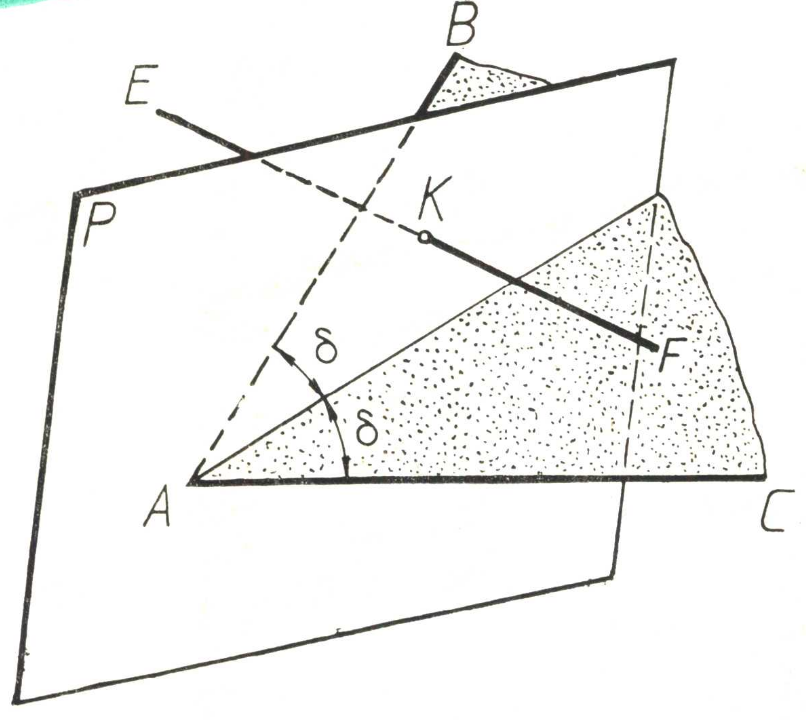
画法几何解题方法指导

高　镇（主编）　杨自力　虞洪述　徐伯康

西安交通大学出版社



画法几何解题方法指导

高　镇(主编)　杨自力　虞洪述　徐伯康

西安交通大学出版社

1986年7月

内 容 提 要

本书对画法几何的主要理论和作图方法作了简明扼要的叙述，用较多篇幅分析例题，使读者在初步理解基本理论的基础上，逐步掌握解题的分析思考方法，培养空间想象能力，并着重指出初学者在解题过程中容易出现的错误和应该注意的问题，为初学者作解题方法的指导，以提高解题能力。

本书可供电大、职大、函大和自学者使用，也可供普通高等工科院校的师生参考。

画法几何解题方法指导

高 镇（主编） 杨自力 虞洪述 徐伯康

责任编辑 房立民 贺晓鸿

*

西安交通大学出版社出版
（西安市咸宁路28号）
西安交通大学出版社印刷厂印装
陕西省新华书店发行 各地新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 12.25 字数 300千字
1986年7月第一版 1987年2月第二次印刷
印数10001－20000
统一书号：13340·072 定价：2.10元

前　言

画法几何是研究图示和图解空间几何元素及其相互关系的一门学科。对工程技术人员来说，熟悉画法几何的基本理论并掌握解题的分析方法和作图技能，不仅为学习工程制图奠定理论基础，而且也为从事生产和技术工作提供一种有力的工具。

画法几何课程具有很强的实践性。在学习过程中，必须通过较多的练习才能掌握其基本理论和提高解题能力。因此，掌握正确的解题方法对学好画法几何是很必要的。对初学者来说，理解本课程的基本理论和作图规律，一般不会有多大困难，但运用这些理论和规律进行解题，却往往感到棘手，特别是电视大学、函授大学以及自学的学员，由于师资、设备等教学条件的限制，困难就更突出。我们编写本书，就是试图在解题方法上为初学者作一些指导，以提高解题能力。

本书分十章，每章对有关基本概念、基本理论和基本作图方法作扼要归纳。在此基础上，用较多的篇幅，通过典型例题，介绍解题的分析思考方法和作图步骤，并指出解题时容易出现的错误和应该注意的问题。

每章还提供一些思考题，以培养独立分析和解题的能力。思考题有解答，可对照检查。书末附有中央广播电视大学理工科机械类及非机类一九八四级第一学期《画法几何及工程制图》试题，供参考。

本书主要供电大、职大、函大和自学的学员使用，也可供普通高等工科学校的师生参考。

本书由高镇主编。参加编写的有高镇（第三、六、八、九章）、杨自力（第四、五章）、虞洪述（第七、十章）和徐伯康（第一、二章）。

由于编者水平有限，对于电大、函授等教学经验也不足，书中定有不少缺点和错误，请读者批评指正。

本书承中央广播电视大学许锡祺、洪钧两同志审阅，特此致谢。

编　者

1986年6月于西安交通大学

目　　录

第一章　点

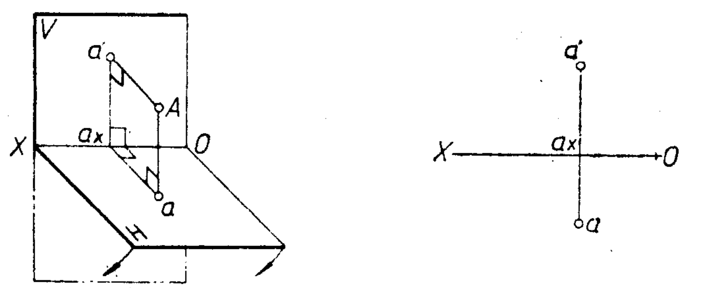
一、目 的 要 求

1. 熟悉建立两投影面体系和三投影面体系的有关规定，掌握点的投影规律。
2. 掌握第一分角中各种位置点的投影特性。
3. 掌握由给定的空间点绘制其投影图和由点的两投影求第三投影的方法。
4. 掌握由点的投影判断其空间位置（包括两点的相对位置）的方法。
5. 能根据点的投影图画出轴测图。

