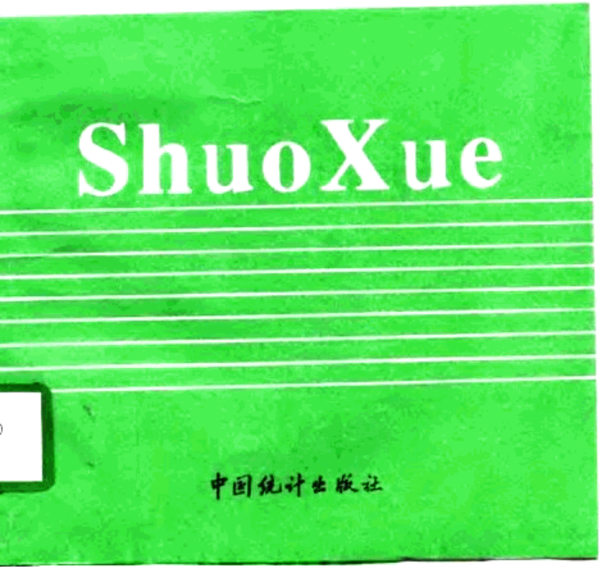
经济管理数学基础方法应用

刘玉忠　编　著



目　　录

第一章　实数及其运算

实数的概念是数学中最重要的概念之一。学习数学，首先要求我们正确地掌握实数的概念和一些重要性质，并且能够熟练进行实数的运算。

第一节　实　数

现今通用的进位制是十进制。因为它使用了十个基本符号：1，2，3，4，5，6，7，8，9，0 而得名。这些符号叫做数字。但是也有使用其它的进位制，例如二进制和六十进制等等。

凡是由上述十个数字组成的数是自然数和零。数由最基本的自然数和零逐步扩充到实数，其过程如图 1-1 所示。

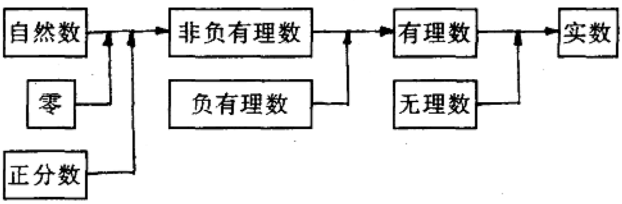


图 1-1　数的扩充

自然数起源于计数，引入零是为表示没有东西。引入分数是为了表示部分，引入负数是为了表示相反意义的量。一切有理数都可以表示成分数$\frac{p}{q}$（p 和 q 是整数）的形式，也可以表示成小

数或者循环小数的形式。而现实中存在的无限不循环小数就称为无理数。

在一条直线上取定一点 0 称为原点，取定一个方向作为正方向，再取一个长度单位表示 1。这样就得到了一根数轴。如图 1−2 所示。

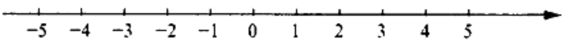


图 1−2　数轴

每一个实数都可以在数轴上找到一个而且只有一个表示它的点。反之，数轴上的每一点也必定表示一个而且只有一个实数。在零的正方向一侧的点表示正数，而另一侧的点表示负数。

一个数 a 离开原点的距离，称为 a 的绝对值，记为$|a|$。由于距离是不考虑符号的量，因此正数的绝对值就是它本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零，即

$$|a|=\begin{cases} a & \text{当}a>0 \\ 0 & \text{当}a=0 \\ -a & \text{当}a<0 \end{cases}$$

实数系中的每一个数，不论这个数是有理数，还是无理数，都是唯一的。因为每一个数是唯一的，彼此之间就有大小之分。表示这种大小之分的数学式子叫做不等式。不等式中常用的符号有:

$>$表示“大于”，$\geqslant$表示“大于或等于”，$<$表示“小于”，$\leqslant$表示“小于或等于”，$\neq$表示“不等于”。

两个任意实数 a 和 b，下列三种情况中必有且只有一种成立:

