

高等学校教学用书

綫性规划的理論及应用

中国科学院数学研究所
运筹学研究室編

人民教育出版社

高等学校教学用书

线性规划的理論及应用

中国科学院数学研究所
运筹学研究室編

人民教育出版社

点
版

綫性规划是在国民經济的許多問題上,如物資的运输和供应,生产任务的分配和訂貨等許多方面有重要应用的一門新兴的数学分支。本書对綫性规划的主要方法,包括解决最常見的康脫洛維奇問題的表上作业法和解决一般綫性规划問題的單純形法,都系統地和詳細地介紹了实际运用方法、它的理論根据、簡捷方法或近似方法,以及結合实际的例題或其他数值例題。除把一些国际上原有資料加以整理外,也包括了部分国内的研究成果,特別介紹了我国群众創造、具有特出优点和独特風格的有关合理运输的图上作业法。附录中还給出非綫性规划的初步介紹。

本書可作为綜合大学数学专业的教材或参考書。一般数学工作者、工学院和經济系有关的教师和学生、工业和經济部門的科学工作者和实际工作者也可参考。

本书原由高等教育出版社出版。自1960年4月1日起,高等教育出版社奉命与人民教育出版社合并,統称“人民教育出版社”。因此本书今后用人民教育出版社名义繼續印行。

綫性规划的理論及应用

中国科学院数学研究所运筹学研究室編

人民教育出版社出版 高等学校数学用书編譯部
北京宣武門內承恩寺7号

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

人民教育印刷厂印装 新华书店发行

統一书号13010·676 开本850×1168 $1/32$ 印张5 $9/16$

字数132,000 印数18,001—38,000 定价(6)¥0.55

1959年9月第1版 1961年2月北京第4次印刷

序 言

去年全国各方面都出现了空前大跃进的形势，数学事业的面貌也随之发生了很大的变化。在批判了资产阶级的唯心主义学术思想以后，数学界出现了一个以数学理论联系实际为中心的轰轰烈烈的群众运动。线性规划这一新兴的数学分支以它密切联系实际这一突出的特点吸引了广大数学工作者的注意，在数学直接为祖国生产建设服务方面大放异彩。由于有了广泛的实践为基础，理论上也得到了若干较为重要的收获，本书就是在这样的情况下编著的。

在去年最广泛应用线性规划的是物资合理调运问题（要求运输总吨公里数最小）。在这方面起过显著作用的是由群众经验中总结出来的一个优秀的数学方法——图上作业法，根据数学研究所的建议它已经由国家经济委员会批准在全国推广，并受到实际工作者的欢迎。利用线性规划特别是其中的图上作业法来组织汽车公司排车的循环运输以求空车里程最小，在这方面也作了很多工作（如北京、上海等地），正在推广阶段。此外船舶调度、仓库地址或某种产品建厂地址的选择、电力系统的配置、电力系统耗损最小问题的研究、自来水管的规划、水库调度等等方面，都曾开始了用线性规划方法进行研究工作，有相当的成果。显然，这些只是全国数学工作者在线性规划方面所作工作中的一部分，而去年已开始的线性规划方面的工作又只涉及整个线性规划应用范围的一部分，于此可见，线性规划的应用范围是多么辽阔广大。

线性规划是近几十年来开始萌芽并已表现出对生产实践有重大意义的运筹学的一个部分。关于运筹学，由于它正开始发展，还

很难下出一个确切的定义，但它也是生产发展的产物。生产越来越发展，彼此关联的因素越来越复杂，已有的数学工具不足以应付，新的工具必然产生，这就是运筹学产生的物质基础。苏联康脱諾維奇在二十世紀四十年代，就是从铁路运输及生产組織等方面来研究綫性规划的。生产力发展的需要也就是今后运筹学发展的物质基础，也就是为什么国内的数学工作者对这方面都很重视的原因。但另一方面国内开始提出并注意这方面的工作才有二、三年的历史，普遍的重視則可以說是从去年大跃进以后才开始的，因而还有待于我們今后用更多实际的工作来充实这个园地。据現在了解，綫性规划在交通運輸部門、石油冶炼部門、机械制造部門、工程建筑部門等等方面都有重要应用，希望数学工作者和这些部門的实际工作者密切合作，把綫性规划加以創造性的运用。