二、内 容 提 要

1. 点在两投影面体系中的投影

(1) 点的两面投影图



(a)　　　　(b)

图 1-1　点的两面投影

图 1-1 (*a*) 示出A点在两个互相垂直的投影面上的投影情况。A点的水平投影和正面投影分别用a和a'表示。互相垂直的两投影面按图中箭头所示方向展开，即得A点的两面投影图，如图 1-1 (*b*)所示。

(2) 点的两面投影规律

(*a*) 点的两个投影的连线垂直于投影轴，如图中 $aa' \perp OX$。

(*b*) 点的水平投影到OX轴的距离等于该点到V面的距离；点的正面投影到OX轴的距离等于该点到H面的距离，如图中：$aa_x = Aa'$，$a'a_x = Aa$。

(3) 由点的投影图想象该点的空间位置

设想将图 1-1 (*b*)沿OX轴折成两个互相垂直的平面，并由a、a'引各自的投射线，所得交点即为A点的空间位置。

(4) 特殊位置点的投影特性(图1-2)

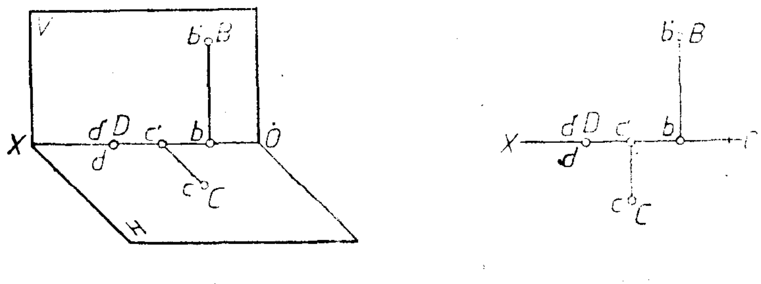


图 1-2 特殊位置点的两面投影

投影面内的点，其一投影重合于该点本身，而另一投影在 OX 轴上。投影轴上的点，其两投影及该点本身都在 OX 轴上，且重合为一点。

2. 点在三投影面体系中的投影

(1) 点的三面投影图

图 1-3(a) 示出 A 点在三个互相垂直的投影面上的投影情况。A 点在 W 面上的投影 a''，称为 A 点的侧面投影。三个互相垂直的投影面按图中箭头所示方向展开，即得 A 点的三面投影图，如图 1-3 (b)所示。图中投影轴 OY 分置两处：随 H 面旋转后在 OY_H 位置；随 W 面旋转后在 OY_W 位置。

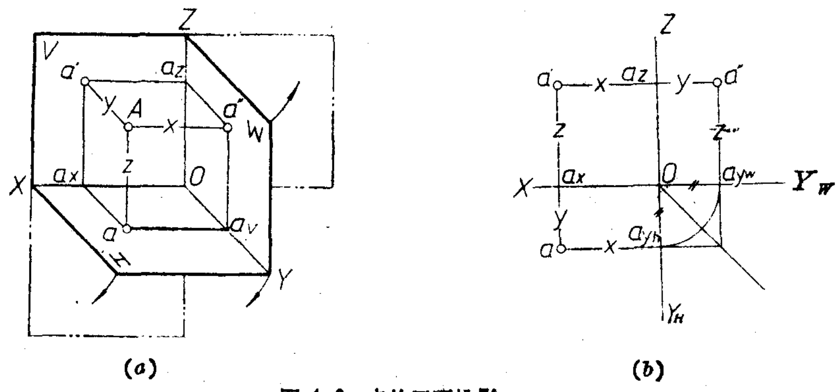


图 1-3 点的三面投影

(2) 点的三面投影规律

(a) 点的正面投影与水平投影的连线垂直于 OX 轴，即 $a'a \perp OX$；点的正面投影与侧面投影的连线垂直于 OZ 轴，即 $a'a'' \perp OZ$。

(b) 点的水平投影到 OX 轴的距离等于侧面投影到 OZ 轴的距离，即 $aa_x = a''a_z$。

(3) 点的坐标与投影的关系

把三投影面体系当作直角坐标系，投影轴 OX、OY、OZ 当作坐标轴，三轴交点 O 当作坐标原点，则空间一点 A 的位置可用 $A(x、y、z)$ 的形式表示(参阅图 1-3 (d))。由其投影图(图 1-3 (b))可知：A 点的水平投影 a 由 A 点的 x 、y 坐标决定；正面投影 a' 由 A 点的 x 、z 坐标决定；侧面投影 a'' 由 A 点的 y、z 坐标决定。

