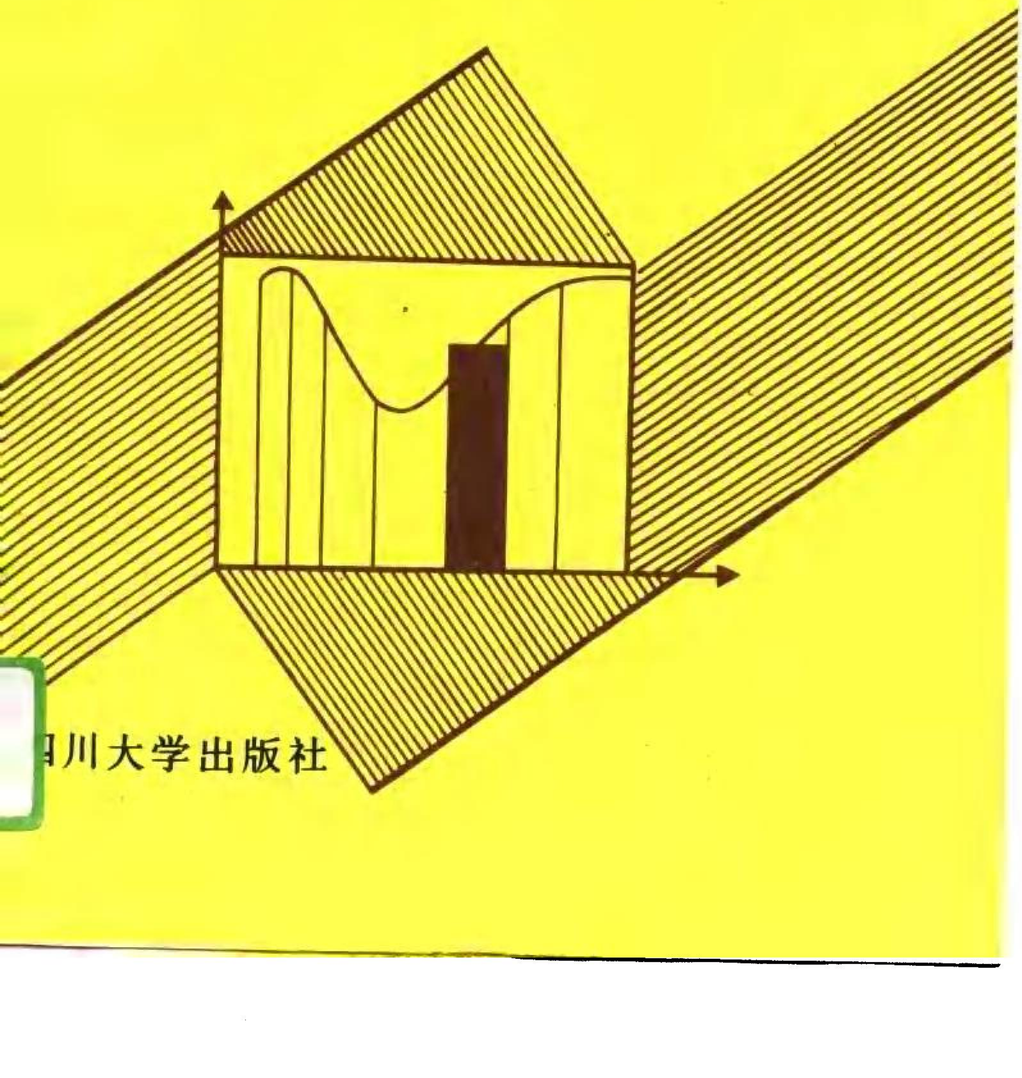
经济数学基础《上》

微积分

魏 有 德 主编



四川大学出版社

(川)新登字 014 号

责任编辑：项其祥
封面设计：冯先洁

经济数学基础（上）

微 积 分

主编　魏有德

编者：李文高 王继炳 钟波 方儒新 邹述超

四川大学出版社出版发行　(成都市望江路 29 号)
四川省新华书店经销　　郫县犀浦印刷厂印刷
850×1168mm　1/32　印张：12.75　字数：316千字
1992 年 8 月第一版　　1994 年 5 月第二次印刷
印数：5001—10000 册
ISBN　7-5614-0526-x/O·69　　定价：7.20 元

