概率入门

陈德勤

近代数学知识丛书 JINDAISHUXUEZHISHICONGSHU

四川教育出版社

15张

近代数学知识丛书

概 率 入 门

陈 德 勤

四 川 教 育 出 版 社
一九八五年 · 成都

责任编辑　韩承训
封面装帧　邱云松

近代数学知识丛书　　概率入门

四川教育出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　国营五二三厂印刷

开本 787×960 毫米1/32　印张5.125　字数80千
1985年5月第1版　1985年5月第1次印刷
印数：1—29,600册

书号：7344·49　　定价 0.87元

内 容 提 要

本书作为一种数学入门读物，主要介绍概率的基本概念、基本性质、古典概型的计算，以及条件概率、数学期望与方差等基础知识。各部分内容多从日常生活和工作中的现象入手，由具体到抽象，文字浅显、生动，并选有较多的例题与练习，以利于读者理解和掌握。

本书可供中学生课外阅读，也可供中学教师和一般数学爱好者参考。

书也不失为良友，对提高教学质量或能助以一臂之力。

这本《概率入门》由陈德勤同志撰写。作者行文流畅，语言生动，且有较丰富的教学经验，该书的维形曾作为讲稿获得好评。当然，由于编者水平所限，书中缺点错误在所难免，敬希读者提出宝贵意见。

编　者　一九八四年三月

目　录

一 引言

概率论是数学的一个活跃的分支，其应用范围非常广泛，如近代物理、无线电与自动控制、工厂产品的质量控制、农业试验、公用事业及社会科学的调查统计等。

概率论研究的对象是随机事件的数量规律性。

1·1 决定性事件

在自然界里，人们有时可以预先知道某些现象在一定的条件下必然发生，这种在一定的条件下必然会发生的现象我们称为**必然事件** 例如，“在标准大气压下，加热到100℃的水会沸腾”就是一个必然事件；又如，“在标准大气压下，20℃的水不会结冰”也是一个必然事件。以下，我们用希腊字母Ω表示必然事件（Ω读作奥米格）。

在一定的条件下不可能发生的现象我们称为**不可能事件**。例如，“在标准大气压下，加热到100℃的水不沸腾”就是一个不可能事件；又如，“在标准大气压下，20℃的水会结冰”也是一个不

可能事件。以下，我们用希腊字母 ϕ 表示不可能事件（ϕ 读作斐）。

由上述例子，我们可以发现，必然事件与不可能事件是相互对立的。必然事件的反面就是不可能事件，而不可能事件的反面就是必然事件。在一定的条件下，人们可以预先知道必然会发生或者不可能发生的这一类事件，我们都称为**决定性事件**。显然，必然事件与不可能事件都是决定性事件。

概率论以外的其它数学分支研究的都是决定性事件的数量规律。

1·2 随机事件

在自然界里，还存在另一类现象，人们无法预先知道它们在一定的条件下是发生还是不发生。这种在一定的条件下可能发生也可能不发生的事件，我们称为**随机事件**。例如，"掷一枚硬币，出现正面"是一种现象，在硬币落到桌面上并停稳以前，人们是无法预先知道"出现正面"这种现象是发生还是不发生的。因此，"掷一枚硬币，出现正面"是一个随机事件。又如，"从未检验的产品中任意地抽出一件，它是合格品"是一种现象，在对抽出的产品进行检验之前，人们是无法预先知道"它是合格品"这种现象是发生还是不发生的。因此，"从未检验的产品中任意地抽出一件，它是合格品"是一个随机事件。注意，这里"未检验的产

品”这个条件是很重要的，它说明了抽出来的一件产品可能是合格品，也可能是次品。因此，“它是合格品”这一现象才有可能发生，也可能不发生。如果改为“从次品堆中任意地抽出一件，它是合格品”，这就是一个不可能事件了。“任意地”三个字保证了抽取时没有加以选择，否则，就可以预先知道抽出的是合格品还是次品了。例如，“从产品中选出一件，它是合格品”，这就不是我们所要研究的随机事件了。

