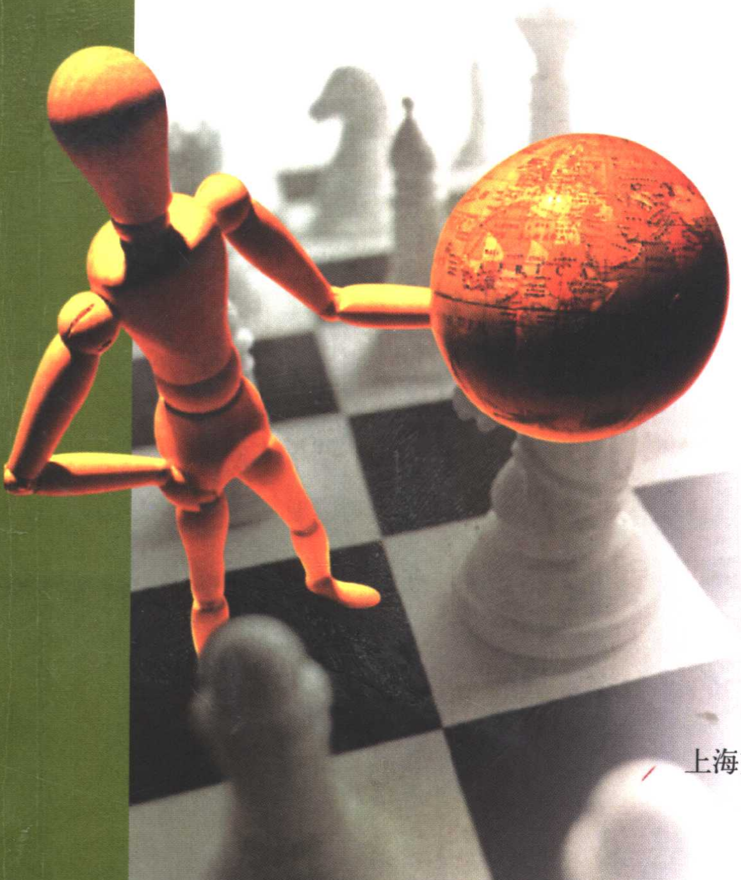
TI DIAN

工程数学题典

（二）

贺才兴 编



上海交通大学出版社

工程数学题典

（二）

贺才兴　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书分成三篇。第一篇复变函数，从复数到保角映射，共六章。第二篇积分变换，从傅氏变换到拉氏变换，共两章。第三篇特殊函数与数学物理方程，从贝塞尔函数到拉普拉斯方程，共五章。全书共三篇十三章。

全书精选了300道“复变函数”、“积分变换”和“特殊函数与数学物理方程”的典型题。

大学生(或研究生)研读本书，并独立地思考地演算一些典型题目，必能举一反三，触类旁通，有助于提高自己的数学素养。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学题典. 2/贺才兴编. —上海:上海交通大学出版社,2002

ISBN 7—313—03049—5

Ⅰ. 工… Ⅱ. 贺… Ⅲ. 工程数学—高等学校—习题 Ⅳ. TB11-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 027534 号

工程数学题典(二)

贺才兴 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

常熟市文化印刷厂 印刷 全国新华书店经销

开本:890mm×1 240mm 1/32 印张: 11 字数:315 千字

2002 年 7 月第 1 版 2002 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—4 050

ISBN7—313—03049—5/TB・058 定价:17.00 元

序　言

《工程数学题典(二)》包含复变函数、积分变换和特殊函数与数学物理方程三部分内容。

"复变函数"、"积分变换"和"特殊函数与数学物理方程"是三门既有理论上的抽象性和逻辑推理的严密性,又有很强的应用性的数学学科。它们是提高数学素养,培养高素质人才的重要的基础课。目前,各级各类高等院校的电子类、电类、力学和机械类等大部分专业都开设了这几门课程,显然,对于各类高校的上述专业学生来说,学好这几门课程是十分重要的。

要学好这三门课程,必须对其基本概念和基本理论、基本方法有较全面的理解,并能准确而灵活地加以运用。独立地思考地演算一些典型的题目及掌握解析过程,是达到这些目标的有效方法之一。

本题典编入了300道具有典型、示范作用的"复变函数"、"积分变换"和"特殊函数与数学物理方程"的题目,涵盖了这三门学科的基本概念与基本方法。全书内容丰富,重点突出,简明扼要,层次分明,清晰易懂。对于一些较难或甚难的题目,则在题号前分别打上"*"或"**",便于读者选择。

