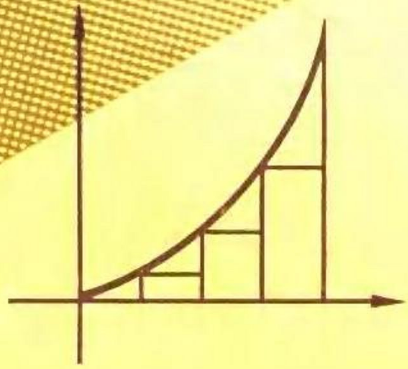
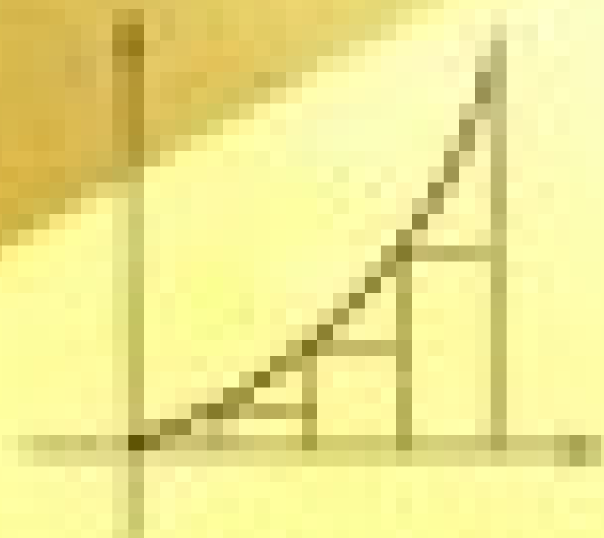


河南财经学院微积分编写组

经济数学基础 (一)

微积分

河南大学出版社



（一）

微积分

经济数学基础（一）

微 积 分

河南财经学院微积分编写组编

责任编辑 程 庆

河南大学出版社出版

（开封市明伦街85号）

河南第一新华印刷厂印刷

开本：850×1168毫米1/ 2 印张： 16.5 字数：413千字

1991年 6 月第 1 版 1991年 6 月第 1 次印刷

印数：1—5000 定价：6·80元

ISBN7-81018-655-8/O·37

前　言

国家教委高教司于1989年10月颁发了包括经济数学基础、计算机应用基础等高等学校财经类专业11门核心课程的教学大纲，旨在提高财经类专业总体办学水平．由于目前使用的教材都不同程度地与新颁大纲不相吻合，因而编写出版与新颁大纲相适应的配套教材成了贯彻新大纲的当务之急．为此，我系成立了教材编写委员会，在编委会的统筹组织领导下，编写了经济数学基础的三个分册：《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》以及《计算机应用基础》四本教材．

《微积分》与目前国内同类教材相比较有以下几个特点：

第一，该书符合新颁大纲要求，体现了新颁大纲精神，在内容取舍、顺序安排以及学时分配诸方面均和新颁大纲相吻合．

第二，该书充实和加强了数学在经济方面应用的内容，增加了在经济管理中应用较多的新知识和新方法．如对经济函数、极值理论、微分方程和差分方程等内容都有所加强．

第三，该书注重概念教学．引进概念重视介绍背景，力求自然；讲述概念简洁明了，加强几何直观．定理部分，重点放在分析思路、突出证明方法和定理的应用上；同时，注重基本方法和技巧的训练．书中配有相当数量的各种类型的典型例题，开拓读者思路，以培养其分析问题和解决问题的能力．

第四，各章都配备有相当数量各种类型不同层次的习题，并分为A、B两组．A组为普通题型，B组为是非判断和选择两大类标准化试题题型．书末附有全部习题的提示和答案，供读者查对，也为自学者提供方便．

第五，该书为适合本科或大专不同层次的需要，对于内容较深要求较高的部分加了“*”号，使用时可视具体情况酌情取舍。因此，该书不仅可以作为高等学校财经类各专业本科在校生的教材，同时也可以作为电大、函大、职大、夜大以及成人高教自考经济类专业高等数学课程的教材或参考书。