前　言

《经济数学基础》是大学本科、专科财经类专业的必修基础课程，它包括《微积分》、《线性代数》、《概率与数理统计》等内容。

这本《经济数学基础》之一的《微积分》是在四川大学出版社 1987 年出版的《经济数学基础》基础上，根据国家教委新颁布的“教学大纲”修改而成。这次修订的原则是：从第一线实际教学要求出发，教师便于安排组织教学，学生易于接受和自学。本书特点是：(一) 注意保持较大的适应性，使本教材既适用于经济和管理类专业的本科教学，也适用于专科和成人教育的同类专业的教学。各校可按教学大纲的不同要求，选取其中有关部分进行教学；(二) 不按传统方式在第一章对初等数学进行繁多的系统复习，而是根据中学数学教学和本教材后继知识需要，安排所需的简明扼要的预备知识；(三)在注意理论的严密性和完整性的同时，倾重于方法和它与实际问题联系的讲授，做到教师好教，学生易学；(四) 配备两个层次的练习题，便于教学和因材施教。每节后我们配备了基础知识练习，为教学的基本要求。在每章后又配备了一些综合练习题，供教师和学生选用。

本书包括一元函数微积分、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程和差分方程简介等共十章。按教学计划，本科授完这些内容，约需 140 学时。专科、函授、夜大及短期培训班可选讲第

1～5 章和第 8 章内容，约需 105 学时。

本书由魏有德副教授主编，各章执笔者是：一、二章——邹述超，三章——王继炳，四、五、六章——钟波，七、八章——李文高，九、十章——方儒新。

不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

一九九二年一月

目　　录

第一章　预备知识

实数、集合以及函数的初步知识读者已在中学学过，这里着重介绍几点后面常用到的一些其它知识.

§1.1　绝对值的性质

一个实数 a 的绝对值记为 $|a|$，定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

关于绝对值有以下几条基本性质：

(1) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$，　$|a| = |-a|$；

(2) $|ab| = |a||b|$；

(3) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$　$(b \neq 0)$；

(4) 若 $-b \leqslant a \leqslant b$　$(b > 0)$，则 $|a| \leqslant b$，反之亦成立，若 $a \geqslant b$ 或 $a \leqslant -b (b > 0)$，则 $|a| \geqslant b$，反之亦成立；

(5) $|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$；

(6) $|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$；

(7) $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$；

性质(1) 至(6) 留给读者证明，这里只给出性质(7) 的证明。

证　由性质(5) 有

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|,$$

$$|b| = |(b-a)+a| \leqslant |b-a| + |a| = |a-b| + |a|,$$
于是可得
$$|a-b| \geqslant |a| - |b|, \quad |a-b| \geqslant -(|a|-|b|),$$
再由性质(4)得
$$|a-b| \geqslant \big||a|-|b|\big|.$$

例　设 a 是实数，则当 $|a| \geqslant 4$ 时，有
$$\left|\frac{a+4}{a-2}\right| \leqslant |a|.$$

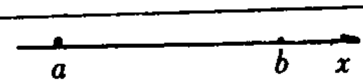
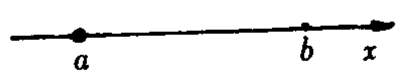
证　由性质(3)、(5)、(6)得
$$\left|\frac{a+4}{a-2}\right| = \frac{|a+4|}{|a-2|} \leqslant \frac{|a|+4}{|a|-2}.$$
又由 $|a| \geqslant 4$ 得　$|a|-2 \geqslant 2$,

