

张君达 主编

# 小学教材

● 修订版

# 北京数学奥林匹克

四年级

北京科学技术出版社



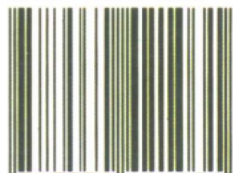
● 封面设计 罗 瑞

责任编辑

刘长梅



ISBN 7-5304-2103-4



9 787530 421031 >

ISBN 7-5304-2103-4/Z · 944

定价：9.60元

张君达 主编

郭春彦 于金海  
兰 英 石长地

编

6. 65

## 修订版序言

1987年一次偶然的机会有，我主持并编写了小学生的数学课外读物：《小学数学奥林匹克专题讲座》与《小学数学奥林匹克习题与解答》。或许是当时与此同类的书不多的缘故，一年左右竟印了10余万套！次年还被评为全国优秀图书。

家长与学生的来信，出版社的邀请，愈发鼓励我们考虑：怎样才能保证新书的新意？如果说《小学数学奥林匹克丛书》（1989年出版）是为不同年级提供的兴趣小组的读物，那么《北京数学奥林匹克小学教材》（1992年出版）则是着眼于数学业余学校的课程建设并为常规学校课外活动提供的教学参考资料。本次付印的“教材”修订版是作者经过五年的教学实验后，重新编排、撰写的，其整体设计与内容选材等方面都较第一版有了较大的改进。

我国的九年义务教育制及双休日的实施，给孩子们积极、主动地发展提供了时间和空间。如何给学有所长的孩子以更好的数学学习与发展？这是家长、教师与社会关切的一个热门话题。1994年在保加利亚我与国家数学竞赛世界联盟协会主席奥哈伦教授交谈时，有一致的看法：激发数学学习兴趣、指导学习方法、培养思维能力是数学教育中的关键。正是基于这一点，我所主编的小学生数学课外读物中始终体现了“兴趣是诱发良好学习动机的源泉”“思维是智力与能力的核心”的观点。

坚持理论与实践的研究使我们撰写的普及读物具有一定的前瞻性与创新性的基础。自1988年以来，我指导的“数学学习心理”，“奥林匹克数学的理论与实践”，“数学智力开发”等

方向的硕士生得到了很好的实验研究的成果。我与他们合作多次在国际会议上报告与国内外学术刊物上发表:

- |                |                 |
|----------------|-----------------|
| 中国数学早慧少年的测试与评估 | (1989,日本)       |
| 数学早慧少年的学习与发展   | (1992,中国)       |
| 资优少年的数学智力开发    | (1994,保加利亚)     |
| 青少年的数学智力开发     | (1995,新加坡、马来西亚) |
| 数学创造思维的培养      | (1996,西班牙)      |
| 数学逆向思维的培养      | (1997,台湾、美国)    |

上述实验研究的被试者多是我们数学业余学校的学生,其理论依据是数学学习心理乃至教育与发展心理,实验设计方案中有一部分是从“教材”设计方案中脱化、演变而得到的。1997年我与美国史翠大学的帕福利克教授谈及思维的培养时,一致认为:今后的教育与发展心理将会在数学教育中寻求到更好的新的生长点。

时至今日,“青少年的数学智力开发”,“数学业余学校的教材建设”已不仅是教育工作者研究的课题,它已得到社会各界的认同与日益倍增的关注。新年伊始,世纪之交在即,愿“实验教材”能为新世纪的人才培养尽菲薄之力,望能成为青少年数学爱好者的良师益友。

限于水平与经验,“教材”修订版中的欠缺之处,尚请读者不吝指正。

张君达

1998年元旦

# 目 录

## 第一学期

|                     |      |
|---------------------|------|
| 一、数字趣题(一) .....     | (3)  |
| 二、数字趣题(二) .....     | (12) |
| 三、数图形(一) .....      | (21) |
| 四、数图形(二) .....      | (29) |
| 五、钉板与皮筋 .....       | (37) |
| 六、平均数问题 .....       | (45) |
| 七、鸡兔同笼与假设法 .....    | (50) |
| 八、再用假设法 .....       | (57) |
| 九、排列条件解应用题(一) ..... | (64) |
| 十、排列条件解应用题(二) ..... | (72) |
| 十一、最短路线 .....       | (80) |
| 十二、定义新运算 .....      | (89) |

