本系列图书一律安排在王迈迈英语教学网授课

http://www.wmmenglish.com

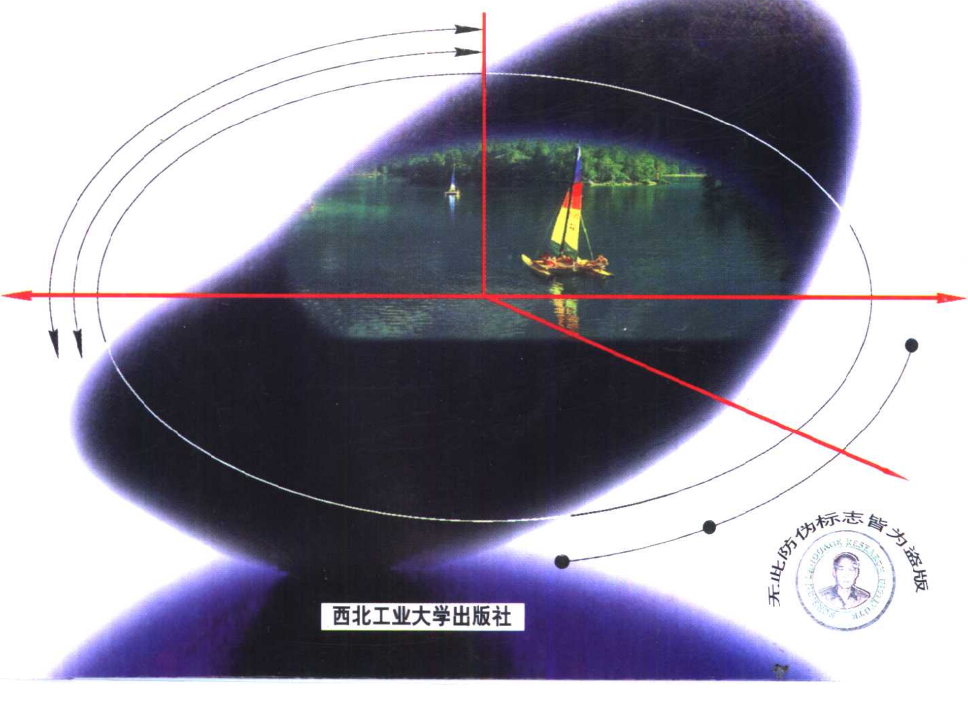
E-mail: sale@wmmenglish.com

与同济大学《高等数学》（第四版）配套

高等数学（下）教与学参考

最新修订版

张宏志 主编



无此防伪标志皆为盗版

西北工业大学出版社

本系列图书一律安排在王迈迈英语教学网授课
http://www.wmmenglish.com
E-maill://sale@wmmenglish.com

与同济大学《高等数学》(第四版)配套

高等数学(下)教与学参考

最新修订本

张宏志(主编)　阎国辉

西北工业大学出版社

(陕)新登字 009 号

高等数学教与学参考(下)

张宏志　主编
丛书策划　王迈迈
责任编辑　陈康宁
责任校对　李刚等

*

© 2000　西北工业大学出版社出版发行
(邮编:710072　西安市友谊西路 127 号)
全国各地新华书店经销
文字六〇三厂印装
ISBN 7-5612-1006-X/O·128

*

开本:787 毫米×1092 毫米　1/32　印张:36　字数:800 千字
2002 年 2 月第 3 版　　2002 年 2 月第 1 次印刷
印数:1-10000 册　　定价:34.00 元(本册 17.00 元)

前　　言

同济大学《高等数学》(第四版)是全国高等院校普遍采用的教材。为了帮助同学们学好该书,我们根据自己多年的教学经验,根据无数大学生学习此书反馈的信息,根据一届又一届考研辅导留给我们的深刻体会,编写了《高等数学教与学参考》一书。

多年来,我们在讲授《高等数学》这门课的同时,一直希望能有一本十分详尽的教学参考书,能让同学们在没有任何老师辅导的情况下,通过这本详尽的参考就能完全学懂学好《高等数学》,就能解答出《高等数学》中的全部习题,就能通过学习该参考中的习题详解,弄懂每一道难题。

《高等数学教与学参考》就是在这种思想的指导下写成的。该书分为上、下两册。完全与教材内容同步,完全按教材章节编写。上册七个章节,下册五个章节。每个章节都包括以下八个方面的内容:

一、考点提示及大纲要求。大纲要求一目了然,考点简明扼要。

二、重点知识结构图。该图提纲挈领,逻辑性强,体系完整。

三、常考题型与范例精解。题型典型灵活,解题方法富于技巧,内容覆盖全面。

四、疑难解答。抓住要害,突出重点、难点,扩宽知识面。

五、考研精典题剖析。开阔视野,“一步到位”,使读者更加明了考研的题型和难度,做到有的放矢。

六、典型错误类型及根源分析。析理透彻,一针见血。

七、学习效果两级测试。循序渐进，层次分明，适合不同要求，便于复习巩固所学知识。

八、习题解答与两级测试题答案。便于自我检测。

最后附录了六份考研模拟测试题与解答，以供读者对自己的学习效果进行评估。

我们真诚希望《高等数学教与学参考》能够成为广大读者的知心朋友。我们也十分清楚，由于水平所限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，恳请各位读者及同行不吝赐教。

编　者

2002年2月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用…………………………（1）
一、考点提示及大纲要求 ……………………………………（1）
二、重点知识结构图 …………………………………………（2）
三、常考题型及范例精解 ……………………………………（3）
四、疑难解答…………………………………………………（23）
五、考研精典题剖析…………………………………………（25）
六、典型错误类型及根源分析………………………………（30）
七、学习效果两级测试………………………………………（41）
基础测试题…………………………………………………（41）
考研训练题…………………………………………………（42）
八、课后习题解答与两级测试题答案………………………（43）
习题 8—1 解答 ……………………………………………（43）
习题 8—2 解答 ……………………………………………（46）
习题 8—3 解答 ……………………………………………（50）
习题 8—4 解答 ……………………………………………（54）
习题 8—5 解答 ……………………………………………（59）
习题 8—6 解答 ……………………………………………（64）
习题 8—7 解答 ……………………………………………（68）
习题 8—8 解答 ……………………………………………（73）
*习题 8—9 解答……………………………………………（77）
*习题 8—10 解答 …………………………………………（81）
总习题八解答………………………………………………（82）

基础测试题答案…………………………………………… (92)
考研训练题答案…………………………………………… (92)

第九章　重积分 ……………………………………… (93)
一、考点提示及大纲要求…………………………………… (93)
二、重点知识结构图………………………………………… (94)
三、常考题型及范例精解…………………………………… (95)
四、疑难解答 ……………………………………………… (115)
五、考研精典题剖析 ……………………………………… (117)
六、典型错误类型及根源分析 …………………………… (119)
七、学习效果两级测试 …………………………………… (127)
基础测试题 ……………………………………………… (127)
考研训练题 ……………………………………………… (129)
八、课后习题解答与两级测试题答案 …………………… (130)
习题 9—1 解答……………………………………………… (130)
习题 9—2(1)解答 ………………………………………… (134)
习题 9—2(2)解答 ………………………………………… (142)
习题 9—2(3)解答 ………………………………………… (140)
习题 9—3 解答……………………………………………… (154)
习题 9—4 解答……………………………………………… (160)
习题 9—5 解答……………………………………………… (165)
*习题 9—6 解答 …………………………………………… (176)
总习题九解答 ……………………………………………… (180)
基础测试题答案 …………………………………………… (190)
考研训练题答案 …………………………………………… (190)

第十章　曲线积分与曲面积分………………………… (191)
一、考点提示及大纲要求 ………………………………… (191)
二、重点知识结构图 ……………………………………… (192)

三、常考题型及范例精解 …………………………… (193)
四、疑难解答 …………………………………… (217)
五、考研精典题剖析 ………………………………… (220)
六、典型错误类型及根源分析 ……………………… (226)
七、学习效果两级测试 ……………………………… (235)
基础测试题 ……………………………………… (235)
考研训练题 ……………………………………… (237)
八、课后习题解答与两级测试题答案 …………… (239)
习题 10—1 解答 ………………………………… (239)
习题 10—2 解答 ………………………………… (244)
习题 10—3 解答 ………………………………… (249)
习题 10—4 解答 ………………………………… (254)
习题 10—5 解答 ………………………………… (260)
习题 10—6 解答 ………………………………… (264)
习题 10—7 解答 ………………………………… (268)
总习题十解答 …………………………………… (274)
基础测试题答案 ………………………………… (285)
考研训练题答案 ………………………………… (285)

第十一章　无穷级数………………………………… (286)
一、考点提示及大纲要求 ………………………… (286)
二、重点知识结构图 ……………………………… (288)
三、常考题型及范例精解 ………………………… (289)
四、疑难解答 ……………………………………… (316)
五、考研精典题剖析 ……………………………… (319)
六、典型错误类型及根源分析 …………………… (324)
七、学习效果两级测试 …………………………… (330)
基础测试题 ……………………………………… (330)
考研训练题 ……………………………………… (331)