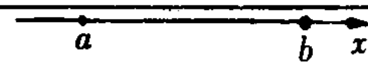
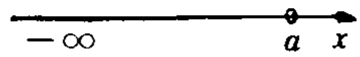
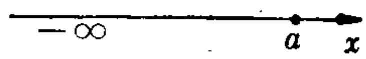
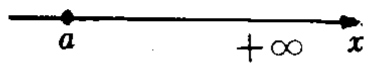
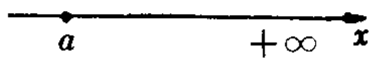
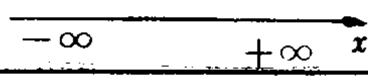
所以　$$\frac{|a+4|}{|a-2|} \leqslant \frac{|a|+|a|}{2} = |a|.$$

§1.2　邻域

设 a、b 是两个实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a、b 为端点的**开区间**，记为 (a,b)，即
$$(a,b) = \{x \mid a<x<b\}.$$

类似还有**闭区间**、**半开半闭区间**以及**无限区间**. 它们的定义和在数轴上的表示如下表：

区间定义	数轴上的表示
$(a,b) = \{x \mid a<x<b\}$	
$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
$(a,b] = \{x \mid a<x \leqslant b\}$	

$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$	
$(-\infty,a) = \{x \mid -\infty < x < a\}$	
$(-\infty,a] = \{x \mid -\infty < x \leqslant a\}$	
$(a,+\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$	
$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$	
$(-\infty,+\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$	

现介绍一种在微积分中常用到的特殊的开区间——邻域.

x_0 为中心、长为 2δ 的开区间

$$(x_0-\delta, x+\delta) = \{x \mid |x-x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

称为点 x_0 的 δ **邻域**,记为 $N_\delta(x_0)$. 如图 1.1.

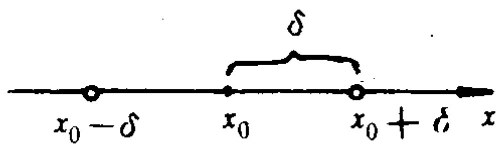


图 1.1

例如:$\{x \mid |x-1| < 0.5\}$ 为点 $x_0=1$ 的 0.5 邻域,也就是开区间$(0.5,1.5)$;$\{x \mid |x+1| < 0.2\}$ 为点 -1 的 0.2 邻域。

以后还常常遇到以下几种情形:

在 $N_\delta(x_0)$ 中去掉点 x_0,其余点构成的集合

$$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta) = \{x \mid 0 < |x-x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

称为 x_0 的**去心邻域**.

x_0 左半部分的点构成的集合

$$(x_0-\delta, x_0) = \{x \mid 0 < x_0 - x < \delta, \delta > 0\}$$

称为 x_0 的**左邻域**.

x_0 右半部分的点构成的集合

$$(x_0, x_0+\delta) = \{x \mid 0 < x - x_0 < \delta, \delta > 0\}$$

称为 x_0 的**右邻域**.

类似可定义平面上点的邻域.

平面上以 $M_0(x_0, y_0)$ 为心，以 $\delta > 0$ 为半径的圆内的点的全体，即集合

$\{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2, \delta > 0\}$ 称为点 M_0 的 δ **邻域**，记为 $N_\delta(M_0)$.

例如，$\left\{(x,y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < \frac{1}{4}\right\}$ 为点 $(1,1)$ 的 $\frac{1}{2}$ 邻域，是平面上以点 $(1,1)$ 为心，$\frac{1}{2}$ 为半径的一个开圆.

我们也可以把以 M_0 为心，2δ 为边长的正方形区域，即集合 $\{(x,y) \mid |x-x_0| < \delta, |y-y_0| < \delta, \delta > 0\}$ 称为 M_0 的邻域.