## 第二学期

|                    |       |
|--------------------|-------|
| 一、简单的数列问题(一) ..... | (97)  |
| 二、简单的数列问题(二) ..... | (104) |
| 三、简单的数列问题(三) ..... | (111) |
| 四、方阵中的数学问题 .....   | (118) |
| 五、相遇问题 .....       | (127) |
| 六、追及问题 .....       | (133) |
| 七、行船问题 .....       | (141) |
| 八、进位制(一) .....     | (147) |
| 九、进位制(二) .....     | (156) |
| 十、加法原理 .....       | (166) |

|               |       |
|---------------|-------|
| 十一、乘法原理 ..... | (174) |
| 十二、重重叠叠 ..... | (183) |

## 选 讲

|                    |       |
|--------------------|-------|
| 一、再谈数字趣题 .....     | (195) |
| 二、再谈钉板与皮筋 .....    | (203) |
| 三、简单的数列问题(四) ..... | (213) |
| 四、七桥问题与一笔画 .....   | (221) |
| 五、数阵图 .....        | (230) |
| 六、进位制的应用 .....     | (238) |

## 练习题答案

|           |       |
|-----------|-------|
| 第一学期..... | (249) |
| 第二学期..... | (256) |
| 选 讲.....  | (260) |

# 第一学期



## 一、数字趣题(一)

我们在三年级时曾经学过解数字谜,从这节开始我们再学习一些较为复杂的数字问题,就叫做数字趣题吧!这些数字趣题的解法与数字谜的解法是类似的。请看下面的例题:

**例1** 在下面乘法竖式的空格内,各填上一个合适的数字,使算式成立。

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & \square & 3 & \square & \\
 & & & 7 & \square & 4 & \\
 \times & & & \square & 4 & \square & \\
 \hline
 & & 1 & \square & 1 & \square & \\
 \square & 6 & \square & 5 & & & \\
 \hline
 1 & \square & 9 & \square & 4 & 0 & 
 \end{array}
 \end{array}$$

**分析:**

(1)审题

这是个乘法竖式,为了叙述方便起见,我们把关键性的空格用字母表示。

设被乘数为  $\overline{x3y}$  ( $\overline{x3y}$  表示百位数字是  $x$ , 十位数字是 3, 个位数字是  $y$  的三位数), 乘数是  $\overline{7z4}$ 。如下面的算式:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & x & 3 & y & \\
 & & & 7 & z & 4 & \\
 \times & & & \square & 4 & \square & \dots\dots \text{第一个部分积} \\
 \hline
 & & 1 & \square & 1 & \square & \dots\dots \text{第二个部分积} \\
 \square & 6 & \square & 5 & & & \dots\dots \text{第三个部分积} \\
 \hline
 1 & \square & 9 & \square & 4 & 0 & \dots\dots \text{乘积}
 \end{array}
 \end{array}$$

根据竖式乘法的法则,有下面的数量关系:

$$\overline{x3y} \times 4 = \square 4 \square \cdots \cdots \text{第一个部分积}$$

$$\overline{x3y} \times z = 1 \square 1 \square \cdots \cdots \text{第二个部分积}$$

$$\overline{x3y} \times 7 = \square 6 \square 5 \cdots \cdots \text{第三个部分积}$$

(2) 选择突破口

我们看到,在这个算式中只要把被乘数 $\overline{x3y}$ 、乘数 $\overline{7z4}$ 先填出来,其它的空格根据竖式乘法的法则就很容易填出来了。因此,解这个问题的突破口是填出被乘数 $\overline{x3y}$ 和乘数 $\overline{7z4}$ 。

(3) 试验求解

①由第三个部分积 $\overline{x3y} \times 7 = \square 6 \square 5$ ,可知, $y=5$ 。

②由第一个部分积 $\overline{x3y} \times 4 = \square 4 \square$ ,这个积是3位数,可知 $x \leq 2$ ,否则这个积将超过3位数。也就是说, $x$ 可以取1或2。

又由第三个部分积 $\overline{x3y} \times 7 = \square 6 \square 5$ ,这个积是4位数,可知 $x \geq 2$ ,也就是说, $x$ 可以取2至9中的任意一个数。为了使第一、三这两个部分积都成立, $x$ 只能取2。因此,被乘数 $\overline{x3y}$ 是235。

③由第二个部分积 $235 \times z = 1 \square 1 \square$ 可知, $z$ 是大于5的偶数,也就是说, $z=6$ 或8。

试验:

当 $z=8$ 时, $235 \times 8 = 1760$ ,这个积的十位是6,不合题意。

当 $z=6$ 时, $235 \times 6 = 1410$ ,符合题意,即 $z=6$ 。

所以,乘数 $\overline{7z4}$ 是764。

由于被乘数、乘数知道了,这样其它的空格就都可以填出来了。我们把这个问题的解写在下面。



# 分析:

根据除法和乘法的逆运算关系,在整除的情况下,有下面的关系:被除数=商数×除数。因此如果能先填出商数和除数,那么被除数就可以算出来了,再利用竖式除法法则即可填出其余的空格。所以,商数和除数中的空格是解此题的突破口。

为了叙述方便,我们假设商数为 $\overline{a8b}$ ,除数为 $\overline{xyz}$ ,如下面的算式:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc} \boxed{x} & \boxed{y} & \boxed{z} \end{array} \overline{) \begin{array}{ccccccc} & & & \boxed{a} & 8 & \boxed{b} & \\ \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \cdots \text{第1行} \\ \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & & & \cdots \text{第2行} \\ \hline & & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & & \cdots \text{第3行} \\ & & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & & \cdots \text{第4行} \\ \hline & & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \cdots \text{第5行} \\ & & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \boxed{\phantom{0}} & \cdots \text{第6行} \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}}
 \end{array}$$

根据竖式除法法则,有下面的关系:

$$\overline{xyz} \times a = \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \text{ (第2行)}$$

$$\overline{xyz} \times 8 = \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \text{ (第4行)}$$

$$\overline{xyz} \times b = \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \text{ (第6行)}$$

$$\text{由 } \overline{xyz} \times 8 = \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \text{ 可知, } x=1;$$

$$\text{由 } \overline{xyz} \times a = \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}} \text{ 可知, } a>8, \text{ 这样 } a \text{ 只能是 } 9;$$

同理可知  $b=9$ 。因此,商数是 989。

由于  $x=1$ ,这样算式 $\overline{xyz} \times 8 = \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$ 就变成 $\overline{1yz} \times 8 = \boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}\boxed{\phantom{0}}$ ,由这个算式可知除法竖式中第4行的最高位可能是8或9。但又知第3行减去第4行所得的差仍是三位数

(即第 5 行), 所以第 4 行  $\square\square\square$  的最高位只能是 8, 而第 3 行  $\square\square\square$  的最高位是 9, 第 5 行的最高位是 1。也就是说:

$$\overline{1yz} \times 8 = 8\square\square$$

$$\overline{1yz} \times 9 = 1\square\square\square$$

由这两个算式可以推得  $y=1, z=2$ , 所以除数是 112。

由商数 989, 除数 112, 可以算出被除数是  $989 \times 112 = 110768$ , 问题解决了。

解:

$$\begin{array}{r}
 \phantom{112} \overline{989} \\
 112 \overline{) 110768} \\
 \underline{110} \phantom{8} \\
 \phantom{110} 8 \\
 \phantom{110} \underline{996} \\
 \phantom{110} 896 \\
 \phantom{110} \underline{896} \\
 \phantom{110} 1008 \\
 \phantom{110} \underline{1008} \\
 \phantom{110} 0
 \end{array}$$

由例 2 可以看出: 填除法竖式问题时一般应选择商数和除数中的空格作为解题突破口。另外, 此算式中有些数量关系比较隐蔽, 例如  $\overline{1yz} \times 8 = 8\square\square$ , 就是个隐蔽的数量关系, 它是我们经过一番分析之后才发现的, 而这个关系正是求出除数 112 的关键。所以解这种数字问题时必须注意找出隐蔽的数量关系。

我们看到, 例 2 的算式中只有一个已知数字 8, 有的书上把这个算式叫做“孤独的 8”。一般地说, 在一个算式中如果给出的已知数愈少, 那么这个题就愈难解。

数字问题的形式不仅限于填算式，它的形式多种多样，下面我们再来看一个例题：

**例 3** 将 1~9 这 9 个数字分别填入图 1-1-1 的格子中，使每 1 横行的 3 个数组成 1 个三位数，并使第 2、3 行的三位数分别是第 1 行三位数的 2 倍和 3 倍。

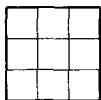


图 1-1-1

|     |     |     |
|-----|-----|-----|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $d$ | $e$ | $f$ |
| $g$ | $h$ | $i$ |

图 1-1-2

**分析：**

为叙述方便，我们把空格内分别写上字母  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $e$ 、 $f$ 、 $g$ 、 $h$ 、 $i$ ，如图 1-1-2。

应该先填哪些空格呢？不难看出，在这 3 个三位数中以  $\overline{abc}$  为最小，只有当  $a$  确定之后，其它的空格才好确定，因此应该从  $a$  开始填。