3. 两点的相对位置

如图 1-4 (*a*)，A点对B点的相对位置决定于A点对B点的相对坐标：$\triangle x = x_A - x_B$，$\triangle y = y_A - y_B$，$\triangle z = z_A - z_B$。相对坐标有正、负。在判别两点的相对位置时，若相对坐标为正值，则被比较的点在基准点的左方、前方、上方；若为负值，则反之。由图可见，A点（被比较点）在B点（基准点）的右、后、上方。

在由给出两点的相对坐标求作它们的投影图时，可省略投影轴，而直接按一点对另一点的相对坐标作出，如图 1-4 (*b*)所示。

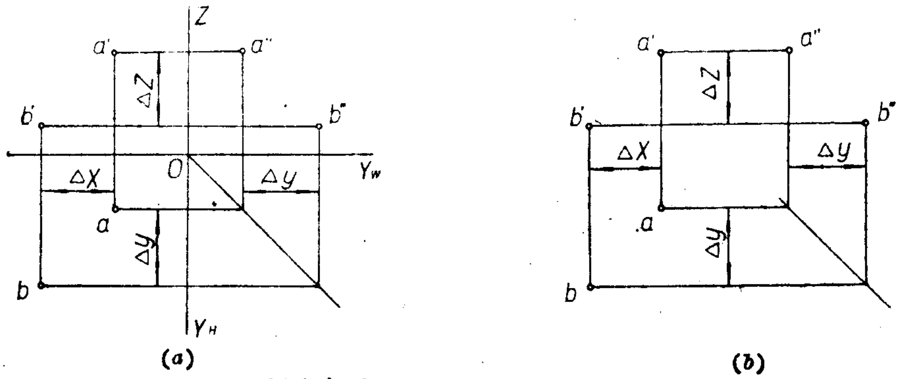


图 1-4 点的相对坐标和无轴投影图

三、题目类型及解题方法示例

点的题目有下列两种基本类型：

1. 已知点的空间位置（给出点的坐标或轴测图），求作它的投影图。

2. 由点的两投影求作第三投影，并判断该点的空间位置或与另一点的相对位置（要求写出点的坐标或绘制轴测图）。

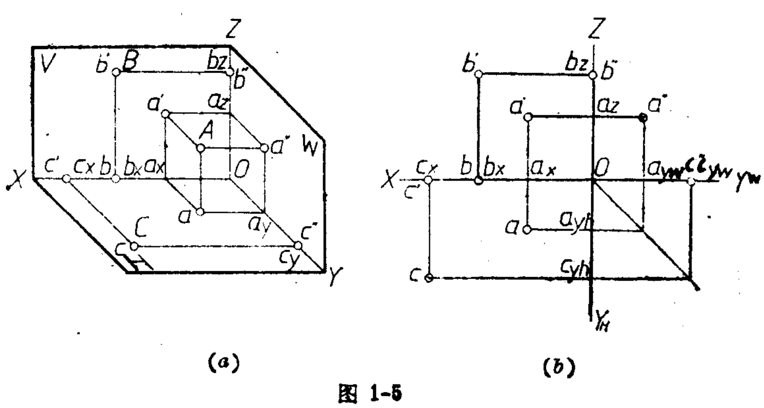
以上两类题目都是实行空间与平面图形之间的相互转化。

解题的一般方法：

1. 分析已知条件，弄清点的空间位置。

2、根据点的投影与坐标的关系和点的投影规律按题目要求求解。

[**例 1**] 由轴测图（图 1-5 (*a*)）画出A、B、C三点的三面投影图，并从图中量出各点的坐标填写在指定的括弧内。



A(9, 7, 9)

B(15, 0, 14)

C(22, 13, 0)

图 1-5

解：1．分析

由图 1-5 (a)可知：A点对W、V、H面的距离分别为 Aa''、Aa' 和Aa。B点在V面内，其对W、H面的距离分别为 Bb'' 和 Bb。C点在H面内，其对W、V面的距离分别为Cc''和Cc'。由此可从图上直接量得各点的坐标（由于各点处于第一分角中，坐标都为正值）如下：A(9，7，9)；B(15，0，14)；C(22，13，0)。各空间点的位置既已确定，便可根据点的投影与坐标的关系和点的投影规律绘制它们的投影图。

2．作图（图 1-5 (b)）。

(1) 画出投影轴，并自原点O在OX轴上向左分别量取$x_A=9$、$x_B=15$、$x_C=22$得a_x、b_x和c_x诸点。

(2) 过a_x作OX轴的垂线，自a_x沿垂线向下量取$y_A=7$得a，向上量取$z_A=9$得a'，在由a'作OZ轴的垂线上按$a_z a''=aa_x$得a''，则a、a'、a''即为A点的三面投影。自b_x沿垂线向上量取$z_B=14$得b'，在OX轴上的b_x处得b、OZ轴上的b_z处得b''，则b、b'、b''即为B点的三面投影。自C_x沿垂线向下量取$y_c=13$得c，在OX轴上的c_x处得c'，在OY_W轴上按$oc''=cc_x$得c''，则c、c'、c''即为C点的三面投影。

3．讨论

从解本题过程中可知，一般位置点A的投影a、a'、和a''，与相应的投影轴分别有一定的距离，并根据空间三个投影面展开到一个平面上的规定，投影a在OX轴的下方、a'在OX轴的上方、a''在OZ轴的右方。B点和C点分别处于V面和H面内，是属于特殊位置点，按投影面内点的投影特性，点的一个投影与该点本身重合，而另二个投影则分别位于相应的投影轴上。其中在作C点的侧面投影c''时，应特别注意：由于c''是在W面上，故c''随W面绕OZ轴向右旋转与V面重合后位于OY_W处，而不是在OY_H处。由此可见，深刻理解并熟记点的投影规律、不同位置点的投影特性，以及由空间转化为平面时投影面旋转的规定，是正确绘制点的三面投影图或由点的投影图判断该点空间位置的基础。