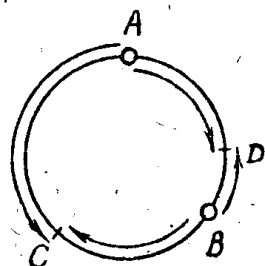
本書有一些重要的結果，是国内理論方面的收获。特別值得提出的是图上作业法。这里只把它的創造过程作扼要的介紹，讀者从中可以对理論如何来自实践来自群众的問題得到很大的启发。

1949年全国解放后，工农业迅速发展，到了1950年，作为全国工业基地的东北地区的交通運輸已經頗为繁忙，适值此时全国人民开展了轟轟烈烈的抗美援朝运动，虽然是車如流水馬如龙，仍难适应。煤炭、粮食部門都深切地感到了合理調运、節約运力的迫切需要。当时东北計委会一个专营运输的小組，就积极进行了学习和鑽研，往往为比較两个运输方案，不分昼夜辛勤地計算，终于在积极鑽研和大量的劳动下面发现了图上作业法的原始的規律，即对于只有一个环状铁路綫，其上只有两个发点(如图之 A, B)及若干收点的情形，每一发点向两边供应的最大界限(即分界綫)的定法應該滿足：順时針方向的运输綫长之和等于逆时針方向之运输綫长之和的規律，如图中之

$$\widehat{AC} + \widehat{BD} = \widehat{AD} + \widehat{BC} = \frac{1}{2} \text{ 圆长}.$$

C 和 D 是分界点。

这可說是本書第一章所講的图上作业法的萌芽。



这样的初步結果傳入了粮食部后，却在实际工作的需要中大大发展了，首先在一条环状綫路上絕不只是两个发点，因而粮食部的工作同志首先就突破了这一限制。但更重要的是全国的铁路是多个圈的，而其中每一个圈在全盘考虑問題时不能孤立地看，在实践中他們观察出多个圈的規律，最后形成图上作业法完整的方法。但这只是凭經驗总结，尚未得到严格証明，因而未能大力推广。恰值去年“十一”献礼，数学研究所的同志在为生产实践服务、向群众学习的热情鼓舞下，学习了这个方法，并用群众运动方式在較短的时间內严格地証明了这个方法，因而使它的进一步推广得到保証。同时扩大它的运用范围，如在汽車調运方面就取得良好的成績。国家經濟委员会批准了数学研究所关于推广图上作业法的建議后，已經在全国範圍內开始大力推广，受到了广大实际工作者的热烈欢迎，掀起了学习这个方法的高潮。

除了一些理論上的創造外，也有很多結果的証明是独立得到的，如康脫洛維奇問題叠代法的証明、对偶定理的証明。过去綫性规划方面文献虽然很多，但系統不一，本書也作了整理的工作，使全書納入同一系統。因此可以說在編著本書的工作中創造、有繼承、有整理，而所有这一切都是在全室的集体努力下得到的，每个人对这書的写作都是有貢獻的，因此这是一个名符其实的群众集体創作。在最后整理审稿的过程中，秦汝偉、王元、朱永津、越民义、許以超、譚玉清、聶善长等同志不辞劳累地付出了相当大的劳动。

本書可作为高等学校数学系教材以及科学研究、工程技术、生产組織、交通运输等方面实际工作者的参考書籍。

我們开始搞运筹学的時間不过半年,虽然努力把它写好,但疏漏之处在所难免,希望大家多加指正,使它得以日趨完善。我們衷心希望这本书的出版能起拋磚引玉的作用,不久将涌现出更丰富更完善的書籍来,以滿足广大讀者迫切需要,并借以推动规划一类的理論发展,是所深望。