《微积分》参加编写的有：李立志、姜效先、姚作为、王晓燕、臧振春、侯俊林、陈非、张建生、王明生、陈亦华、张新祥同志。

参加审稿的有：姜效先、臧振春、陈亦华、王明生、陈非、熊大忠同志。

《微积分》能较快与读者见面，是与河南财经学院副院长侯恒教授的关怀指导以及学院教务处、成人教育部的大力支持分不开的。该书在编写过程中得到了河南省数学会副理事长孙荣光教授的关怀指导，孙教授亲自担任了该书的主审。在河南大学出版社许多同志的热情帮助和辛勤工作下，该书终于刊印成册。在此，谨向侯恒、孙荣光教授以及院教务处、成人教育部和河南大学出版社表示最诚挚的谢忱。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者不吝赐教，将不胜感激。

河南财经学院经济信息系教材编写委员会

1991年元月于河南财经学院。

目　录

第一章　函　　数

函数是微积分的研究对象．由于函数在微积分中的重要地位，有必要将函数的基本知识作一归纳和复习．

第一节　预备知识

（一）集合

1.集合的概念

集合是数学中一个最基本的概念．一般说来，若干具有某种特性的确定的而又彼此不相同的对象的全体就称为集合．集合中的各个对象叫做集合的元素，通常用大写字母 A，B，$C\cdots$ 表示集合，而用小写字母 a，b，$c\cdots$表示集合的元素．若 a 是集合 A 中的元素，用$a\in A$表示，读作 a 属于A；否则用 $a\overline{\in}A$表示，读作 a 不属于A．

例 1　某院校某年招收的全体学生的集合．

例 2　全体自然数构成的集合．

例 3　满足$x>2$的所有实数构成的集合．

由有限个元素构成的集合，称为有限集；由无限个元素构成的集合，称为无限集．

2.集合的表示法

集合通常采用两种表示法，一种是按任意顺序列出所有集合中的元素，并用花括号{　}括起来，这种方法叫列举法，一般适用于有限集合．采用列举法应注意元素不许重复，不许遗漏，集合与元素列举顺序无关．另外一种方法是先写出元素的一般形

式，然后描述集合中元素所具有的特征，中间用竖线隔开，放在花括号{ }内，这种方法称为描述法．描述法在用以表示无限集时更为方便．

例 4 由a，b，c，d四个元素组成的集合A，用列举法可表示为

$$A=\{a, b, c, d\}.$$

例 5 设A为全体偶数的集合，用描述法可表示为

$$A=\{x \mid x=2n,\ n\text{为整数}\}.$$

例 6 满足 $x^2+y^2=1$ 的所有点构成的集合，用描述法可表示为

$$A=\{(x, y) \mid x^2+y^2=1\}.$$

在研究集合及集合间的关系时，数学中也常用图形来表示集合，这种方法称为文氏图法．

由研究的所有事物构成的集合称为全集，记为U．全集的概念具有相对性．不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$．如果集合A所有元素都是集合B的元素，则称A为B的子集，记为$A\subset B$或$B\supset A$，读作A包含于B或B包含A．如果对于集合A和B，$A\subset B$与$B\subset A$同时成立，则称A与B相等，记作$A=B$．

3.集合的运算

关于集合，可以定义下列几种运算：

(1) 集合的并

设有集合A和B，由A和B的所有元素构成的集合，称为A与B的并，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

集合的并有下列性质：

① $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$．

② 对任何集合A，有

$A\cup\varnothing=A$，$A\cup U=U$，$A\cup A=A$．

(2) 集合的交

设有集合A和B，由A和B的所有公共元素构成的集合，称为A与B的交，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{且} x\in B\}.$$

集合的交有下列性质：

① $A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$.

② 对任何集合A，有

$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap U=A$，$A\cap A=A$.