八、课后习题解答与两级测试题答案 ……………… (332)
习题 11—1 解答 …………………………………… (332)
习题 11—2 解答 …………………………………… (336)
习题 11—3 解答 …………………………………… (341)
习题 11—4 解答 …………………………………… (344)
习题 11—5 解答 …………………………………… (349)
*习题 11—6 解答…………………………………… (352)
习题 11—7 解答 …………………………………… (356)
习题 11—8 解答 …………………………………… (360)
习题 11—9 解答 …………………………………… (364)
习题 11—10 解答…………………………………… (367)
总习题十一解答 …………………………………… (368)
基础测试题答案 …………………………………… (380)
考研训练题答案 …………………………………… (381)

第十二章 微分方程……………………………………… (382)
一、考点提示及大纲要求 ……………………………… (382)
二、重点知识结构图 …………………………………… (383)
三、常考题型及范例精解 ……………………………… (384)
四、疑难解答 …………………………………………… (408)
五、考研精典题剖析 …………………………………… (409)
六、典型错误类型及根源分析 ………………………… (419)
七、学习效果两级测试 ………………………………… (427)
基础测试题 …………………………………………… (427)
考研训练题 …………………………………………… (428)
八、课后习题解答与两级测试题答案 ……………… (429)
习题 12—1 解答 …………………………………… (429)
习题 12—2 解答 …………………………………… (431)
习题 12—3 解答 …………………………………… (437)

习题 12—4 解答 …………………………… (443)
习题 12—5 解答 …………………………… (452)
*习题 12—6 解答…………………………… (457)
习题 12—7 解答 …………………………… (459)
习题 12—8 解答 …………………………… (467)
习题 12—9 解答 …………………………… (472)
习题 12—10 解答…………………………… (477)
*习题 12—11 解答 ………………………… (488)
习题 12—12 解答…………………………… (491)
*习题 12—13 解答 ………………………… (497)
总习题十二解答 …………………………… (504)
基础测试题答案 …………………………… (517)
考研训练题答案 …………………………… (517)

综合测试模拟试题及答案…………………… (518)
模拟试题(一)………………………………… (518)
模拟试题(二)………………………………… (520)
模拟试题(三)………………………………… (522)
模拟试题(四)………………………………… (524)
模拟试题(五)………………………………… (526)
模拟试题(六)………………………………… (528)
模拟试题(一)参考答案……………………… (530)
模拟试题(二)参考答案……………………… (534)
模拟试题(三)参考答案……………………… (540)
模拟试题(四)参考答案……………………… (547)
模拟试题(五)参考答案……………………… (554)
模拟试题(六)参考答案……………………… (558)

第八章

多元函数微分法及其应用

一、考点提示及大纲要求

考点提示

1. 多元函数的概念;
2. 二元函数的极限和连续的概念,有界闭域上连续函数的性质;
3. 偏导数,全微分的概念,全微分存在的必要条件和充分条件,全微分在近似计算中的应用;
4. 复合函数,隐函数的求导法;二阶偏导数;
5. 方向导数和梯度的概念及其计算方法;
6. 空间曲线的切线和法平面,曲面的切平面和法线;
7. 二元函数的二阶泰勒公式;
8. 多元函数极值和条件极值的概念,多元函数极值的必要条件,二元函数极值的充分条件,极值的求法;拉格朗日乘数法;
9. 多元函数的最大值、最小值及其简单应用.

大纲要求

1. 理解多元函数的概念;
2. 了解二元函数的极限与连续性的概念;
3. 理解偏导数和全微分的概念,了解全微分存在的必要条件和充分条件,以及全微分在近似计算中的应用;
4. 理解方向导数和梯度的概念并掌握其计算方法;
5. 掌握复合函数一阶、二阶偏导数的求法;会求隐函数的偏导数;
6. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念,会求它们的方程;了解二元函数的二阶泰勒公式;
7. 理解多元函数极值和条件极值的概念,掌握多元函数极值存在的必要条件,了解二元函数极值存在的充分条件,会求二元函数的极值,会用拉格朗日乘数法求条件极值,会求简单多元函数的最大值和最小值并会解决一些简单的应用问题.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

二、重点知识结构图

- 基本概念
  - 函数的定义：$u = f(x,y,z)$
  - 极限：$\lim\limits_{\rho\to 0} f(x,y) = A$，$(\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$
  - 连续：$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$
  - 偏导数：$f_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