中国科学院数学研究所运筹学研究室

1959年3月

目 录

序 言	v
第一章 物资调运中的图上作业法	1
§ 1. 方法的叙述(1) 习题(15)	
§ 2. 方法的理论证明(16) 习题(28)	
§ 3. 图上作业法在汽车调度上的运用(29)	
第二章 表上作业法方法的介绍	36
§ 1. 平衡表及运价表(37)	
§ 2. 初始调运方案的编制(39)	
§ 3. 最好调运方案的判定方法(一)——闭回路法(45)	
§ 4. 最好调运方案的判定方法(二)——位势法(48)	
§ 5. 调运方案的调整(52)	
§ 6. 计算步骤(53) 习题(56)	
第三章 表上作业法的理论证明	57
§ 1. 物资调运问题的数学表现(57)	
§ 2. 消去系统与容许解(59)	
§ 3. 消去系统的充要条件(62)	
§ 4. 容许解是最小解的判别条件(68)	
§ 5. 检验数的求法(一)——闭回路法(69)	
§ 6. 检验数的求法(二)——位势法(74)	
§ 7. 实现问题(75) 习题(78)	
§ 8. 康脱洛维奇问题的进一步研究(79) 习题(88)	
§ 9. 康脱洛维奇问题表上作业法的推广(89) 习题(95)	
第四章 关于图表作业法的一些补充	97
§ 1. 取初始调运方案法(97)	
§ 2. 近似法(104)	
§ 3. 产销不平衡问题的解法(109)	
第五章 单纯形法	115
§ 1. 问题的提出(115)	
§ 2. 单纯形法的几何解释(120)	
§ 3. 叠代法(120) 习题(133)	
§ 4. 扰动(139)	
§ 5. 消去系统与容许解(141) 习题(143)	
§ 6. 对偶线性规划(143)	
附录 非线性规划介绍	149
§ 1. 预备知识(149)	
§ 2. 解判定定律(153)	
§ 3. 凸型非线性规划的计算方法(157)	
§ 4. 凸型二次规划的计算方法(161)	
§ 5. 古典方法简介(165)	

第一章 物資調运中的圖上作业法

§ 1. 方法的敘述

图上作业法是关于物資調运的一个簡單容易、計算迅速而应用广泛的方法。首先通过实例,把这方法加以說明。

在制定某种物資的調运方案时,首先要有一个平衡表。在这个表上列出这种物資的发点(即需要調出物資的地点)和收点(即需要調进物資的地点),以及各发点所需要調出的物資数量和各收点所需要調进的物資数量,各发点所需要調出物資数量的总和应等于各收点調进物資数量的总和。根据这样一个表繪出一个交通图,即是标有这些收发点以及联結这些收发点之間的交通綫(如鐵路、公路、海河航綫等)的地图。所謂图上作业就是在交通图上进行調运方案的編造工作,以使該物資运行的吨公里数为最小。这样的方案叫做最好的方案。下面就根据交通图的不同形状,分別举例介紹图上作业法的方法。首先举例介紹沒有环状綫路的情况,即交通图全由支綫构成的情形。

例 1. 已知一个小麦的平衡表(表 1.1):

表 1.1

发点 \ 收点	济 南	兗 州	張 店	青 島	发量(吨)
德 州					50
禹 城					20
泰 安					30
益 都					70
收量(吨)	80	10	30	50	170