［**例 2**］ 求作A(20，0，0)、B(10,10,15)两点的三面投影图和轴测图，并分析B点对A点的相对位置。

解：1．分析

由给出A、B两点的坐标可知：B点处于第一分角的一般位置，故其投影b在OX轴的下方、b'在OX轴的上方、b''在OZ轴的右方。A点位于OX轴上（因$y_A=0$、$z_A=0$），故a、a'及A点本身都在OX轴上，且重合为一点；而a''重合于原点O。根据A、B两点的坐标，即可在三面体系的轴测图中定出它们在空间的位置。以A为基准点，求出B点对A点的一组坐标差，并按各轴坐标差规定的正负方向与绝对值的大小，即可判定B点对A点的相对位置。

2．作图

(1) 作投影图（图1-6(a)）

(a) 画出投影轴。

(b) 根据A点的坐标，在OX轴上自原点O向左量取$x_A=20$得a_x，a，a'即重合于a_x，a''重合于原点O，即完成A点三面投影的作图。根据B点的坐标，在OX轴上自O点向左量取$x_B=10$得b_x，并自b_x沿OX轴的垂线向下量取$y_B=10$得b，向上量取$z_B=15$得b'；又自b'作OZ轴的垂线，得交点b_z，从b_z向右量取$b_z b''=b_x b$得b''（可利用过原点O

的 45° 辅助线作出），即完成B点三面投影的作图。

（2）画轴测图（图1-6(b)）

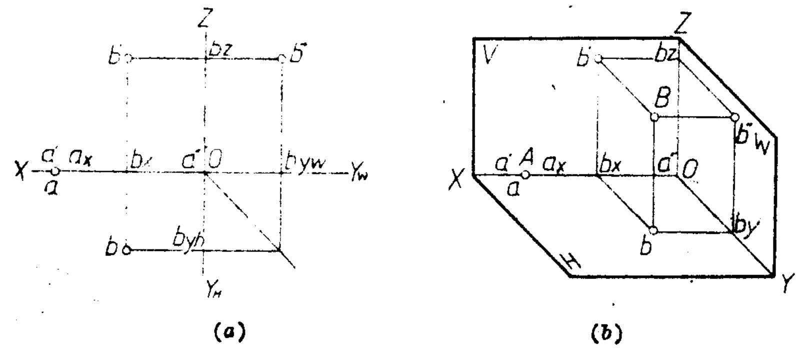


图 1-6

（a）画三投影面体系：先画一矩形作为V面，另画对角之一成 45° 的两个平行四边形分别为H面和W面，并注写各投影轴和各投影面的规定标记。

（b）根据投影图中各点的坐标值，按 1:1 的比例沿三面体系轴测图中的各轴量取相应的坐标，并定出a、a'、a''和b、b'、b''。由于A点在OX轴上，故A与a、a'重合于一点。为定B点的位置，可分别过b、b'、b''作相应投影轴的平行线，所得交点即为空间的B点。

（3）分析B点对A点的相对位置

由图 1-6（a）根据B点对A点的坐标差可知：B点在A点的右方 10 毫米、前方 10 毫米、上方 15 毫米。B点对A点的相对位置也可用它们的相对坐标表示，即

$$\triangle x_{B-A}=x_B-x_A=10-20=-10;$$

$$\triangle y_{B-A}=y_B-y_A=10-0=10;$$

$$\triangle z_{B-A}=z_B-z_A=15-0=15。$$

［例 3］ 已知A点的三面投影及B、C两点的正面投影和侧面投影，试用无轴投影求作B、C两点的水平投影（图 1-7（a））。

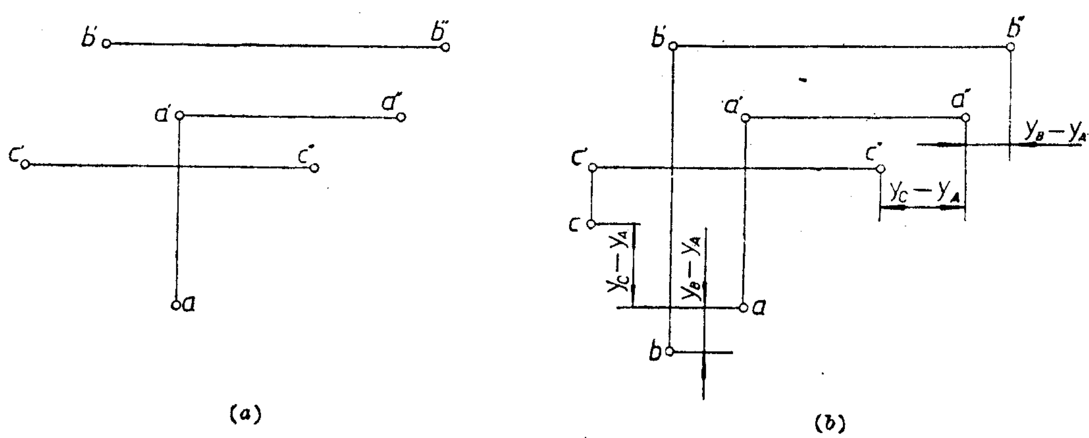


图 1-7

解：1. 分析

知道点的任意两投影即能确定该点的空间位置。根据给出的已知条件，A、B、C三点的空间位置都已确定。因而它们之间的相对位置及其相对坐标也随着确定。本题虽不允许画出投影轴，但A点的三面投影已经给定，故可以它为基准点，并根据空间两点在H和W面上的投影具有y坐标差相等的规律，即可分别求得B、C点的水平投影。