以下，我们用大写字母 A、B、C……表示随机事件，并将随机事件简称为事件。

1·3 频率的稳定性

记“掷一枚硬币，出现正面”为事件 A，则它可能发生，也可能不发生，呈现出偶然性。我们要研究的是事件 A 发生的可能性到底有多大。通俗地说，事件 A 发生的可能性大小就叫做事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$。问题在于，事件 A 发生的可能性大小如何确定，即怎样才能求出 $P(A)$ 呢？为此，历史上不少人曾耐心地做过大量的掷硬币试验。我们先看一下蒲丰与皮尔逊的试验结果(见下页表)。

由该结果可以看出，大量重复地进行这一试验，“出现正面”的频率呈现出明显的规律性，它不因人因时而异。有兴趣的话，你自己也可以动手做这一试验，通过试验，你也一定能发现：出现正

实 验 者	掷硬币次数 n	出现正面次数 m	出现正面频率 $F=\frac{m}{n}$
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

面的频率 F 总是接近于常数 $\frac{1}{2}$，并在它的附近摆动。这种规律性我们称为**频率的稳定性**。频率的稳定性是人类在长期实践中，通过大量重复地进行同一试验时发现的。频率的稳定性说明随机事件发生的可能性的大小是随机事件本身所固有的，不以人们意志为转移的一种客观属性。正是由于随机事件的这种频率的稳定性，才为研究随机事件发生的可能性大小提供了可以用数值表示的客观基础。

由频率的稳定性，我们不进行试验就可以预测：掷一枚硬币 10 亿次，出现正面的频率约为 $\frac{1}{2}$，即出现正面的次数约为 5 亿次。虽然这样的试验一个人很难把它做完，但其结果却是可以预测的。

1·4 概率的统计定义

由频率的稳定性，我们自然会想到，是否可以用随机事件发生的频率所接近的那个常数值来表示随机事件发生的概率？概率的统计定义对这一问题

作了肯定的回答。

概率的统计定义：在大量重复地进行同一试验时，如果事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总是接近于某个常数，并在它附近摆动，则称此常数为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$。

根据概率的统计定义，要求一个事件 A 的概率，我们只要做大量的试验，并求出事件 A 发生的频率，这个频率就是所求概率的近似值。

根据概率的统计定义，$P(A)=\frac{1}{2}$ 表示在一次试验中，事件 A 发生的可能性为 $\frac{1}{2}$，即在做一百次、一千次、一万次…试验时，事件 A 发生的频率都约为 $\frac{1}{2}$，或事件 A 发生的次数分别约为五十次、五百次、五千次……同样，$P(B)=0.0001$ 表示在一次试验中，事件 B 发生的可能性为 0.0001，即在做一百万次、一千万次、一亿次…试验时，事件 B 发生的频率都约为 0.0001，或事件 B 发生的次数分别约为一百次、一千次、一万次……应该注意的是，对 $P(A)=\frac{1}{2}$，决不能机械地理解为在两次试验中，事件 A 就发生一次；对 $P(B)=0.0001$，也决不能机械地理解为在一万次试验中，事件 B 一定发生一次。一定要牢牢记住定义中"大量重复地进行同一试验"这句话——当然，"大量"是相对而言的。对 $P(A)=\frac{1}{2}$，试验一百次就可以看作是

“大量”的试验；而对 $P(B)=0.0001$，试验一千次也不能看作是“大量”的试验。

由于必然事件 Ω 在每一次试验都一定发生，即必然事件发生的频率为$\frac{n}{n}=1$，因此，根据概率的统计定义，必然事件 Ω 的概率 $P(\Omega)=1$。换句话说，必然事件 Ω 发生的可能性是百分之百。由于不可能事件 ϕ 在每一次试验时都不会发生，即不可能事件 ϕ 发生的频率为$\frac{0}{n}=0$，因此，根据概率的统计定义，不可能事件 ϕ 发生的概率 $P(\phi)=0$。为方便起见，我们将必然事件 Ω 看作是概率为 1 的特殊的随机事件，将不可能事件 ϕ 看作是概率为 0 的特殊的随机事件。这样一来，我们就可以得到概率的一个重要性质：