本問題是要編造一个小麦的調运方案,使得小麦运行的吨公里数达到最小值。

在編造調运方案之前,先繪出它的交通图,发点用“○”来表示,

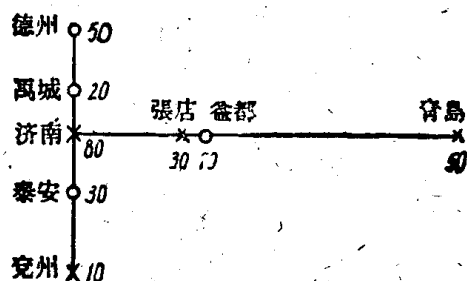


图 1.1

收点用“X”来表示,并把收、发点所要調进、調出的小麦吨数注在旁边如图 1.1 所示。

为了清楚和方便起見,还繪一張里程图,图上把相邻两点間距离的公里数标出来(如图 1.2)。

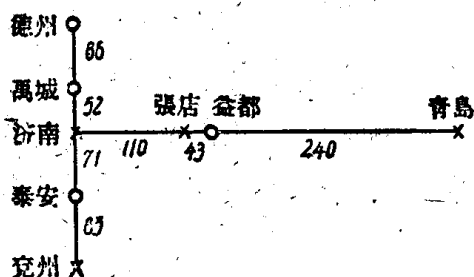


图 1.2

显然有对流(在一段路綫上同时有两个相反方向的調运)的調运方案一定不是最好的(即运行的吨公里数不是达到最小值),因此在編造調运方案

时,首先就要避免对流現象。

交通图(图 1.1)里沒有形成环状路綫,只有以濟南作一个樞紐点,从它分出的三根交通支綫。为了避免对流現象,在編造方案前,先計算一下这三根交通支綫上(濟南除外)以及濟南本身各需要調出,还是調入多少小麦?,計算的結果是:

德州綫上需要調出 70 吨,

兖州綫上需要調出 20 吨,

青島綫上需要調入 10 吨,

濟南本身需要調入 80 吨。

即首先在各綫本身上的收、发点間进行調整平衡,然后各綫間进行調整平衡。

先看德州綫上:因为它沒有收点,所以德州和禹城的小麦都需

要运出。显然在运出时必然经过济南，而济南又需要调入 80 吨，所以可将德州的 50 吨和禹城的 20 吨都调给济南。这时就沿着从德州到济南的前进方向，在路线的右侧画上一个流向（用箭头表示流向，并注意，以后常把流向划在右侧），并将 50 吨标在流向上。同样画出禹城的 20 吨调给济南的流向，如图 1.3 所示。

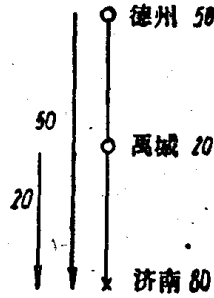


图 1.3

这里有一段路上有同方向的流向相重(如禹城到济南)，可将重复的流向合并成一条(以后凡遇到这种情形，都这样作)，如图 1.4 所示。

其次再看兖州线：泰安须调出 30 吨，所以兖州需要调入的 10 吨由泰安供应。这时兖州线还余 20 吨，需要调出去，在运出时也要经过济南，而济南还缺 10 吨，同时青岛线还需要调入 10 吨，因此这 20 吨就由泰安来供应。

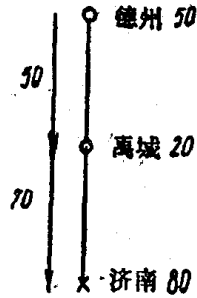


图 1.4

最后看青岛线：为了避免对流现象，将青岛所需要调入的 50 吨由益都供应，而将益都余下来的 20 吨及由泰安调入的 10 吨供应张店，即得下面的流向图：

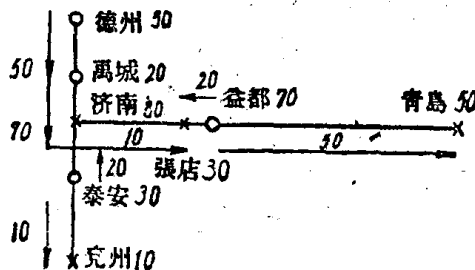


图 1.5

相应于这个流向图的一个调运方案是：

表 1.2

发点 \ 收点	济南	兖州	张店	青岛	发量(吨)
德州	50				50
禹城	20				20
泰安	10	10	10		30
益都			20	50	70
收量(吨)	80	10	30	50	170

而小麦按照此调运方案所运行的吨公里是： $50 \times 118 + 20 \times 52 + 10 \times 71 + 10 \times 85 + 10 \times 181 + 20 \times 43 + 50 \times 240 = 23170$ 。