空格  $a$  填什么数呢？由于三位数  $\overline{def}$ 、 $\overline{ghi}$  分别是  $\overline{abc}$  的 2 倍和 3 倍，所以  $a$  只可能是 1、2、3。

(1) 当  $a=1$  时，由于  $\overline{def}$  是  $\overline{abc}$  的 2 倍，所以  $f$  是个偶数，即  $f$  可能取 2、4、6、8。

①如果  $f=2$ ，那么  $c=1$ 、6。

若  $c=1$ ，则与  $a=1$  重复，不行；

若  $c=6$ ，则  $i=8$ ，而  $b$  无值可取，不行。

②如果  $f=4$ ，那么  $c=2$ 、7。

若  $c=2$ ，则  $i=6$ ， $b=9$ ， $e=8$ ， $d=3$ ， $h=7$ ， $g=5$ ，找到 1 个解；

若  $c=7$ ，则  $i=1$  与  $a=1$  重复，不行。

③如果  $f=6$ ，那么  $c=3$ 、8。

若  $c=3$ , 则  $i=9$ , 而  $b$  无值可取, 不行;

若  $c=8$ , 则  $i=4$ , 而  $b$  无值可取, 不行。

④如果  $f=8$ , 那么  $c=4, 9$ 。

若  $c=4$ , 则  $i=2$ , 而  $b$  无值可取, 不行;

若  $c=9$ , 则  $i=7$ , 而  $b$  无值可取, 不行。

(2) 当  $a=2, a=3$  时, 请同学们自己试验求解。

**解:**

这个题有四个解, 见图 1-1-3。

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 2 |
| 3 | 8 | 4 |
| 5 | 7 | 6 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 3 |
| 5 | 4 | 6 |
| 8 | 1 | 9 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 9 |
| 4 | 3 | 8 |
| 6 | 5 | 7 |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 3 | 2 | 7 |
| 6 | 5 | 4 |
| 9 | 8 | 1 |

图 1-1-3

由例 3 我们看到, 数字问题的解可能不只是一个, 例 3 就有四个解, 一般情况下只求出一个解就可以了。

## 练习一

1. 将图 1-1-4 中的 12、16、20 这 3 个数分别填入各空格中, 每个数可以用 3 次, 使每 1 横行、竖列、对角线上的 3 个数之和都等于 48。

|    |    |    |
|----|----|----|
|    | 20 |    |
| 12 |    |    |
|    |    | 16 |

图 1-1-4

$$\begin{array}{ccccccc}
 4 & + & \square & - & \square & = & 2 \\
 + & & | & & + & & + \\
 \square & - & 2 & + & 0 & = & \square \\
 | & & + & & | & & | \\
 \square & + & \square & - & 6 & = & 6 \\
 || & & || & & || & & || \\
 \square & + & 5 & - & \square & = & 3
 \end{array}$$

2. 在上面算式中的每个小方格内填上适当的数, 使得所有 4 个横向(行)及 4 个纵向(列)的等式都能成立。

3. 在下列各算式的空格内,各填上一个合适的数字,使算式成立。

(1)

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \quad \square \square 5 \\
 \hline
 \quad \quad 1 \square \square \\
 \quad 2 \square \square 5 \\
 1 \quad 3 \square 0 \\
 \hline
 \square \square \square \\
 4 \square 7 7 \square
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \quad \square \square \square \\
 \hline
 \quad \quad \square 2 1 \\
 \quad \square \square \square \square \\
 \square \square \square \square \\
 \hline
 \square \square 8 \square \square \\
 \square \square 9 \square 2 \square
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{r}
 \square \square \\
 7 \square \square \overline{) 8 \square \square \square} \\
 \underline{\square \square \square} \phantom{\square} \\
 \square \square \square \square \\
 \underline{\square \square \square} \square \\
 \square \square 6 \square \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

(4)

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \overline{) \square \square \square \square \square \square \square \square} 7 \square \square \square \square \\
 \underline{\square \square \square} \square \square \square \square \square \square \square \square 8 \\
 \square \square \square \square \square \square \square \square \\
 \underline{\square \square \square} \square \square \square \square \square \square \square \square \\
 \square \square \square \square \square \square \square \square \\
 \underline{\square \square \square} \square \square \square \square \square \square \square \square \\
 \square \square \square \square \square \square \square \square \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

4. 将 1~9 分别填入下面算式的空格内(每个数字只许用 1 次),使算式成立(分、秒前面的两位数,都要求小于 60)。