

研究生教材

应用概率

(数理统计 随机过程 时间序列)

唐鸿龄 张元林 陈浩球 编著

南京工学院出版社

应 用 概 率

唐鸿龄 张元林 陈浩球 编著

南京工学院出版社

内 容 简 介

全书包括三篇内容：第一篇为数理统计，第二篇为随机过程（包括马氏过程和平稳过程），第三篇为时间序列分析。每章配有一定数量的习题。

本书可供工科各专业研究生、理科非数学专业研究生作教材，也可供有关专业的教师和工程技术人员参考。

责任编辑 徐步政

责任校对 吕 岚

应 用 概 率

唐鸿龄 张元林 陈治球 编著

南京工学院出版社出版

江苏南京市四牌楼2号

高淳印刷厂印刷 江苏省新华书店发行

开本 850×1168 1/32 印张24 5/16 字数632千字

1988年4月第1版 1988年4月第1次印刷

印数1—7000册

ISBN 7-81023-075-1

Q·19

定价：3.95元

前 言

随着科学技术的不断发展，概率论的各个分支（特别是数理统计、随机过程、时间序列）在物理、生物、社会科学以及工程科学技术等许多领域中显示出十分重要的作用。数理统计、随机过程以及时间序列已成为工科许多专业研究生的必修课或选修课。可是，目前在这方面适合工科研究生用的教材尚较缺乏。编者在从事多年工科研究生教学的基础上，结合各专业需要，并吸取了目前国内外有关书籍的长处，编写成了这本教材。

本书既注意了数学理论的系统性，又考虑到工科研究生的数学基础和要求并注意到实际的应用；每章安排较多的例题和习题，并附有习题答案或提示。

本书每篇约需40学时授完，为了补充概率论的有关知识，在教学中还需增加10学时。第一篇与第二篇内容有相对独立性，各专业可根据需要选学，而学习第三篇内容时应该先学习第一篇及第二篇中的平稳过程。

本书系集体编写，结构与体例也由编者集体讨论商定。第一篇由唐鸿龄编写，第二篇由张元林编写，第三篇由陈浩球编写，最后由唐鸿龄统稿。在编写过程中，承南京工学院数力系高金衡、陶永德、韦博成三位教授审阅原稿并提出了许多宝贵的意见和有益的建议；本书的出版得到南京工学院研究生院和南京工学院出版社的大力支持和帮助，编者谨此一并致谢。限于水平，书中难免有许多不妥和错误之处，欢迎读者批评指正。

编者 1987年7月

目 录

第一篇 数理统计

第一章 概率论补充知识	1
§1-1 概率空间.....	1
一 事件域.....	1
二 概率.....	3
§1-2 随机变(向)量及其分布.....	6
一 随机变量.....	6
二 随机向量及其分布.....	7
三 边际分布.....	11
四 条件分布.....	14
§1-3 随机变量的独立性.....	18
§1-4 随机变量函数的分布.....	20
一 单个随机变量函数的分布.....	20
二 随机向量函数的分布.....	21
三 随机向量的变换.....	21
四 数理统计中几个常用的分布.....	25
§1-5 数字特征与特征函数.....	35
一 黎曼-斯梯阶积分.....	35
二 数字特征.....	38
三 特征函数.....	44
§1-6 多元正态分布及其性质.....	57
一 n 元正态分布的特征函数.....	57
二 n 元正态分布的几个性质.....	59

§1-7	极限定理	62
一	随机变量的收敛性	62
二	连续性定理	63
三	大数定律	64
四	中心极限定理	67
习题		71
第二章	数理统计的基本概念	77
§2-1	数理统计的基本内容	77
§2-2	统计量、经验分布函数	77
一	母体与子样	77
二	统计量与子样矩	79
三	顺序统计量与经验分布函数	82
§2-3	抽样分布	84
习题		94
第三章	参数估计	95
§3-1	点估计的两种常用的方法	96
一	矩估计法	97
二	最大似然估计法	99
§3-2	估计量的判别标准	105
一	无偏估计	105
二	最小方差无偏估计	107
三	有效估计	113
四	一致估计	114
§3-3	区间估计	115
一	正态母体均值的区间估计	116
二	正态母体方差的区间估计	119
三	两个正态母体均值差的区间估计	121