一本好的题典不能是大量题目的简单堆砌,更不能写成大量练习题目的"仓库"。而应是一本有代表性、示范性的题集,使读者学后能举一反三,触类旁通。因此,本书稿为适应读者特别是大学生、研究生的这一迫切的学习需要,在选题上进行了必要的筛选。在筛选中既要体现科学的理性思维训练;又须具有必要的系统性和严谨性;讲概念注意其背景,讲数学思想体现演化过程。合理运用"推导"与"归纳"等方法,通过典型题目的演算,读者必能更好地掌握思考和分析数学问题的方法,从而从不同内容的内在联系上体会数学思维的精髓,同时提高分析问题和解决问题的综合能力。

面向21世纪,我国大学中的数学教育对人才培养的影响是一个十分重大的研究和实践课题,需要社会各界共同努力,多方开拓和创新。本书的出版也是一种小小的探索和尝试,希望它成为一把钥匙,能为广大读者打开方便之门,也希望是一座桥梁,能引导广大读者顺利通向成功之路。

本书出版过程中得到上海交通大学出版社的大力支持和帮助,在此表示感谢。

希望广大读者提出宝贵的意见。

编 者

2002年3月

目　　录

第一篇　复变函数

第二篇　积分变换

第三篇　特殊函数与数学物理方程

第一篇　复变函数

第一章　复　数

1. 求下列复数的实部、虚部、模、辐角主值及共轭复数：

(1) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$；　　(2) $\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}$；

(3) $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$；　　*(4) $(1+\mathrm{i})^{100}+(1-\mathrm{i})^{100}$；

(5) $\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}$；　　**(6) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)^n$（$n$ 是正整数）.

解　(1) $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$,

$$\operatorname{Re}z=0,\quad \operatorname{Im}z=-1,\quad |z|=1,\quad \arg z=-\frac{\pi}{2},\quad \bar{z}=\mathrm{i};$$

(2) $z=\dfrac{\mathrm{i}}{(\mathrm{i}-1)(\mathrm{i}-2)}=\dfrac{\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}=-\dfrac{3}{10}+\dfrac{\mathrm{i}}{10}$,

$$\operatorname{Re}z=-\frac{3}{10},\quad \operatorname{Im}z=\frac{1}{10},\quad |z|=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\arg z=\pi-\arctan\frac{1}{3},\quad \bar{z}=-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}\mathrm{i};$$

(3) $z=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}-\dfrac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}=\dfrac{16}{25}+\dfrac{8}{25}\mathrm{i}$,

$$\operatorname{Re}z=\frac{16}{25},\quad \operatorname{Im}z=\frac{8}{25},\quad |z|=\frac{8\sqrt{5}}{25},$$

$$\arg z=\arctan\frac{1}{2},\quad \bar{z}=\frac{16}{25}-\frac{8}{25}\mathrm{i};$$

*(4) $z=(1+\mathrm{i})^{100}+(1-\mathrm{i})^{100}=(2\mathrm{i})^{50}+(-2\mathrm{i})^{50}=-2^{51}$,

$$\operatorname{Re}z=-2^{51},\quad \operatorname{Im}z=0,\quad |z|=2^{51},$$

$$\arg z=\pi,\quad \bar{z}=-2^{51};$$

(5) $z=\mathrm{i}^8-4\mathrm{i}^{21}+\mathrm{i}=1-3\mathrm{i}$,

$$\operatorname{Re} z = 1,\quad \operatorname{Im} z = -3,\quad |z| = \sqrt{10},$$

$$\arg z = -\arctan 3,\quad \bar{z} = 1 + 3\mathrm{i};$$

**(6) $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}\right)^n=\cos\dfrac{n\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{n\pi}{3}$,

$$\operatorname{Re} z = \cos\frac{n\pi}{3},\quad \operatorname{Im} z = \sin\frac{n\pi}{3},\quad |z| = 1,$$

当 $n=6m\quad(m=1,2,\cdots)$时，$\arg z=0$，

当 $n=6m-1\quad(m=1,2,\cdots)$时，$\arg z=-\dfrac{2}{3}\pi$，

当 $n=6m-2\quad(m=1,2,\cdots)$时，$\arg z=-\dfrac{\pi}{3}$，

当 $n=6m-3\quad(m=1,2,\cdots)$时，$\arg z=\pi$，

当 $n=6m-4\quad(m=1,2,\cdots)$时，$\arg z=\dfrac{2}{3}\pi$，

当 $n=6m-5\quad(m=1,2,\cdots)$时，$\arg z=\dfrac{\pi}{3}$，

$$\bar{z} = \cos\frac{n\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

2. 求下列复数的值，并写出其三角表示式及指数表示式：

(1) $(2-3\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})$；　　(2) $\dfrac{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)^3}$；

*(3) $(1-\mathrm{i})\left(\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\theta\quad(0<\theta<2\pi)$.