$a>b$（这时$a-b$是正数）

$a=b$（这时$a-b$等于零）

$a<b$（这时$a-b$是负数）

按照这一性质，如果 b 为零，则对于每一个实数 a，下列三种情况必有且只有一种成立：

$$a>0 \text{（说明 } a \text{ 是正数）}$$
$$a=0 \text{（说明 } a \text{ 是零）}$$
$$a<0 \text{（说明 } a \text{ 是负数）}$$

不等式有下列性质：

1. $a>b \Leftrightarrow b<a$（对称性）
2. $a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$（传递性）
3. $a>b \Rightarrow a+c>b+c$
4. $a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$
5. $a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$

   $a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$
6. $a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$

符号“$\Leftrightarrow$”表示“从左端可以推出右端，并且从右端可以推出左端”，读作“等价于”。

符号“$\Rightarrow$”表示由左端的条件可以推出右端的结论。

第二节　基本运算

实数的运算以加与乘为基础，其运算方法为：

1. 加法：同号两数相加，取相同的符号并把绝对值相加。异号两数相加，取绝对值大的数的符号，并把绝对值相减（大减小）。

2. 乘法：同号相乘取正号，异号相乘取负号，并把绝对值相乘。

3. 减法：减去一个数等于加上这个数的相反数。

$$a-b=a+(-b)$$

4. 除法：除以一个数等于乘以这个数的倒数，即

$$a \div b = a \times \frac{1}{b}$$

5. 乘方：a 的n 次方（n 是正整数）等于n个 a 连乘，即

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}}$$

6. 开方：a 开n 次方（n是正整数）就是求数x使

$$x^n = a$$

实数的运算性质有：

1. 加法交换律：$a + b = b + a$
2. 加法结合律：$(a + b) + c = a + (b + c)$
3. 乘法交换律：$ab = ba$
4. 乘法结合律：$(ab)c = a(bc)$
5. 乘法分配律：$a(b + c) = ab + ac$
6. 减法性质：$a - (b + c) = a - b - c$
7. 除法性质：$(a + b) \div c = a \div c + b \div c$
8. 零在运算中的作用：

$$a + 0 = a,\ a - 0 = a,\ a \times 0 = 0$$

若$ab = 0$，则 a 和 b 中必有一个为零，或者两者均为零；

$\frac{a}{0}$无意义，零不能做除数；

9. 1 在运算中的作用：

$$a \times 1 = a$$

若$ab = 1$，则 a 是 b 的倒数；反之，b 也是 a 的倒数。

实数的运算顺序：

在同一个式子里，先乘方、开方，然后乘、除，最后加、减。同一种运算先左后右。有括号时，由最里层的括号算起，逐层去掉括号。

第三节　比与比例

在管理和经济工作中，我们要经常讨论两个数或两个量的关系，把比较两个数或两个同类量的倍数关系我们称为这两个数或两个同类量的比。

若 a 和 b 分别表示两个数或两个同类量，那么 a 与 b 的比记作 $a:b$，a 称为比的前项，b 称为比的后项（比的后项 $b\neq0$），a 比 b 的结果称为这个比的比值，符号"："称为比号。比号"："实际上等价于除法的除号"÷"，也等价于分数的分数线"—"。所以 $a:b$ 可以写成$\frac{a}{b}$，也可写成 $a\div b$。对于比的前项和后项，同乘以或除以一个不等零的数或代数式时，比值不变。比的这一性质可写成下面的形式：

$$a:b=ma:mb\ (m\neq 0)$$

$$a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}\ (m\neq 0)$$

我们把以 100 作为后项的比称为百分比，百分比的分数形式就是百分数，即百分数是以 100 为分母的分数，所以，百分比又称为百分数，通常采用符号%，例如百分之十写成 10%。