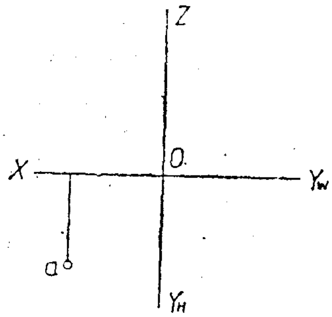
2. 作图（图1-7(b)）

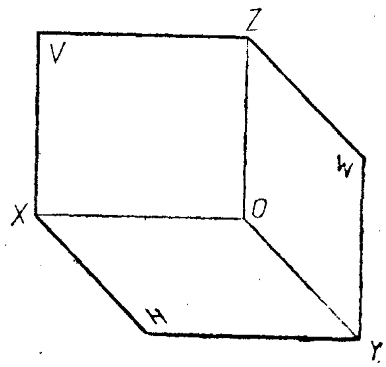
(1) 由a''、b''和a''、c''分别求得B、C点对A点的y坐标差y_{B-A}和y_{C-A}（由侧面投影可判定B点在A点的前方，C点在A点的后方）。

(2) 自b'、c'分别作铅垂线，并在各铅垂线上相对a分别量取y_{B-A}和y_{C-A}而得b和c，即为所求。

四、思 考 题

1-1 已知A点到H面的距离是到V面距离的1.5倍，试求A点的正面投影和侧面投影，并画出其轴测图。



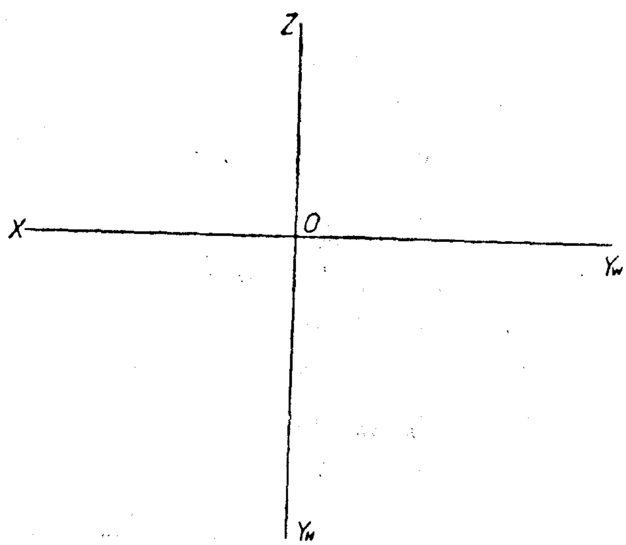


1-2 试作A(10,35,15)、B(20,35,0)、C(30,0,25)三点的三投影，并确定B、C两点对A点的相对坐标。

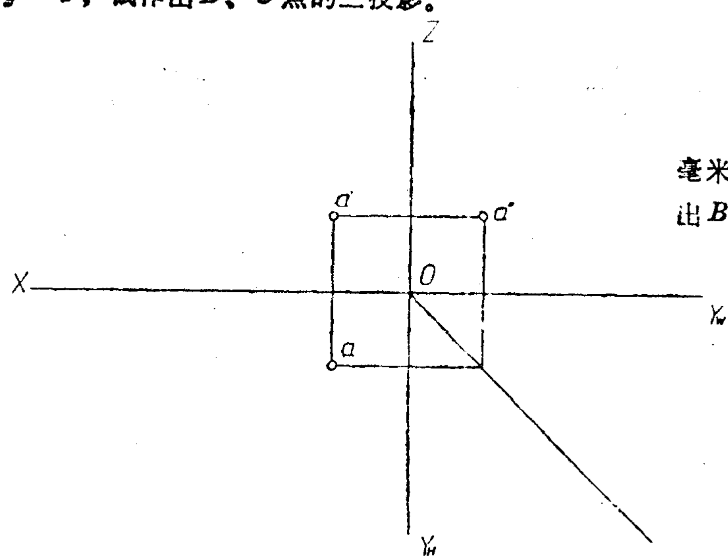
$\triangle x_{B-A}=$ $\triangle x_{C-A}=$

$\triangle y_{B-A}=$ $\triangle y_{C-A}=$

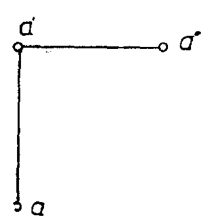
$\triangle z_{B-A}=$ $\triangle z_{C-A}=$