(3) 集合的差

设有集合A和B，属于A而不属于B的所有元素构成的集合称为A与B的差，记为$A-B$，即

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{且} x\overline{\in} B\}.$$

(4) 集合的补集

全集U中所有不属于A的元素构成的集合称为A的补集，记为$\bar{A}$，即

$$\bar{A}=\{x \mid x\in U \text{且} x\overline{\in} A\}.$$

补集有下列性质：

$$A\cup\bar{A}=U,\quad A\cap\bar{A}=\varnothing.$$

集合间的运算满足以下运算律：

① 交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

② 结合律

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

③ 分配律

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

④ 摩根律

$\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{(A\cap B)}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

如果集合中所含的元素全部为实数，则称这种集合为实数集（简称数集）。

（二）实数及其几何表示

实数由有理数与无理数组成。有理数可以表示为$\frac{p}{q}$，其中p，q都是整数，且$q\neq0$。无理数不可以表示成$\frac{p}{q}$形式。如果用小数表示，则有理数可以表示成有限小数或无限循环小数，无理数可以表示成无限不循环小数。

设一条水平直线，在其上取定一点O，称为原点，用这点表示零。规定这条直线一个正方向（习惯上规定由原点向右的方向）。再规定一个长度作为单位长度。这种具有原点、方向和单位长度的直线称为数轴，如图1—1。原点、方向和单位长度是确立数轴的三要素。

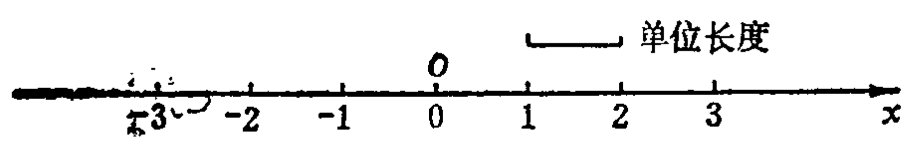


图 1—1

在中学里已经学过用数轴上的点表示数的方法。我们知道任何一个实数都可以表示为数轴上的一个点，而数轴上的任何一点都代表一个实数。由于实数和数轴上的点是一一对应的，为简便起见，我们可以用一个字母或数字不加区别地表示数或数轴上对应的点。

（三）实数的绝对值及其基本性质

实数x的绝对值$|x|$定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0\\-x, & x<0\end{cases}$$

在数轴上，$|x|$表示点x到原点O的距离．如果x和y是两个不同的实数，则$|y-x|$表示的是点x与y之间的距离．

由实数的绝对值定义及其几何意义，显而易见

$$|x|\geqslant 0,\quad |-x|=|x|,\quad -|x|\leqslant x\leqslant |x|,$$

$$|x|^2=x^2,\quad \sqrt{x^2}=|x|.$$

绝对值有以下最基本的性质：

(1) 若$|x|=0$，则$x=0$。

(2) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$.

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$（三角不等式）。

此外，还有下面一些常用的性质：

(4) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

事实上，由于

$$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|,$$

所以 $$|x-y|\geqslant|x|-|y|.$$

(5) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad y\neq 0$.

(6) 如果$a>0$，则有

$$\{x\mid |x|\leqslant a\}=\{x\mid -a\leqslant x\leqslant a\}.$$

(7) 如果$a>0$，则有

$$\{x\mid |x|\geqslant a\}=\{x\mid x\leqslant -a\}\cup\{x\mid x\geqslant a\}.$$

根据绝对值的几何意义，读者不难证明性质(6)与性质(7)。

（四）区间与邻域

1.区间

在以后的讨论中，常常要用到一种特殊的点集，这种点集称为区间．具体地说，设a，b为实数，且$a<b$，则定义

$$(a,\ b)=\{x\mid a<x<b\},$$

称为以a，b为端点的开区间，见图1—2．

$$[a,\ b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$

称为以a，b为端点的闭区间，见图1—3。

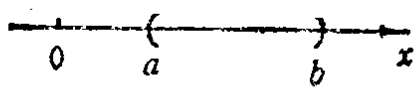


图 1—2

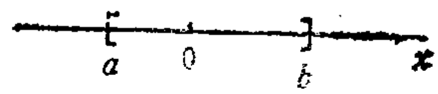


图 1—3

$$(a,\ b]=\{x \mid a<x\leqslant b\},$$
$$[a,\ b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},$$