小数、分数与百分数的互化：

1. 小数化成百分数。把小数化成百分数，就是把小数点向右移动两位，加上百分号；百分数化成小数，是把百分号去掉、同时小数点向左移动两位。例如：

$$0.65=65\%,\ 0.125=12.5\%$$

$$0.5\%=0.005,\ 75.5\%=0.755$$

2. 分数化成百分数。把分数化成百分数，要先把分数化成小数，然后再化成百分数；百分数化分数时，只需写成分数形式

再进行约分，使其成为最简分数。若不能约分，那么百分数写成的分数就是最简分数。例如：

$$\frac{3}{5}=0.6=60\%, \quad \frac{5}{2}=2.5=250\%$$

$$5\%=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}, \quad 7\%=\frac{7}{100}$$

表示两个比相等的式子叫做比例。组成比例的四个量称为比例的项。例如$a:b=c:d$中的四个量 a、b，c，d 就是比例的项，其中两端的两项叫外项，中间的两项叫内项。即

$$a:b=c:d$$

内项

外项

如果$a:b=b:d$，那么 b 叫做 a 和 d 的比例中项。

当 a，b，c，d 都不等于零时，比例$a:b=c:d$有下列性质：

1. 比例基本性质。在比例中，两个外项的积等于两个内项的积。即若$a:b=c:d$，则$ad=bc$。

2. 反比定理。比例的前、后项可以同时交换。即由 $a:b=c:d$，可得$b:a=d:c$。

这是因为由 $a:b=c:d$ 可得

$$ad=bc$$

即

$$bc=ad$$

两边同除以 ac，得 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$，即

$$b:a=d:c$$

3. 更比定理。比例的两内项（或两外项）可以互换。即由

$$a:b=c:d$$

可得

$$d:b=c:a$$

或者

$$a:c=b:d$$

4. 合比定理。比例中，两个比的前项分别加上后项，后项不变，比例仍成立。即由 $a:b=c:d$，可得 $(a+b):b=(c+d):d$，或者写为$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

这是因为$a:b=c:d$，即$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$等式两边都加 1，得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

所以 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

5. 分比定理。比例中，两个比的前项分别减去后项，后项不变，比例仍成立。即由

$a:b=c:d$，可得$(a-b):b=(c-d):d$，或者写为

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

6. 合分比定理。比例的前后项的和（差）与差（和）之比，仍成比例。即由

$$a:b=c:d$$

可得 $$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$$

或者 $$(a-b):(a+b)=(c-d):(c+d)$$

也可写成 $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

或者 $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$$

这个性质由性质 4、5 即可得证。

【例 1】解比例：$1:(a-b)=\frac{1}{b-a}:x$（a，b 为常数）。

解:
$$1:(a-b)=\frac{1}{b-a}:x$$
$$\therefore \quad x=\frac{a-b}{b-a}$$
$$x=-1$$

【例 2】某一家庭每月收入 840 元，这些钱用于伙食和其它费用的比是 3∶2，在其它费用中包括每月的储蓄费。如果其它费用中储蓄与另外支出费之比为 1∶2，那么这个家庭每月储蓄多少元?

解：因为 3+2=5，伙食费占 5 份中的 3 份，即

$$840\times\frac{3}{5}=504\text{（元）}$$

其它费用占 5 份中的 2 份，即

$$840\times\frac{2}{5}=336\text{（元）}$$

其它费用中参加储蓄的占 3 份中的 1 份，即

$$336\times\frac{1}{3}=112\text{（元）}$$

因此，这个家庭每月储 112 元。

当一个量随着另一个量的变化而变化时，我们可以选用适当的比例常数，用此来表示这种量变关系。两种量的这种互相依赖的量变关系就是正比例、反比例。

两个相关联的量，如果其中的一个量扩大（或缩小）若干倍，另一个量也相应扩大（或缩小）同样的倍数，即无论这两个量如何变动，其相对应的两个数的比值一定，这两个量就叫做成正比例的量，它们的关系叫做正比例关系。若 y 与 x 成正比例，记作 $y\propto x$，读作 y 与 x 成正比。也可以用等式表示为 $y=kx$（k 是不等于零的常量）。

正比例有如下性质:

如果两个量成正比例，那么，一个量所取的任意两个数值之比，等于另一个量中相对应的两个数值之比。

这是因为，若$y=kx$，当k是常量时，y与x成正比，则

$$y_1=kx_1,\ y_2=kx_2$$

两式相除得： $$\frac{y_1}{y_2}=\frac{kx_1}{kx_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

即 $$y_1:y_2=x_1:x_2$$

【例 3】某国有企业上半年生产 A 产品 2250 吨，生产 B 产品 1750 吨。下半年计划生产 A、B 两种产品共 5000 吨。试按上半年 A 产品与 B 产品的比率，订出下半年 A、B 两种产品的计划产量。

解：设下半年 A、B 两种产品的计划产量分别为x、y吨。则当 A、B 两种产品比率不变时，有$\frac{2250}{1750}=\frac{x}{y}$。根据合比定理可得：

$$\frac{2250+1750}{1750}=\frac{x+y}{y}$$
$$\frac{1750+2250}{2250}=\frac{y+x}{x}$$

即各种产品的产量与总产量成正比例关系。

因为上半年总产量为 2250+1750＝4000 吨，下半年总产量为$x+y=5000$吨，所以，

$$\frac{2250}{x}=\frac{4000}{5000}$$

解比例得 $x=2812.5$（吨）

则 $y=5000-2812.5=2187.5$（吨）

因此，下半年 A、B 两种产品的计划产量分别为 2812.5 吨和 2187.5 吨。

两个相关联的量，如果其中的一个量扩大（或缩小）若干

倍，另一个量反而缩小（或扩大）同样的倍数，即无论这两个量如何变动，其相对应的两个数的积一定，这两个量就叫做成反比例的量，它们的关系叫做反比例关系。若 y 与 x 成反比例，记作 $y\propto\frac{1}{x}$。读作 y 与 x 成反比例，或者用等式 $y=\frac{k}{x}$（k 是不等于零的常量）表示。

反比例有如下性质：

如果两个量成反比例，那么一个量所取的任意两个数值之比，等于另一个量中相对应的两个数值的比的反比。

这是因为，若 $y=\frac{k}{x}$，当 k 是常量时，y 与 x 成反比，则

$$y_1=\frac{k}{x_1}，y_2=\frac{k}{x_2}$$

两式相除得：
$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\frac{k}{x_1}}{\frac{k}{x_2}}=\frac{x_2}{x_1}$$

即
$$y_1:y_2=x_2:x_1$$

【例 4】某公司运一批货物用 3 辆货车，需 4 小时可以运完。如果用 5 辆货车，需几小时运完这批货物？

解：设 5 辆车运完这批货物需 x 小时，由于货车数和所需时间两种量成反比，所以

$$3:5=x:4$$

解比例得
$$x=2.4$$

即用 5 辆车运这批货物 2.4 小时可以运完。

第四节　近似计算

在管理和经济工作中，我们经常遇到对事物的度量和计算问

题。在解决这些问题中，有时需要并且可能用数来表示量的准确值，这时我们用的是准确数，但多数情况是不需要或者不可能用数来表示量的准确的值，而用与准确数相差在某一指定数值范围内的近似数。例如编制各项计划、公布经济指标等，只要求数量简明，取近似数即可。

用近似数表示一个量的值，总会有误差。大于准确数的近似数称为过剩近似值，小于准确数的近似数称为不足近似值。在实际工作中，根据不同的条件和目的，近似数有不同的截取方法。常用的有:

1. 去尾法（只舍不入的方法）。把一个数保留到某一指定的数位，在这个指定数位以后的数位上的数字完全舍去，这种截取近似数的方法称为去尾法。这样所得到的近似数是原数的不足近似值。

2. 收尾法（只入不舍法）。把一个数保留到某一指定数位，在指定数位后的数位上的数字完全舍去，同时在保留的最后一位数字上加 1（只要所舍的数字不是零），这种截取近似数的方法称为收尾法（也叫进一法）。这样所得到的近似数是原数的过剩近似值。