解 (1) $z=(2-3\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})=-1+8\mathrm{i}$，

三角表示式　$z=\sqrt{65}\,[\cos(\pi-\arctan 8)+\mathrm{i}\sin(\pi-\arctan 8)]$，

指数表示式　$z=\sqrt{65}\,\mathrm{e}^{\pi-\arctan 8}$；

(2) $z=\dfrac{(\cos 5\theta+\mathrm{i}\sin 5\theta)^2}{(\cos 3\theta-\mathrm{i}\sin 3\theta)^3}=\dfrac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\theta})^2}{(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\theta})^3}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(19\theta)}$

$$=\cos 19\theta+\mathrm{i}\sin 19\theta;$$

*(3) $z=(1-\mathrm{i})\left(\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\theta$

$$=2\sin^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \text{（此为三角表示式）}$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)} \text{（此为指数表示式）}.$$

3. 求下列复数的值：

(1) $(1-\mathrm{i})^4$；　　(2) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{12}$；

(2) $\sqrt{1+\mathrm{i}}$；　　(4) $\sqrt[5]{1}$；

(5) $\sqrt[6]{64}$；　　**(6) $\sqrt[6]{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)\mathrm{i}}$.

解 (1) $(1-\mathrm{i})^4=(-2\mathrm{i})^2=-4$；

(2) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{12}=2^{12}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{12}=2^{12}$；

(3) $\sqrt{1+\mathrm{i}}=\left(\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)}\quad(k=0,1)$；

(4) $\sqrt[5]{1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\quad(k=0,1,2,3,4)$；

(5) $\sqrt[6]{64}=2\sqrt[6]{1}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}}\quad(k=0,1,\cdots,5)$，即为：

$$\pm 2,\quad 1\pm\sqrt{3}\mathrm{i},\quad -1\pm\sqrt{3}\mathrm{i};$$

**(6) 因为 $z=\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{12(2-\sqrt{3})}$，

由

$$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

得　$\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$，即得

$$\arg z=\arctan(2-\sqrt{3})=\frac{\pi}{12},$$

所以

$$\sqrt[6]{\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-3)\mathrm{i}}=\left(\sqrt{12(2-\sqrt{3})}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=\left[12(2-\sqrt{3})\right]^{\frac{1}{12}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}\right)},$$

其中　$k=0,1,\cdots,5$.

*4. 化简下列各式:

(1) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$ (n 是正整数);

(2) $\sqrt{2}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2},\alpha=\arctan 2,\beta=\arctan 3\right)$;

(3) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-2}}$ (n 是正整数);

(4) $z^n+\dfrac{1}{z^n}$,其中 $|z|=1$;

**(5) $\sqrt{a+\mathrm{i}b}$.

解 (1)
$$(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^n+(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^n$$
$$=2^{\frac{n}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{4}\pi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n}{4}\pi})$$
$$=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4};$$

(2) 由 $\alpha=\arctan 2,\beta=\arctan 3,0<\alpha<\frac{\pi}{2},0<\beta<\frac{\pi}{2}$,得
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+3}{1-2\times 3}=-1,$$
即
$$\alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi,$$
于是
$$\sqrt{2}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$$
$$=\sqrt{2}[(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+\mathrm{i}(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)]$$
$$=\sqrt{2}[\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)]$$
$$=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+\mathrm{i};$$

(3)
$$\frac{(1+\mathrm{i})^n}{(1-\mathrm{i})^{n-2}}=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^n\cdot(1-\mathrm{i})^2=\left[\frac{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})^2}\right]^n(-2\mathrm{i})$$
$$=(-2\mathrm{i})\mathrm{i}^n=2\mathrm{i}^{n-1};$$

(4) 因为$|z|=1$,所以 $z=e^{i\theta}$,于是

$$z^n+\frac{1}{z^n}=e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos n\theta;$$

**(5) 设$\sqrt{a+ib}=x+iy$,则

$$a+ib=x^2-y^2+i2xy,$$

于是

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases},$$

解得

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

因为 $2xy=b$,所以当 $b\geqslant 0$ 时,x 与 y 同号;当 $b<0$ 时,x 与 y 异号,故

当 $b\geqslant 0$ 时,$\sqrt{a+ib}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$;

当 $b<0$ 时,$\sqrt{a+ib}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$.