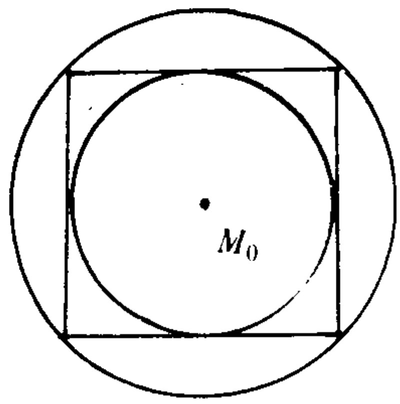


图 1.2

前者称为**圆邻域**，后者称为**方邻域**. 显然，M_0 的圆邻域内至少存在一个 M_0 的方邻域；反之，M_0 的方邻域内至少存在一个 M_0 的圆邻域. 如图 1.2.

§1.3 分段函数

设 x, y 是两个变量，$x \in D$，若对 D 中每一个值 x，按某一确定的对应关系都可以唯一确定变量 y 的一个值，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y = f(x)(x \in D)$. 称 x 为**自变量**，y 为**因变量**，D 为**定义域**，集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 为**值域**，记为 $D(f)$.

有的函数可用一个数学式子表示，如 $y = \sin x, x \in R$. 有的在其定义域的不同范围内，要用不同的数学式子来表示，这一类函数叫做**分段函数**.

例如：$y = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0 \\ -x+1, & x < 0 \end{cases}$，如图 1.3；

符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$，如图 1.4；

“y 是不超过 x 的最大整数部分”：$y = [x]$（如 $[1.5] = 1$，$[3] = 3$，$[-2.5] = -3$），如图 1.5. 它们都是定义在实数集 R 上的分段函数.

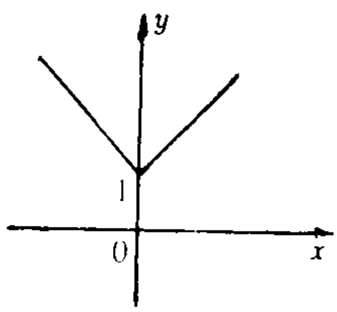


图 1.3

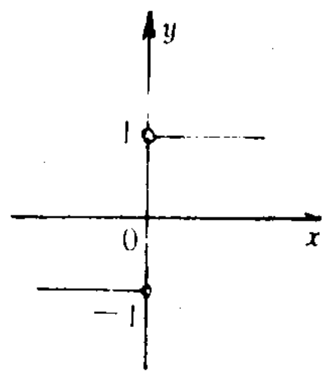


图 1.4

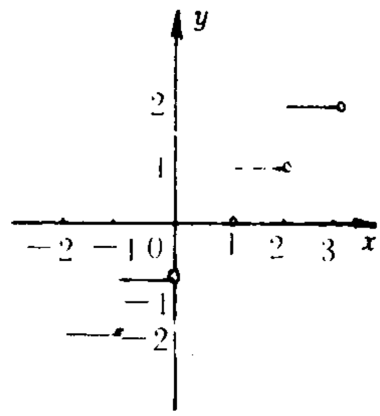


图 1.5

注意　分段函数是用几个式子合起来表示一个函数，而不是几个函数.

例 1　某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 200 公里以内，每公里 2 元，超过 200 公里的部分每公里为 1.5 元. 则运费 Q 与里程 x 之间的函数关系为：

$$Q = \begin{cases} 2x, & 0 < x \leqslant 200 \\ 400 + 1.5(x - 200), & x > 200. \end{cases}$$

例 2　设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ x^2, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(1 + \Delta x)$.

解　对分段函数求函数值时，首先看自变量 x 属于哪一范围，然后代入相应的表达式中去求其值. 因此，

$f(0)=1,\ f(1)=1^2=1,\ f(2)=2^2=4,$

当 $\Delta x<0$ 时，$f(1+\Delta x)=1,$

当 $\Delta x\geqslant 0$ 时，

$$f(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2=1+2\Delta x+(\Delta x)^2.$$

例 3　设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<1\\ x^2, & x\geqslant 1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases},$$

求 $f(x)+g(x)$.