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

应该注意的是，不可能事件 ϕ 的概率 $P(\phi)=0$，但概率为 0 的事件 A 不一定是不可能事件，即由“$P(A)=0$”不能推得“A 是不可能事件”这一结论。例如，在某工厂生产的产品中任意地抽检一万件，全是合格品，由概率的统计定义，可以得到“从该厂产品中任意地抽取一件，它是次品”这一随机事件 A 的概率 $P(A)=0$，但事件 A 并不是不可能事件，因为该厂产品中可能有次品，这些次品有可能被抽出来。

有了概率的统计定义，只要通过大量的重复试验，就可以求出一个事件发生的频率，并以此频率

作为这个事件概率的近似值。例如，某工厂通过任意地抽取大量产品，检验后得到合格品的频率为98%，根据概率的统计定义，可以得出“从该厂产品中任意地抽取一件，它是合格品”这一随机事件的概率约为98%，即其可能性为98%。换句话说，从该厂产品中任意地抽取一件，有98%的把握可以确定它是合格品，或者说每100件产品中约有98件是合格品。这就是通常所说的产品合格率为98%的意义。由此可以看出，产品合格率为98%并不是一百件产品中一定有两件次品。

根据频率的稳定性，我们给出了概率的统计定义，从而可以对一个随机事件发生的可能性大小进行定量研究，由此建立了一个新的数学分支——概率论。

概率论的发展有着悠久的历史。田忌赛马的故事就是我国古代运用概率论知识的一个著名的例子。故事说，田忌常常和齐国的王族们赛马，但胜少负多。谋士孙膑看到他们双方的马脚力相差不大，就向田忌献策：以其下等马与对方的上等马比赛，以其上等马与对方的中等马比赛，以其中等马与对方的下等马比赛。这样一来，比赛前就可以预测出田忌负一胜二的可能性最大。田忌采用此策，果然取得了负一胜二的成绩，赢得了最后胜利。

概率论的发展虽然有着悠久的历史，但它严格的数学理论的建立及广泛的实际应用却是本世纪的事。

以上我们通俗地介绍了事件的概率，并给出了求事件 A 概率近似值的方法。然而，要求事件 A 概率近似值，先要大量重复地做同一试验，这是十分麻烦的。有没有求事件 A 概率的更简便的方法呢？在下一部分，我们将要介绍对特殊的随机试验——**古典概型**求事件 A 概率的更简便的方法，并将进一步较严格地建立事件、概率等基本概念的数学意义。

练 习 一

1，掷硬币 100 次，并计算出现正面的频率。

2．设某厂产品的次品率为 3%，问“从该厂产品中任意地抽取 100 件，其中一定有 3 件次品”这种说法对不对？为什么？

3．设某厂产品的次品率为 2%，估算该厂 800000 件产品中次品的件数。

4．试解释在下述情况中概率的意义：

（1）一位工程师说：我们制造的灯能点 1000 小时以上的概率是 0.15；

（2）一位气象学家说：在今天的天气条件下，明天下雨的概率是 0.80；

（3）按照法国著名数学家拉普拉斯（1749—1827）的意见，一个婴儿将是女孩的概率是$\frac{22}{45}$。

5．指出下列事件是必然事件，不可能事件，还是随机事件：

（1）掷一枚硬币，正面向上；

（2）在一个三角形中，至少有一个锐角；

(3) 在一个三角形中，既有一个直角，又有一个钝角；

(4) 在一批未检验的产品中，任意抽出一件，它是次品；

(5) 在一堆次品中，任意抽出一件，它是次品；

(6) 在一堆次品中，任意抽出一件，它不是次品；

(7) 明天要下雨。

二 古典概型

古典概型是最早为人们所认识而又最简单的随机试验的数学模型，它在概率论中占有相当重要的地位。它是中学数学教材中概率部分的主要内容，我们将对它进行较深入的研究。

2·1 样本空间与事件

我们先来看两个例子。

【例 1】 一次掷出一分、二分、五分的硬币各一枚，则可能出现的结果按一分、二分、五分的顺序排列是

(正，正，正)，(正，正，反)，

(正，反，正)，(正，反，反)，

(反，正，正)，(反，正，反)，

(反，反，正)，(反，反，反)，

共八种。其中每一种可能出现的结果都叫做一个**基本事件**（或叫做**样本点**），记为 ω_1，ω_2，……（希腊字母 ω 是 Ω 的小写）基本事件全体构成**样本空间**，也记为 Ω。如果样本空间是由有限个基本事件