****5. 试证下列各等式成立:**

(1) $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$ (n 为正整数);

(2) $$\cos\theta+\cos(\theta+\varphi)+\cdots+\cos(\theta+n\varphi)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left(\theta+\frac{n\varphi}{2}\right);$$

$$\sin\theta+\sin(\theta+\varphi)+\cdots+\sin(\theta+n\varphi)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\left(\theta+\frac{n\varphi}{2}\right);$$

(3) $$\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx=\frac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx=\frac{\sin nx}{4\sin^2\frac{1}{2}x}-\frac{n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

证 (1) $(1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{n\theta}{2}\right);$$

(2) 因为

$$[\cos\theta+\cos(\theta+\varphi)+\cdots+\cos(\theta+n\varphi)]+\mathrm{i}[\sin\theta+\sin(\theta+\varphi)+\cdots+\sin(\theta+n\varphi)]$$

$$=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+[\cos(\theta+\varphi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\varphi)]+\cdots+[\cos(\theta+n\varphi)+\mathrm{i}\sin(\theta+n\varphi)]$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+n\varphi)}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\cdots+\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-1}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{\cos(n+1)\varphi-1+\mathrm{i}\sin(n+1)\varphi}{\cos\varphi-1+\mathrm{i}\sin\varphi}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{-\sin\frac{n+1}{2}\varphi+\mathrm{i}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{-\sin\frac{1}{2}\varphi+\mathrm{i}\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

$$=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\left(\cos\frac{n}{2}\varphi+\mathrm{i}\sin\frac{n}{2}\varphi\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\frac{n}{2}\varphi\right)}$$

$$=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\left[\cos\left(\theta+\frac{n}{2}\varphi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta+\frac{n}{2}\varphi\right)\right],$$

所以

$$\cos\theta+\cos(\theta+\varphi)+\cdots+\cos(\theta+n\varphi)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\cos\left(\theta+\frac{n}{2}\varphi\right),$$

$$\sin\theta+\sin(\theta+\varphi)+\cdots+\sin(\theta+n\varphi)=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\sin\left(\theta+\frac{n}{2}\varphi\right);$$

(3) **构造复数**

$$\begin{aligned}&\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx+\mathrm{i}(\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin nx)\\ =&(\cos x+\mathrm{i}\sin x)+2(\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x)+\cdots+n(\cos nx+\mathrm{i}\sin nx)\\ =&\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=z+2z^2+\cdots+nz^n.\end{aligned}$$

设 $s(z)=z+2z^2+\cdots+(n-1)z^{n-1}+nz^n$，则

$$zs(z)=z^2+\cdots+(n-1)z^n+nz^{n+1},$$

于是

$$\begin{aligned}(1-z)s(z)&=z+z^2+\cdots+z^n-nz^{n+1}\\ &=\frac{z-z^{n+1}}{1-z}-nz^{n+1},\end{aligned}$$

即

$$s(z)=\frac{nz^{n+1}}{z-1}-\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}.$$

因为

$$\begin{aligned}z-1&=\cos x-1+\mathrm{i}\sin x\\ &=-2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\cdot\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{z^{n+1}}{z-1}&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}\\ &=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\mathrm{i}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right],\end{aligned}$$

$$\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2}=\frac{z(z^n-1)}{(z-1)^2}=\frac{(\cos x+\mathrm{i}\sin x)\cdot 2\sin\frac{nx}{2}\cdot\mathrm{i}\left(\cos\frac{nx}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{nx}{2}\right)}{-4\sin^2\frac{x}{2}(\cos x+\mathrm{i}\sin x)}$$

$$=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{nx}{2}-\mathrm{i}\cos\frac{nx}{2}\right)$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}-\mathrm{i}\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

所以

$$s(z)=\frac{n}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\mathrm{i}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]-\frac{2\sin^2\frac{nx}{2}-\mathrm{i}\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}+\mathrm{i}\left[\frac{\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right],$$

于是

$$\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx=\frac{n\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}},$$

$$\sin x+2\sin 2x+\cdots+n\sin x=\frac{\sin nx}{4\sin^2\frac{x}{2}}-\frac{n\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

6. 设 z_1 和 z_2 是两个复数,试证:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$;

(2) $\arg\overline{z}=\arg\frac{1}{z}$.

证 (1) 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 则

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)}=(x_1+x_2)-\mathrm{i}(y_1+y_2)$$
$$=(x_1-\mathrm{i}\,y_1)+(x_2-\mathrm{i}\,y_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2},$$

同理得 $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$；

令 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则

$$\overline{z_1z_2}=\overline{r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}}=r_1r_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$
$$=r_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}=\overline{z_1}\;\overline{z_2};$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\quad(z_2\neq 0);$$

(2) 因为

$$\arg\overline{z}=-\arg z,\quad \arg\frac{1}{z}=\arg 1-\arg z=-\arg z,$$

所以

$$\arg\overline{z}=\arg\frac{1}{z}.$$

7. 设 z_1 和 z_2 是两个复数，试证：

(1) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$；

(2) $|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$；

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

证 (1)
$$|z_1-z_2|^2=[z_1+(-z_2)][\overline{z_1}+\overline{(-z_2)}]$$
$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2});$$

(2) 因为

$$\big||z_1|-|z_2|\big|^2=(|z_1|-|z_2|)^2$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1z_2|$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\overline{z_2}|$$
$$\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

所以
$$|z_1|^2-|z_2|^2\leqslant|z_1-z_2|^2,$$