四	两个正态母体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计	123
习题		127
第四章	假设检验	130
§4-1	假设检验的基本概念	130
§4-2	正态母体均值的检验	136
一	U 检验	136
二	T 检验	140
§4-3	正态母体方差的检验	147
一	χ^2 检验	147
二	F 检验	151
§4-4	非正态母体大子样的参数检验	155
§4-5	分布的 χ^2 -检验	158
一	分布的 χ^2 -检验法	158
二	联立表的独立性检验	167
习题		172
第五章	回归分析	174
§5-1	线性回归分析的基本概念	174
§5-2	一元线性回归方程	179
§5-3	多元线性回归的参数估计	182
一	参数 β 及 σ^2 的估计	182
二	关于 $\hat{\beta}$ 、 $\hat{\sigma}^2$ 的一些性质	187
三	最小二乘估计的几何意义	192
§5-4	线性模型的中心化	193
§5-5	关于参数 β 的假设检验问题	203
§5-6	关于 y 的预测	208
§5-7	曲线回归线性化	210
习题		221

第六章	方差分析	223
§6-1	单因素方差分析.....	223
一	基本概念.....	223
二	检验统计量.....	225
§6-2	二个因素方差分析.....	232
一	不考虑交互作用的方差分析.....	233
二	考虑交互作用的方差分析.....	242
	习题.....	248
第七章	正交试验设计法	251
§7-1	正交设计的基本方法.....	251
一	正交表.....	251
二	安排试验, 分析结果.....	253
§7-2	正交设计的方差分析.....	261
§7-3	交互作用的正交试验设计.....	267
	习题.....	274

第二篇 随机过程

第八章	随机过程及其分类	276
§8-1	随机过程的基本概念.....	276
一	几个例子.....	277
二	随机过程的定义.....	278
§8-2	有穷维分布族与数字特征.....	278
一	有穷维分布族.....	278
二	数字特征.....	280
§8-3	随机过程的分类.....	286
一	按T和E的类别来分类.....	286
二	按随机过程的概率结构来分类.....	286

习题	290
第九章 马尔可夫链	291
§9-1 马尔可夫链的定义及转移概率	291
一 马尔可夫链的定义	292
二 转移概率的性质	293
§9-2 齐次马尔可夫链的状态分类	303
一 闭集与不可约性	304
二 状态的常返性和周期性	305
三 状态分类的判别方法	309
§9-3 齐次马尔可夫链的状态空间分解	317
一 互通状态的一些性质	317
二 状态空间的分解	320
§9-4 转移概率的极限定理及平稳分布	326
一 转移概率的极限定理	326
二 平稳分布	329
三 两个判别准则	330
§9-5 格子点上的随机游动	335
一 无限制随机游动	335
二 具有吸收壁的随机游动	338
三 具有反射壁的随机游动	341
四 其它情形的随机游动	345
习题	348
第十章 连续时间的马尔可夫链	355
§10-1 齐次可数的连续时间马尔可夫链的基本概念	355
一 定义	355
二 转移概率的性质	356
§10-2 柯尔莫哥洛夫方程	357
一 $p_{ij}(t)$ 的可微性	357

二	柯尔莫哥洛夫方程	359
§10-3	平稳分布与 $p_{ij}(t)$ 的遍历性质	365
一	平稳分布	365
二	$p_{ij}(t)$ 的遍历性质	367
§10-4	普阿松过程与生灭过程	376
一	普阿松过程	377
二	生灭过程	383
	习题	391
第十一章	平稳过程的一般概念	394
§11-1	随机分析	395
一	均方极限	395
二	均方连续性	404
三	均方可微性	406
四	均方可积性	410
§11-2	平稳过程的基本概念	422
一	平稳过程的定义	422
二	平稳过程的基本性质	430
§11-3	正态马尔可夫平稳过程	434
一	正态过程	434
二	正态平稳过程	443
三	正态马尔可夫平稳过程	446
	习题	450
第十二章	平稳过程的谱分析	454
§12-1	平稳过程的协方差函数的谱分解	455
一	协方差函数的谱分解定理	455
二	谱密度的几个性质	463
三	几种常见的谱密度函数	464
§12-2	平稳过程的谱分解	470