1-3 已知B点在A点的左方35毫米、前方10毫米，比A点高20毫米；又知C点与B点同高，且其坐标$x=y=z$，试作出B、C点的三投影。



1-4 已知B点在A点的左方20毫米、后方10毫米、上方15毫米，试作出B点的三投影(不允许画投影轴)。



第二章　直　线

一、目 的 要 求

1．掌握各种位置直线的投影特性和根据直线的投影判断其空间位置的分析方法。

2．掌握用直角三角形法确定一般位置线段的实长及其对投影面倾角的作图原理和作图方法。

3．掌握直线上点的投影特性和了解直线迹点的概念及其作图方法。

4．掌握空间两直线各种相对位置的投影特性及其作图方法和判别方法。

5．掌握一边平行于投影面的直角的投影特性及其作图方法。

6．掌握重影点的概念及判别可见性的方法。

二、内 容 提 要

1．直线的投影性质（图2-1）

（1）直线的投影一般仍是直线，特殊情况积聚成点。

（2）直线可由两点确定。直线上任意两点同面投影的连线，即为直线在该投影面上的投影。

（3）线段在投影面上的投影长度，等于该线段实长与其对投影面倾角的余弦之积，即如图中 $ab = AB\cos\theta$。

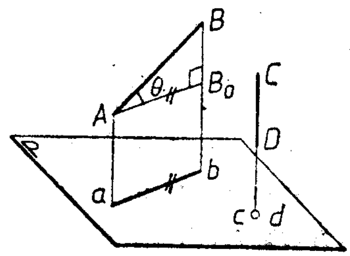
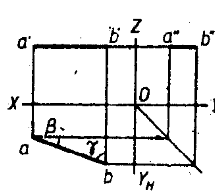
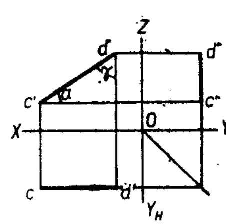
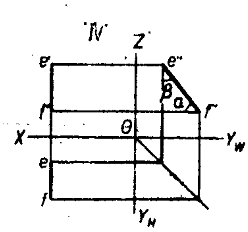


图 2-1　直线的投影

2．各种位置直线的投影特性

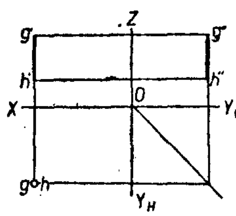
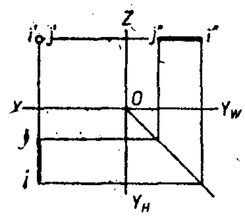
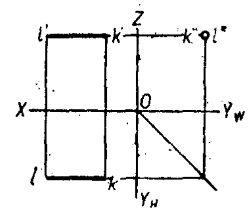
（1）投影面平行线（表2-1）

表 2-1　投影面平行线的投影特性

直线的位置	水平线(//H)	正平线(//V)	侧平线(//W)
投影图			
投影特性	(a) 直线在所平行的投影面上的投影，反映该线段的实长和对其它两个投影面的倾角。 (b) 直线的其它两个投影分别平行于相应的投影轴，且都小于该线段的实长。		

(2) 投影面垂直线(表2-2)

表 2-2 投影面垂直线的投影特性

直线的位置	铅垂线($\perp H$)	正垂线($\perp V$)	侧垂线($\perp W$)
投影图			
投影特性	(a) 直线在所垂直的投影面上的投影积聚成一点。 (b) 直线在其它两个投影面上的投影分别垂直于相应的投影轴，且都反映该线段的实长。		

(3) 一般位置直线(图2-2)

设一般位置直线 AB 对H、V、W三投影面的倾角分别用α、β、γ表示，则其投影特性为：

(a) ab、$a'b'$、$a''b''$ 都与投影轴倾斜，且都小于实长，即 $ab=AB\cos\alpha$，$a'b'=AB\cos\beta$，$a''b''=AB\cos\gamma$。

(b) 各投影与投影轴的夹角都不反映该直线对各投影面的倾角。

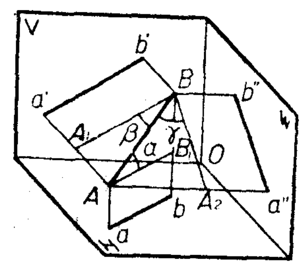


图 2-2 一般位置直线的投影及直角三角形法的空间几何关系

3. 求作一般位置线段实长及其对投影面倾角的直角三角形法

直角三角形法中的直角三角形(图2-2)有线段的实长、某一投影面上的投影长度、两端点到该投影面的距离差(即坐标差)和对该投影面的倾角四部分。由于其中任何两部分的量一经给定，即可作出该直角三角形，从而其它两个量也随着确定。因此，运用直角三角形法不仅可由线段的投影求作该线段的实长及其对投影面的倾角，而且也可根据线段的一个投影和该线段的实长或对投影面的倾角完成线段的另一个投影。

直角三角形法的作图要点是：以线段在某投影面上的投影为一直角边，以线段两端点对该投影面的坐标差为另一直角边，由此构成直角三角形的斜边即为该线段的实长，斜边与线段投影的夹角即为线段对该投影面的倾角。