显然相应于这个流向图的调运方案不是唯一的。例如还有如下的调运方案：

表 1.3

发点 \ 收点	济南	兖州	张店	青岛	发量(吨)
德州	45		5		50
禹城	15		5		20
泰安	20	10			30
益都			20	50	70
收量(吨)	80	10	30	50	170

小麦按照此调运方案所运行的吨公里是： $45 \times 118 + 15 \times 52 + 20 \times 71 + 10 \times 85 + 5 \times 228 + 5 \times 162 + 20 \times 43 + 50 \times 240 = 23170$ 。

从此可以看出，不同的调运方案可以有相同的流向图（所谓相同流向图是指在两个流向图中每段流向的位置长短、方向及流过的数量都相同），并且有相同流向图的不同调运方案的吨公里数相等（因为运行的吨公里数等于各段流向上所流过的数量乘以各该段流向的长度之积之和）。

由这个流向图所确定的调运方案的吨公里数是否是最小值呢？对这种没有环状路线的交通图，只要流向图中没有对流现象，那么由此流向图所确定的调运方案一定是最好的（即运行的吨公里数是最小的）。这一点是很明显的。因此上面所得的小麦调运方案即为所求。

其次，介绍有一个圈的环状线路的情况。

例 2. 假定有下面一个稻米的平衡表：

表 1.4

发 点	收 点	石 家 庄	邯 郸	郑 州	德 州	济 南	泰 安	徐 州	开 封	发量(吨)
许 昌	昌 县									45
宿 衡	县 水									60
兰 封	水 封									65
										35
收量(吨)		50	10	15	15	20	25	25	35	205

本问题是怎样编造一个稻米的调运方案，使得稻米运行的吨公里数达到最小值。

先绘出交通图和里程图(图1.6和图1.7)。

在这张交通图上有一个圈（即石德济徐郑石线），而且从郑州和徐州又各分出去两条支线。先计算一下各支线本身究竟需要

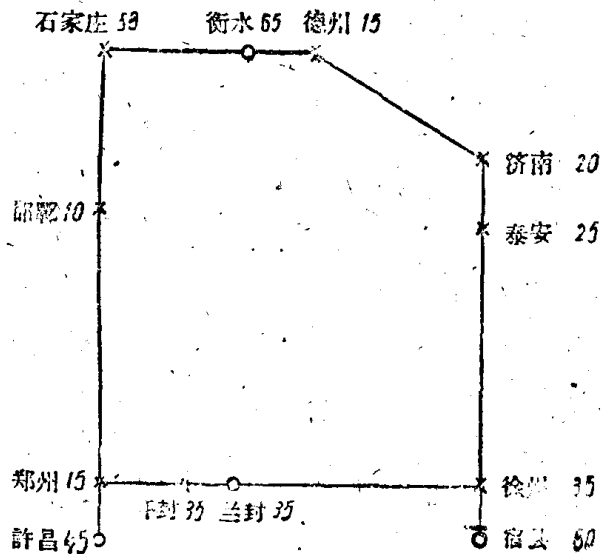


图 1.6

调出、还是调入多少稻米？结果是

郑许支线(不包括郑州)需要调出: 45 吨,

徐宿支线(不包括徐州)需要调出: 60 吨。

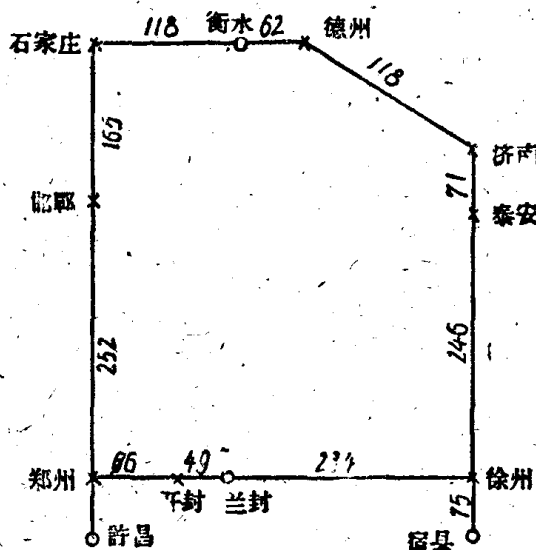


图 1.7

因为郑许支线和徐宿支线运出的稻米必然分别通过郑州和徐州，所以可把郑州支线调出的 45 吨与郑州本身所需要 15 吨进行平衡后，而把郑州看成是一个发点，它的发量是 30 吨。同理可把徐州看成是一个发点，它的发量是 25 吨。这样