§12-3 平稳相关过程与互谱函数.....	474
一 平稳相关过程的概念.....	474
二 互协方差函数的一些性质.....	475
三 平稳相关过程的互协方差函数的谱分解.....	477
习题.....	479
第十三章 平稳过程的线性变换	481
§13-1 线性时不变系统.....	482
一 线性时不变系统的概念.....	482
二 频率响应函数与脉冲响应函数.....	485
§13-2 白噪声.....	492
一 离散参数的白噪声.....	493
二 连续参数的白噪声.....	493
§13-3 平稳过程的线性变换.....	499
一 线性时不变系统对随机输入的响应.....	499
二 线性时不变系统的输入、输出为平稳相关的情形	503
三 一些例子.....	505
§13-4 平稳过程在线性系统中的其它问题.....	513
一 线性时不变系统的辨识.....	513
二 均方遍历定理.....	514
三 平稳过程的采样定理.....	521
习题.....	525

第三篇 时间序列分析

第十四章 平稳时间序列的有限参数模型	527
§14-1 平稳时间序列的三种有限参数模型.....	527

§14-2 ARMA(p, q)模型的传递形式和逆转形式	530
一 AMRA(p, q)模型的传递形式及存在条件	530
二 ARMA(p, q)模型的逆转形式及存在条件	535
三 平稳可逆性检验准则——裘莱准则	536
§14-3 ARMA(p, q)序列的二阶特性	540
一 MA(q)序列的自协方差函数及自相关函数	540
二 AR(p)序列的自协方差函数及自相关函数	542
三 ARMA(p, q)序列的自协方差函数及自相关函数	545
四 偏相关函数	548
五 AR(p)、MA(q)、ARMA(p, q)序列的偏相关系数	553
§14-4 ARMA(p, q)序列的谱密度表征条件	555
习题	560
第十五章 ARMA(p, q)序列二阶特性的估计	562
§15-1 自协方差函数、偏相关函数的矩估计及其性质	562
一 自协方差函数的矩估计及其性质	562
二 偏相关函数的矩估计及渐近性质	571
§15-2 功率谱估计及性质	573
一 谱密度的周期图估计	574
二 谱密度的“加窗估计”	580
三 谱估计的实际计算	595
四 连续参数的谱估计	597
习题	601
第十六章 平稳时间序列的模型拟合	604
§16-1 AR(p)模型的参数估计及渐近性质	605
一 AR(p)模型的矩估计(即尤尔-瓦尔克估计)及其渐近性质	605

二	AR(p)模型参数的最小二乘估计	616
§16-2	模型的识别与定阶	619
一	MA(q)模型的识别	620
二	AR(p)模型的识别	620
§16-3	自回归模型AR(p)用于拟合平稳时间序列	624
一	自回归模型的拟合	625
二	自回归模型的定阶	628
三	自回归模型拟合与极大熵谱估计的关系	630
习题		637
第十七章	时间序列的预报和滤波	638
§17-1	平稳最小方差线性估计	638
一	最小方差线性估计	638
二	最小方差线性估计的几何及概率意义	640
§17-2	有限参数模型的预报	641
一	AR(p)序列的预报	645
二	MA(q)与ARMA(p, q)序列的预报	648
§17-3	时间序列的适时预报——卡尔曼滤波公式	653
习题		689
第十八章	ARIMA序列,季节性模型以及多维AR(p)模型	690
§18-1	ARIMA序列	690
§18-2	ARIMA序列的预报方法	693
§18-3	季节性模型	695
一	$(1-B^s)\xi(t)$ 为ARMA(p, q)序列时的预报问题	696
二	$(1-B)((1-B^s)\xi(t)$ 为ARMA(p, q)序列时的预报问题	696
§18-4	多维时间序列	699
一	多维AR(p)模型	699
二	多维AR(p)模型系数矩阵的尤尔-瓦尔克矩估计	700

习题	701
附录 I 线性齐次差分方程的解法	702
附录 II 投影定理	705
附录 III 最佳估计准则和最佳估计方法	707
习题答案或提示	723
附表1 正态分布函数	746
附表2 χ^2 -分布	747
附表3 t -分布	749
附表4 F -分布	750
附表5 二项分布	756
附表6 普阿松分布	758
附表7 正交表	760