解　因为要在自变量相同范围内才好进行运算，所以必须先以 $f(x)$、$g(x)$ 的分段点重新把它们的共同定义域分段，然后再在每一段内进行运算. 于是有

当 $x<0$ 时，$f(x)+g(x)=1+(1-x)=2-x;$

当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)+g(x)=1+x;$

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)+g(x)=x^2+x.$ 故

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}2-x, & x<0\\ 1+x, & 0\leqslant x<1.\\ x^2+x, & x\geqslant 1\end{cases}$$

§ 1.4　函数的复合与分解

基本初等函数是函数中最简单的一类，它包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数（见附表）. 我们常见的函数多是由基本初等函数和常数经有限次四则运算和复合所得到的初等函数.

所谓复合函数就是把两个或两个以上的函数组合成一个新的函数. 例如

$$y=u^3-3,\ u=\sin x \text{ 组合成 } y=\sin^3 x-3.$$

y 通过 u 而成为 x 的函数，称 y 为 x 的复合函数. 一般有

定义　设 $y = f(u)$ 是定义在 U 上的函数，$u = \varphi(x)$ 是定义在 D 上的函数，若任何 $x \in D$，对应的 $u \in U$，则称 $y = f[\varphi(x)]$ 是函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，它的定义域为 D. u 叫做**中间变量**.

例 1　函数

$$y = f(u) = e^u, u = \varphi(x) = \ln x,$$

易知 $f(x)$ 的定义域 $U = (-\infty, +\infty)$；$\varphi(x)$ 的定义域 $D = (0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$. 显然，对任何 $x \in D$，对应的 $u \in U$，所以这两个函数可以组成复合函数

$$y = f[\varphi(x)] = e^{\ln x},\ x \in (0, +\infty).$$

例 2　函数

$$y = f(u) = \sqrt{u}, U = [0, +\infty),$$

$$u = \varphi(x) = 1 - x^2, D = (-\infty, +\infty)$$

显然当 $|x| > 1$ 时对应的函数值 $u < 0$，使 $f(u)$ 无意义，所以这两个函数不能直接复合. 如果我们把 x 限制在 $[-1,1]$ 上，则对应的 $u \in U$. 于是可以组成复合函数

$$y = f[\varphi(x)] = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1,1].$$

利用复合函数概念，可以将一个较复杂的函数看成由几个简单函数(基本初等函数或基本初等函数、常数经四则运算所得的函数)复合而成，以便于对函数进行研究. 这就是我们所说的函数的“分解”。

例 3　函数 $y = \cos x^2$ 可以看成由 $y = \cos u$，$u = x^2$ 复合而成. 即 $y = \cos x^2$ 可“分解”为：$y = \cos u, u = x^2$.

例 4　函数 $y = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$ 可以看成由

$$y = \ln u, u = 1 + \sqrt{v}, v = 1 + x^2$$

复合而成.

§1.5 常用的几个经济函数

这里介绍几个经济学中常见的函数.

一、需求函数 一种商品的需求量要受消费者的偏好，消费者的收入、商品价格等因素的影响. 一般说来，商品价格是最主要因素. 如果不考虑其它因素，把需求量 Q 只看成价格 p 的函数，即 $Q = f(p)$，于是称此函数为**需求函数**. 需求函数 $Q = f(p)$ 一般是 p 的递减函数. 反过来，价格 p 也可以表成需求量 Q 的函数，$p = g(Q)$，叫做**价格函数**.

例 1 某产品，若每件售价 70 元，可卖去 10000 件，价格每增加 3 元就要少卖 300 件，求需求量 Q 与价格 p 的函数关系.

解 设价格由 70 元增加 k 个 3 元，则价格 p 和需求量 Q 分别为 $p = 70 + 3k, Q = 10000 - 300k$，于是 $k = \frac{1}{3}(p - 70)$，代入得

$$Q = 17000 - 100p, p \in (70, 170].$$

二、成本函数 工厂生产某种产品，生产准备费 b 元，称为**固定成本**，用于维修、添制设备等. 每单位产品消耗原材料、劳力等费用 a 元，称为**可变成本**. 则生产 x 件产品的总成本为 $C(x) = ax + b$，每件产品的成本（叫做单位成本或平均成本）为 $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.