4. 直线上的点

(1) 直线上点的投影特性：线段上点的投影，必在该线段的同面投影上，且点分割线段之比等于点的投影分割线段的同面投影之比。

(2) 直线上的特殊位置点——迹点的投影特性。

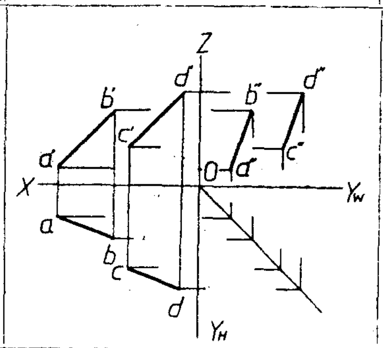
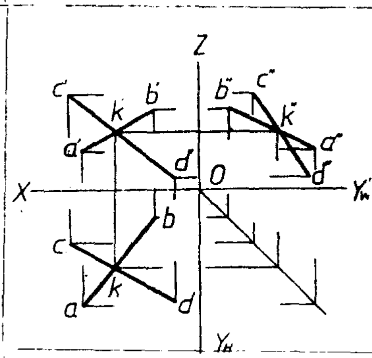
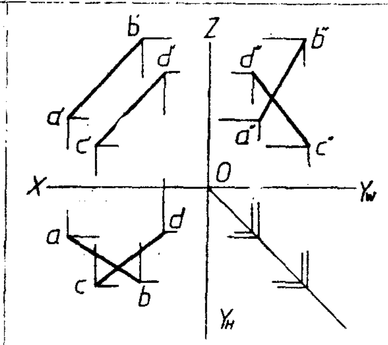
迹点是直线与投影面的交点。迹点的投影特性：

(*a*) 迹点是直线上的点，故迹点的投影必在该直线的同面投影上。

(*b*) 迹点又是投影面内的点，故迹点的一个投影与迹点本身重合，另外两个投影则分别在相应的投影轴上。

5. 两直线的相对位置及其投影特性（表2-3）

表 2-3 两直线的相对位置及其投影特性

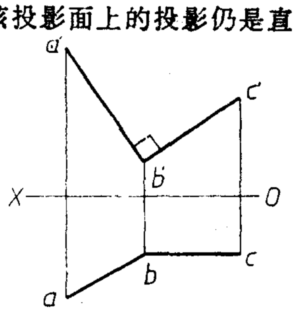
两直线的相对位置	两直线平行	两直线相交	两直线交叉
投影图			
投影特性	若两直线平行，则它们的同面投影也互相平行。	若两直线相交，则它们的同面投影也必相交，且投影交点符合点的投影规律。	两直线交叉，它们的三组同面投影不可能都平行；若三组同面投影都相交，其交点不可能符合点的投影规律。

注意点：(1) 根据投影图判别两直线的相对位置时，若两直线都处于一般位置，则只需检查它们的任意两组同面投影即可确定；若两直线中有一条是投影面平行线，则需用检查该直线所平行的那个投影面上的投影等方法才能确定。

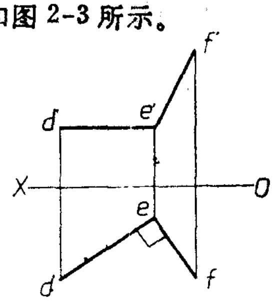
(2) 两交叉直线的同面投影若相交，其交点并非一个点的投影，而是分别在两条直线上的两个点的重影。其可见性需从另一组同面投影上判别，坐标大者可见，小者不可见。

6. 直角的投影定理

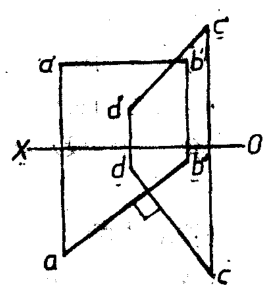
两直线成直角（包括垂直相交和垂直交叉），当其中有一条直线平行于投影面时，则其在该投影面上的投影仍是直角，如图 2-3 所示。



$BC//V$ $\angle a'b'c'=90^\circ$
垂直相交
(*a*)



$DE//H$ $\angle def=90^\circ$
垂直相交
(*b*)



$AB//H$ $ab\perp cd$
垂直交叉
(*c*)

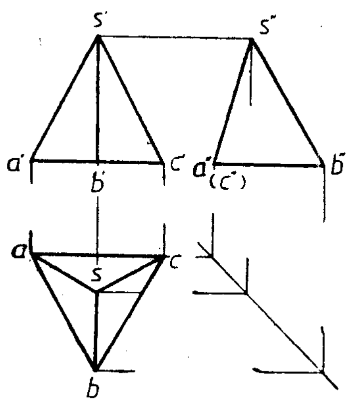
图 2-3 两直线垂直相交和垂直交叉

三、题目类型及解题方法示例

直线的题目，大致有以下几种主要类型：1.根据投影图判别直线对投影面、直线与点以及两直线的相对位置。2.求作符合一定条件的点或直线。3.根据直线的投影图求出线段的实长及其对投影面的倾角；或根据线段的一投影和实长（或有关倾角）确定其另一投影。4.求两点之间、点到特殊位置直线之间和一般位置直线与投影面垂直线之间的距离。

在解上述类型的题目时，首先应明确题意，弄清已知条件（包括已知条件中有无特殊位置直线）和求解的要求。其次，根据给出的投影想象几何元素在空间的位置关系，并按题意分析它们所具有的投影特性，确定解题的具体方法和步骤。然后应用有关的投影规律和作图方法进行投影作图。最后，检查解答是否满足题目的要求，以及有无存在多解的可能。