第一篇 数理统计

第一章 概率论补充知识

§1-1 概率空间

在工程数学的概率论部分，已经对古典概型和几何概型这两种特殊类型定义了概率。在古典概型中，要求试验的可能结果是有限个且具有等可能性；对于几何概型，虽然试验的可能结果是无穷多个，但仍要求具有某种等可能性。然而实际问题中还有大量的随机试验，其结果并不属于这两种类型，因此，很有必要对一般的随机现象给出一个明确的概率定义。这个问题，经过人们长期探讨，并且随着测度论和积分理论的日益发展，终于1933年由苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)综合前人的成果，给出了概率论的公理化结构，明确了事件、概率等基本概念，从而使概率论成为一个严谨的数学分支。在这个基础上，概率论在近几十年来取得了迅速的发展。

一 事件域

给出概率定义之前，先要明确事件的概念。我们知道，事件是样本空间 Ω 的一个子集，但一般并不把 Ω 的一切子集都作为事件，例如在几何概率中就不能把不可度量的子集作为事件。事实上只要把具有某些限制而又相当广泛的一类 Ω 的子集作为事件就够了。为此下面介绍事件域的概念。

定义1-1 设 Ω 是样本空间， \mathcal{F} 是由 Ω 的一些子集构成的集类，如果满足以下条件：

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} \in \mathcal{F}$;

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}, n=1, 2, \dots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

则称 \mathcal{F} 为**事件域**, \mathcal{F} 中的元素称为**事件**, Ω 称为**必然事件**.

一般对满足上述条件的集类称为 σ -域, 所以事件域是一个 σ -域 它具有下列性质:

(1) 空集 $\phi \in \mathcal{F}$;

这是因为 $\phi = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$, 我们称事件 ϕ 为**不可能事件**.

(2) 若 $A_i \in \mathcal{F}, i=1, 2, \dots$, 则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$;

事实上, 由德·莫根 (De Morgan) 定理知

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathcal{F}$$

(3) 若 $A_i \in \mathcal{F}, i=1, 2, \dots$, 则

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F};$$

这只要在定义1-1的(3)中取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \phi$ 即得 $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

\mathcal{F} , 在性质(2)中取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \Omega$ 即得 $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

(4) 若 $A, B \in \mathcal{F}$, 则 $A - B \in \mathcal{F}$.

这是因为 $A - B = A \cap \overline{B}$, 再由性质(3)即得 $A - B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{F}$.

由 σ -域的定义, 容易验证下面诸例中的集类 \mathcal{F} 都是 σ -域.

例1-1 $\mathcal{F} = \{\phi, \Omega\}$

例1-2 $\mathcal{F} = \{\phi, A, \bar{A}, \Omega\}$

例1-3 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, \mathcal{F} 是由 Ω 的一切子集构成的集类.

二 概率

古典概型和几何概型虽然是两种特殊的类型, 但它们事件的概率都具有一些共同的性质. 在古典概型中, 事件的概率具有性质:

(1) 对任意事件 A 有 $0 \leq P(A) \leq 1$; (2) $P(\Omega) = 1$; (3) 设事件 $A_1,$

$A_2, \dots, A_m (m \leq n)$ 互不相容, 则 $P(\bigcup_{i=1}^m A_i) = \sum_{i=1}^m P(A_i)$; 在几何概型

中, 事件的概率除具有上述前两个性质外, 还对可列个互不相容的事

件 A_1, A_2, \dots 有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. 概率的公理化定义, 正是用

这些性质来作为一般的概率定义.

定义1-2 设 Ω 是给定的样本空间, \mathcal{F} 是 Ω 中的一个事件域, $P(A) (A \in \mathcal{F})$ 是定义在 \mathcal{F} 上的一个实值集函数, 如果它满足条件:

(1) 对一切 $A \in \mathcal{F}$ 有 $P(A) \geq 0$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) 若 $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, \dots$, 且 $A_i A_j = \phi, i \neq j$, 则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (\text{这个性质称为可列可加性})$$

就称 $P(A)$ 为事件 A 的概率 (简称为概率)