    方向导数：$\dfrac{\partial f}{\partial l} = f_x\cos\alpha + f_y\cos\beta$

    梯度：$\mathbf{grad} f(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$
  - 全微分：$dz = z_x\Delta x + z_y\Delta y$
- 性质
  - 偏导数存在 $\not\longleftrightarrow$ 连续

    $\nwarrow$ 可微 $\nearrow$
  - 闭区域上连续函数的性质：最值定理，介值定理
  - 微分法
    - 复合函数的微分：$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$
    - 隐函数微分法：$F(x,y)=0$，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$
- 应用
  - 泰勒公式

    $f(x_0+h,y_0+k) = \sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^i f(x_0,y_0) + R_n$

    $R_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\left(h\dfrac{\partial}{\partial x}+k\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$，

    $0<\theta<1$
  - 极值
    - 必要条件：$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$
    - 充分条件：本章教材定理 2
    - 拉格朗日乘数法：$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

      目标函数 $f(x,y)$，$\varphi(x,y)=0$ 约束条件
  - 几何应用
    - 空间曲线
      - 切线方程：$\dfrac{x-x_0}{x'_0} = \dfrac{y-y_0}{y'_0} = \dfrac{z-z_0}{z'_0}$

        法平面方程：$x'_0(x-x_0)+y'_0(y-y_0)+z'_0(z-z_0)=0$
    - 空间曲面
      - 切平面：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，

        法线方程：$\dfrac{x-x_0}{A} = \dfrac{y-y_0}{B} = \dfrac{z-z_0}{C}$

三、常考题型与范例精解

选择题

例 1 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，若当 $y=1$ 时，$z=x$，则 $z=$ （　　）

(A) $\sqrt{x}+y-1$；　　(B) $\sqrt{y}+x-1$；

(C) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-1$；　　(D) $\sqrt{x+y}-1$.

解 因为 $z|_{y=1}=x$ 故有

$$x=1+f(\sqrt{x}-1)$$

即 $f(\sqrt{x}-1)=x-1$

所以 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)=\sqrt{y}+x-1$.

故正确选择(B).

例 2 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=$ （　　）

(A) 等于 1；　　(B) 等于 0；

(C) 等于 -1；　　(D) 不存在.

解 由不等式 $2|xy|\leqslant x^2+y^2$，得

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|}$$

$$\leqslant\frac{|x|+|y|}{|xy|}\leqslant\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$，

由极限存在的夹逼准则可知 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0$.

故正确选择(B).

例 3 通过变换 $\xi=x-2\sqrt{y}$，$\eta=x+2\sqrt{y}$ $(y>0)$ 一定可以把方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}\quad(y>0)$$

化为 （　　）

(A) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0$；　　(B) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}=0$；

(C) $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{z\partial \xi \partial \eta}=0$; (D) $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}=0$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=-y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial \xi}+y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\cdot y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial \xi}-y^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}(-y^{-\frac{1}{2}})+\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}y^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial \eta}+y^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\partial \xi}(-y^{-\frac{1}{2}})+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}y^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial \eta}+y^{-1}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}-2y^{-1}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}$$

$$+y^{-1}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

代入原方程,即得:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}=0$$

故正确选择(D).

例 4 设 $u=u(x,y)$ 为可微分的函数,且当 $y=x^2$ 时,有 $u(x,y)=1$ 及$\frac{\partial u}{\partial x}=x$;则当 $y=x^2(x\neq 0)$ 时,$\frac{\partial u}{\partial y}=($ $)$

(A) $\frac{1}{2}$; (B) $-\frac{1}{2}$; (C)0; (D)1.

解 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x,x^2)=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

根据题设,当 $y=x^2$ 时,$u(x,y)=u(x,x^2)=1$,

就有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x,x^2)=0$

且有 $\frac{\partial u}{\partial x}=x$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$

于是 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$

或 $x+2x\frac{\partial u}{\partial y}=0$

当 $x\neq 0$ 时,

得 $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}$,故正确选择$(B)$.

例 5 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 (　　)

(A) 充分条件，但不是必要条件；

(B) 必要条件，但不是充分条件；

(C) 充分必要条件；

(D) 既不是充分条件，也不是必要条件.

解 用筛选法确定. (A) 不正确. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

显见有 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

(B) 不正确. 例如 $f(x,y)=|xy|$ 在点 $(0,1)$ 处连续，但两个偏导数 $f_x(0,1)$，$f_y(0,1)$ 皆不存在.

由 (A)、(B) 不正确可推知 (C) 一定不正确.

故正确选择 (D).

