$(-\infty, +\infty)=\{x|x\in R\}$

设 a，δ 为实数且 $\delta>0$，数集 $\{x||x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域. 点 a 称为此邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

因为 $|x-a|<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta$，所以点 a 的 δ 邻域实际上是以点 a 为中心，长度为 2δ 的一 区间 $(a-\delta, a+\delta)$. 如图 1—11.

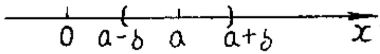


图 1—11

称数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的去心 δ 邻域. 表示的区间是 $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$.

§1. 2 函数

一、函数的概念

在技术管理或经济管理中，所遇到的实际问题往往是几个变量同时都在变化，且它们不是彼此孤立地变化，而且相互联系、相互制约，并按一定规律在变化. 这种变化关系在数学上形成了函数概念.

【例 1】 圆的而积 S 与它的半径 r 之间的关系由公式

$$S=\pi r^2 \qquad (r>0)$$

来确定. 其中 π 是常量. 只要 r 在正实数范围内取定一个值，那么 S 根据上面公式得到一个确定的值. 所以上面公式表明

了变量 r 和 S 的相依关系及变化的规律.

【例 2】生产总成本 C 是由固定成本 C_0 和变动成本 C_1 两部分组成的，即 $C=C_0+C_1$

通常在短期情况下，固定成本 C_0 是常数，而变动成本 C_1 是随通着生产量 x 的变化而变化的，因而生产总成本 C 也随着生产量 x 的变化而变化. 当生产量有一个确定的数值时，相应地总成本 C 也有一个确定的值，即 x 与 C 之间存在着相依关系.

【例 3】某产品的单位成本为 5 元，若销售单价为 P（元/件），企业已销售该产品 100 件. 问可获得多少利润?

因为单位成本是常量，利润随着销售单价不同而不同. 设 L 为总利润，那么 L 与 P 的关系是

$$L=100\ (P-5)$$

当 P 在一定范围内取定一值时，L 根据上而关系有确定的值相对应. 所以公式表示了 L 与 P 之间的相依关系和变化规律.

类似上而的例子，在实际问题中是很多的. 它们虽然代表不同的具体问题，但都具有一共同的特点，就是它们反映了两个变量同时变化的相依关系. 这种相依关系，实质上给出了两个变量间的一种相互制约的对应规律，且当其中一变量在某一范围内取定一个值时，另一个变量就按这对应规律有确定的值与之对应. 抽去上面各例的具体意义只研究它们的共性，这样形成了数学上的函数概念.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对每一个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的规则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数. 记作