分别称为以 a，b 为端点的两种半开半闭区间，见图 1—4 和图 1—5。

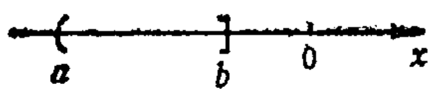


图 1—4

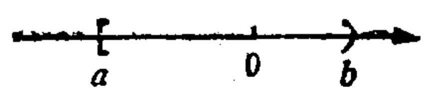


图 1—5

以上区间统称为有限区间，有限区间右端点与左端点的差$b-a$称为区间的长度。此外，还要常常用到以下几类无限区间，它们分别定义为

$$(a,\ +\infty)=\{x \mid a<x\},$$
$$[a,\ +\infty)=\{x \mid a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,\ b)=\{x \mid x<b\},$$
$$(-\infty,\ b]=\{x \mid x\leqslant b\},$$
$$(-\infty,\ +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}.$$

2.邻域

在以后讨论问题时，经常需要考虑点x_0附近的点，这些点的集合就是邻域。具体地说，设x_0是任意给定的点，δ 是一正数，则实数集

$$\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$$

称为点x_0的δ邻域。根据绝对值性质，上述集合可以化为

$$\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$

它表示以点x_0为中心、长为2δ的开区间。x_0称为邻域的中心、δ称为邻域的半径，如图1—6所示。

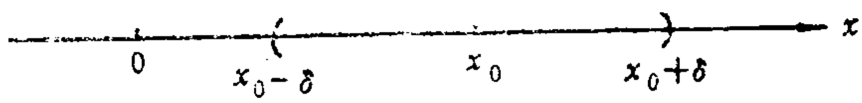


图 1—6

显然，给定的δ不同，得到的x_0邻域不同

如果在上述邻域定义中去掉x_0点，则集合

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$$

称为以x_0为中心，半径为δ的空心邻域，如图1—7所示。

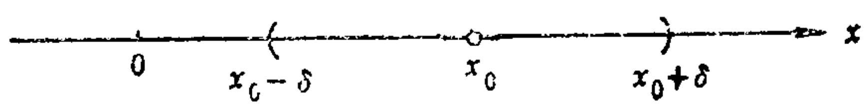


图 1—7

例如，集合$\{x \mid |x-2|<0.1\}$表示点$x_0=2$的0.1邻域，即开区间(1.9，2.1)。集合$\{x \mid 0<|x-1|<2\}$表示以点$x_0=1$为中心，半径为$\delta=2$的空心邻域。显然

$$\{x \mid 0<|x-1|<2\}=(-1,\ 1)\cup(1,\ 3).$$

第二节　函数概念

（一）常量与变量

自然现象和社会现象无时无刻不在发生变化，在各种各样的变化过程中，有许多描述不同问题的量，如时间、长度、面积、价格、成本、利润等等。这些量一般可以分为两种：一种是在我们考察的某一变化过程中自始至终保持不变（取同一数值）的

量，这种量叫常量；另一种是在考察的变化过程中可以发生变化的量（可以取不同数值），这种量叫变量．如在研究某一生产企业一确定时间段内的经济收益时，企业商品的价格是P，商品的销售量是Q，企业商品的销售总收益是R，则有

$$R=PQ.$$

随销售量Q的变化，总收益R也在发生变化，它们都是变量。而价格P一般看成是不变量，即为常量．

在经济问题的研究中需要特别注意的是，常量与变量并不是绝对的，一种量在某一过程中是常量，而在另一过程中则可能就是变量．另外，在同一变化过程中，有些经济问题为了研究简单或者为了使某一因素的作用更加突出，常常把变化很小的或者对所研究的问题作用甚小，且计量是有效数字的量也看成是常量．例如在研究某企业的商品需求状况时，为了突出商品价格对需求的影响，常常把消费者的收入以及其它商品替代品的价格变化看成是不变量．此外，在有些情况下，为了使叙述的问题具有一般性，常常也把常量看成是取同一数值的变量．

常量一般用字母a，b，c…表示，变量用x，y，z，t，u，v…表示．

（二）函数概念

在自然现象和社会经济现象的发展变化过程中，许多量的变化往往不是孤立地进行，而是遵循着一定的规律相互依赖又相互制约地变化着的．这种变化规律通常由变量在变化过程中的数值对应关系反映出来，我们把这种变量之间确定的对应关系叫做函数关系．

例 1 某物体在自由落体运动过程中，物体走过的路程与其所经过的时间之间所遵循规律即函数关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$