［例 1］ 已知三棱锥的三投影，试判断指定棱线的空间位置（图2-4）。



SA是一般位置直线
SB是侧平线
AB是水平线
AC是侧垂线

图 2-4

解：(1) 分析

三棱锥的投影，是由它表面上各棱线的投影组成。给出三棱锥的三投影，即给出它的各棱线的三投影。因此，根据各种位置直线的投影特性，即能判断各棱线的空间位置。

(2) 判断

由于棱线 SA 的投影 sa、$s'a'$、$s''a''$ 都倾斜于投影轴，故棱线 SA 为一般位置直线。棱线 SB 的正面投影 $s'b'$ 和水平投影 sb 分别平行于投影轴，而侧面投影 $s''b''$ 倾斜于投影轴，故 SB 为侧平线。棱线 AB 的正面投影 $a'b'$ 和侧面投影 $a''b''$ 分别平行于投影轴，水平投影 ab 倾斜于投影轴，故棱线 AB 为水平线。棱线 AC 的正面投影 $a'c'$ 和水平投影 ac 分别垂直于投影轴，侧面投影 $a''b''$ 积聚成一点，故棱线 AC 为侧垂线。

(3) 讨论

本例中的棱线 AC 既平行于H面，又平行于V面，但不能称它为水平线或正平线。因按直线位置的分类法，同时平行于两个投影面的直线属于投影面垂直线类。由于棱线 AC 垂直于W面，故应称为侧垂线。

本例实际只需给出正面和水平两投影就已能确定各棱线的空间位置。

［例 2］ 求作直线 AB 的水平投影，并在该直线上取点C，使 $AC:CB=1:2$（图 2-5 a)）。

解：(1) 分析

已知直线的两投影即能确定该直线的空间位置。本例虽未画出投影轴，但根据两投影所反映线段两端点的坐标差即可求出它的第三投影。又在线段 AB 上欲按 $AC:CB=1:2$ 定 C 点，可根据直线上点的投影特性求得。

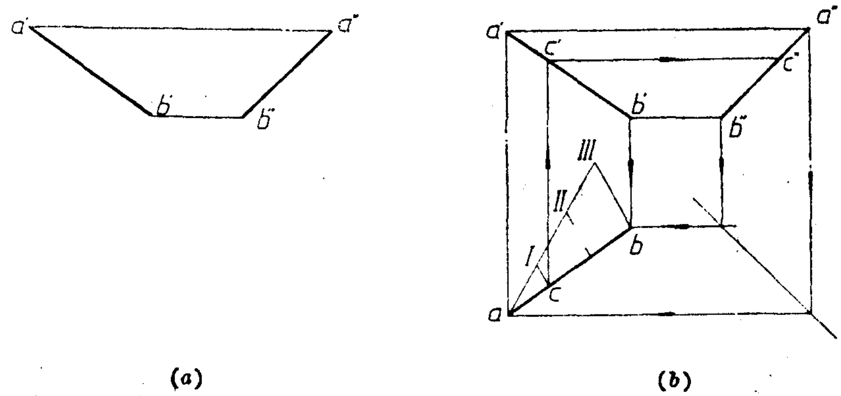


图 2-5

(2) 作图（图2-5(*b*)）

(*a*) 求作线段 AB 的水平投影　以 A 为基准点，它的水平投影 a 可在过 a' 的铅垂线的适当位置上选定。为了作图的简便和准确，可通过倾斜为 45° 的辅助线求得 b。连接 a、b 即为线段 AB 的水平投影。

(*b*) 在线段 AB 上定 C 点　过线段任一投影的端点例如 a 点任作一直线 aⅢ，并在其上截取三等分得Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ各点；连接 bⅢ，并过Ⅰ点作 bⅢ的平行线交 ab 于 c，即所求 C 点的水平投影，由 c 可得 c' 和 c''，如图所示。

[**例 3**]　在直线 AB 上取点 C，使 C 点与 V 面和 H 面的距离相等（图 2-6(*a*)）。

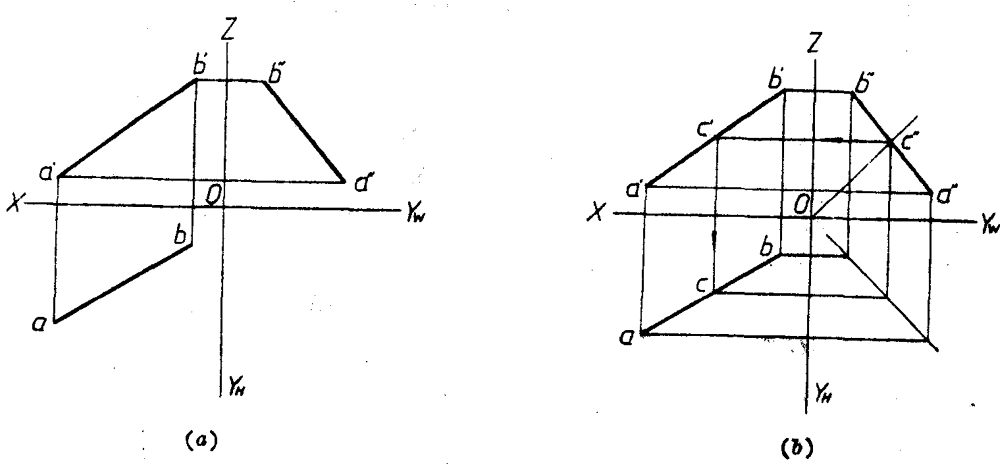


图 2-6

解：(1) 分析

由给出的三投影，可知 AB 为一般位置直线。一般位置直线上各点的坐标都不相同。给