三、销售收入函数 设某种产品的销售量为 x，价格为 p，则销售收入函数为 $R = p \cdot x$. 一般 p 又可表成 x 的函数，所以销售收入函数可看成 x 的函数 $R(x)$.

四、利润函数 设 x 件产品的成本为 $C(x)$，销售收入为 $R(x)$，则利润为 $L(x) = R(x) - C(x)$.

若把上面的产品看成商店的某种商品，则 $C(x)$、$R(x)$、$L(x)$ 应分别是 x 件商品的总成本，销售总收入，总利润.

例 2　工厂生产某种产品，生产准备费 1000 元，可变成本 4 元，单位售价 8 元，求：(1) 总成本函数；(2) 单位成本函数；(3) 销售收入函数；(4) 利润函数.

解　设产量为 x，则

(1) 总成本 $C(x) = 1000 + 4x$，

(2) 单位成本 $\overline{C}(x) = \dfrac{1000}{x} + 4$，

(3) 销售收入 $R(x) = 8x$，

(4) 总利润 $L(x) = 8x - (1000 + 4x) = 4x - 1000$.

除了以上几种经济函数以外，还有一些其它经济函数，如存贮费用函数、运输费用函数等等. 下面再举两个例子.

例 3　某厂在一年内分若干批生产某种车床，年产量为 a 台，每批生产准备费 b 元，设产品均匀投入市场(即平均库存量为批量的一半)，每年每台库存费为 C 元. 显然，生产批量大则库存费高，生产批量小则批数增多，因而生产准备费高. 试求出一年中库存费与生产准备费之和与批量的函数关系.

解　设批量为 x，库存费与生产准备费之和为 $p(x)$，则全年的生产准备费为 $\dfrac{a}{x}\cdot b$，库存费为 $\dfrac{x}{2}\cdot c$，

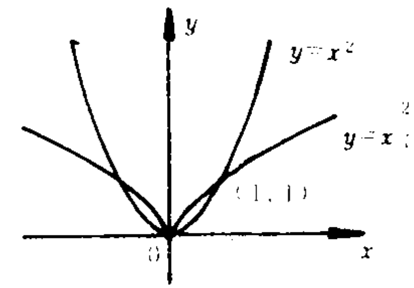
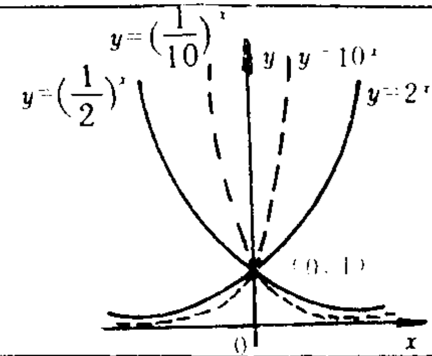
所以
$$p(x) = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2}x, x \in (0, a].$$

例 4　(复利息问题) 设银行将数量为 A_0 的款贷出，每期利率为 r，若一期结算一次，则 t 期后连本带利可收回 $A_0(1 + r)^t$.

若每期结算 m 次，则 t 期后连本带利可收回 $A_0\left(1 + \dfrac{r}{m}\right)^{tm}$. 可以把它看成期数 t 的函数，也可以看成结算次数 m 的函数.

现实世界中一些事物的生长($r > 0$)或衰减($r < 0$)就遵从这种规律，而且是立即产生立即结算(即 m 无限增大，见后面 §2.6 例 12). 例如，细胞的繁殖、树木的生长、物体的冷却、放射性元素的衰减等等.

附表

函　　数	定义域	值　　域	图　　形
幂函数 $y = x^a$(a 为实数)	随 a 而异	随 a 而异	
指数函数 $y = a^x(a > 0, a \neq 1)$ 特别地，$a = e$ 时，$y = e^x$ $(e = 2.718281828459045\cdots)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	
对数函数 $y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$ 特别地，$a = e$ 时，$y = \ln x$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$