例 6 设 $z=z(x,y)$ 是由方程

$F(x-az,y-bz)=0$ 所定义的隐函数，其中 $F(u,v)$ 是变量 u,v 的任意可微函数，a,b 为常数，则必有 (　　)

(A) $b\dfrac{\partial z}{\partial x}+a\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；　　(B) $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；

(C) $b\dfrac{\partial z}{\partial x}-a\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$；　　(D) $a\dfrac{\partial z}{\partial x}-b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

解 在方程 $F(x-az,y-bz)=0$ 两边对 x 求偏导得，

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(1-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot(-b)\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}$$

在 $F(x-az,y-bz)=0$ 两边对 y 求偏导得

$$\frac{\partial F}{\partial u}(-a)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\left(1-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}$$

从而　　$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}{a\dfrac{\partial F}{\partial u}+b\dfrac{\partial F}{\partial v}}=1$$

故正确选择 (B).

例 7 曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$

在点 $M(1,-2,1)$ 的切线一定平行于 ( )

(A) xOy 面； (B) yOz 平面；

(C) zOx 平面； (D) 平面 $x+y+z=0$.

解 曲面 S_1: $x^2+y^2+z^2=6$ 在点 M 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=2\{1,-2,1\}$

曲面 S_2: $x+y+z=0$ 在点 M 处的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=\{1,1,1\}$

曲线在点 M 处的切向量为

$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=-6\{1,0,-1\}$

由于 $\boldsymbol{T}$ 垂直于 Oy 轴，所以切线必平行于 zOx 平面. 故正确选择(C).

例 8 空间曲线

$$\Gamma:\begin{cases}x=ae^t\cos t\\y=ae^t\sin t\\z=ae^t\end{cases}$$

上任一点处的切线与 ( )

(A) Oz 轴形成定角；

(B) Ox 轴形成定角；

(C) Oy 轴形成定角；

(D) 锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线夹角相同.

解 因为曲线 Γ 上任意一点 $M(x,y,z)$，(其中 $x=ae^t\cos t, y=ae^t\sin t, z=ae^t$) 的坐标满足锥面的方程，即

$$x^2+y^2=(ae^t\cos t)^2+(ae^t\sin t)^2=(ae^t)^2=z^2$$

因此曲线 Γ 在锥面上，曲线 Γ 在点 M 处的切向量为

$$\boldsymbol{T}_1=\{ae^t(\cos t-\sin t),ae^t(\sin t+\cos t),ae^t\}$$
$$=\{(x-y),(x+y),(z)\}$$

圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的顶点在原点，锥面上过点 M 的母线的方向向量为

$$\boldsymbol{T}_2=\{x,y,z\}$$

从而可知

$$\cos(\boldsymbol{T}_1\hat{,}\boldsymbol{T}_2)=\frac{\boldsymbol{T}_1\cdot\boldsymbol{T}_2}{|\boldsymbol{T}_1||\boldsymbol{T}_2|}$$
$$=\frac{x(x-y)+y(x+y)+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2}}$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{2x^2+2y^2+z^2}}$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{2z^2}\sqrt{3z^2}}=\frac{2z^2}{\sqrt{2z^2}\sqrt{3z^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

于是曲线 Γ 上任意一点处的切线与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的母线夹角相同.

故正确选择(D).

例 9 曲面 $xyz=a^3(a>0)$ 的切平面与三个坐标面所围成的四面体的体积 $V=($　　$)$

(A) $\frac{3}{2}a^3$； (B)$3a^3$ ；(C) $\frac{9}{2}a^3$； (D)$6a^3$.

解 在曲面 $xyz=a^3$ 上任取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 则曲面过点 M_0 的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$$

该切平面与三坐轴的交点依次为

$$A(3x_0,0,0),B(0,3y_0,0),C(0,0,3z_0)$$

由于各坐标面的垂直关系，即知以 O,A,B,C 为顶点的四面体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}|OC|\left(\frac{1}{2}|OA||OB|\right) \\ &= \frac{9}{2}|x_0y_0z_0| = \frac{9}{2}a^3 \end{aligned}$$

故正确选择(C).

例 10 函数 $u=\sin x\sin y\sin z$ 满足 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ $(x>0,y>0,z>0)$ 的条件极值是(　　)

(A)1； (B)0； (C) $\frac{1}{6}$； (D) $\frac{1}{8}$.

解 由条件 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$ 及 $x>0,y>0,z>0$

易知 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, $0<z<\frac{\pi}{2}$,

故 $u=\sin x\sin y\sin z>0$. 且令

$$W=\ln u=\ln\sin x+\ln\sin y+\ln\sin z$$

构建拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=W+\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right)$$

从而得到方程组：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com