3. 四舍五入法。把一个数保留到某一指定的数位，以后数位上的数字全部舍去，如果舍去的第一位数字是等于或大于 5，则在保留的最后一位数字上加 1；如果舍去的第一位数字是小于 5，则保留的最后一位数字不变。这种截取近似数的方法称为四舍五入法。

我们把一个近似数和它的准确数的差的绝对值，叫做这个近似数的绝对误差。若用 a 表示近似数，A 表示它的准确数，D 表示它的绝对误差，那么 $D=|a-A|$。

一个近似数的绝对误差对于它的准确数的百分比，叫做这个近似数的相对误差。若用 a 表示近似数，A 表示它的准确数，K

表示近似数的相对误差，那么

$$K=\frac{|a-A|}{A}\times 100\%$$

或者

$$K=\frac{D}{A}\times 100\%$$

一个近似数的相对误差越小，它的精确度越高。

从近似数的截取方法可以知道，用不同方法截取得到的近似数所产生的绝对误差可分为两类:

一是用四舍五入法截取的近似数，它的绝对误差不超过其最末一个数位上的半个单位;

二是用去尾法或收尾法截取的近似数，它的绝对误差不超过其最末一个数位上的一个单位。

为了区别这两种情况，通常把近似数里所含的数字分为有效数字和可靠数字。

1. 有效数字。如果一个近似数的绝对误差不超过它最末一位的半个单位，那么这个近似数从左边第一个不是零的数字起到末位数字止，所有的数字都叫做这个近似数的有效数字。例如，由四舍五入得到的近似数 0.004058，就有四个有效数字 4、0、5、8。

2. 可靠数字。如果一个近似数的绝对误差不超过它最末一位的一个单位，那么这个近似数从左边第一个不是零的数字起到末位数字止，所有的数字都叫做这个近似数的可靠数字。

例如，用最小刻度是 1 厘米的直尺，量得机器零件的长度是 1.04 米，因为它的绝对误差不超过 0.01 米，所以近似数 1.04 有三个可靠数字 1、0、4。

一个近似数的有效数字也都是它的可靠数字，但是一个近似数的可靠数字却不一定是有效数字。

管理和经济的实际工作中，必然会遇到各种数量和各种不同

数字的许多数，我们要学会区别这些数的准确度和精确度。

一个数的准确度是指这个数所含有效数字的个数。

一个数的精确度是指这个数最后一个可靠数字相对于小数点的位置。

例如，1.017 和 101.7 这两个数都有四个有效数字，所以这两个数的准确度是四个有效数字，也称为准确到四位数字。另一方面，1.017 有三位小数，所以它的精确度是三位小数，也称为精确到三位小数。而 101.7 只精确到一位小数。

准确度与精确度是不同的概念，准确度与小数点的位置无关，只与有效数字有关，精确度则由小数点的位置所决定。

在近似数的计算中，由于近似数之间的精确度不同，这就需要在近似数的计算中遵循一定的法则。近似数计算有以下法则:

1. 近似数的加减法法则。

近似数相加减时，精确度最低的一个已知数精确到哪一位，和或者差也只能精确到这一位。因此，在已知数中超过这个数位的数字四舍五入到这个数位的下一位，然后进行计算，并把计算结果所得的数的末一位四舍五入。

【例 5】求近似数 4.567、32.9、7.83、14 的和。

解:

$$
\begin{aligned}
& 4.567+32.9+7.83+14 \\
\approx\ & 4.6+32.9+7.8+14 \\
=\ & 59.3 \\
\approx\ & 59
\end{aligned}
$$

2. 近似数乘除法法则。

近似数相乘除，有效数字最少的一个已知数有多少个有效数字，积或商也有同样多个有效数字。因此，在已知数中有效数字的个数多的，四舍五入到只比结果中需要的个数多一个。然后进行计算（除法要比结果多算出一位），并且把积或商四舍五入到应有的有效数字的个数。