就有了一个新的平衡表 1.5 和交通图 1.8。

表 1.5

发点 \ 收点	石家庄	邯郸	德州	济南	泰安	开封	发量(吨)
郑州							30
徐州							25
衡水							65
兰封							85
收量(吨)	50	10	15	20	25	25	155

这样，稻米的收发点全落在一个圈上了。在此图上进行调运方案的编造工作。先给出一个没有对流的调运方案的流向图：任从一点出发，如从衡水出发(从别的地点出发也可以)。先设衡水

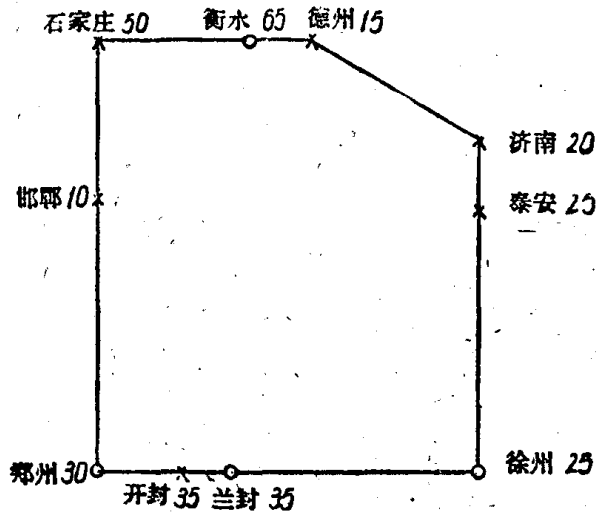


图 1.8

調給石家庄 50 吨, 其次讓衡水的其余 15 吨全部供給德州。然后, 再考虑济南是一个收点,

假設济南所需要的 20 吨全由徐州供应, 那么徐州剩余的 5 吨供給泰安。但泰安还缺 20 吨, 这可由兰封供应, 而兰封余下来的 15 吨全部供給开封。开封还需要的 20 吨由郑州供給, 郑州剩余的 10 吨則供給邯鄲。便得到右面的流向图(图 1.9):

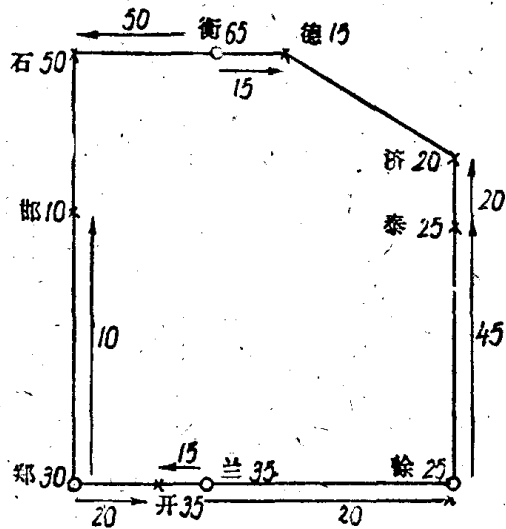


图 1.9

相应于这个流向图的调运方案是表 1.6。

表 1.6

收点 发点	石家庄	邯 鄲	德 州	济 南	泰 安	开 封	发量(吨)
郑 州		10				20	30
徐 州				20	5		25
衡 水	50		15				65
兰 封					20	15	35
收量(吨)	50	10	15	20	25	35	155

而稻米按照此調运方案运行的吨公里数是:

$$50 \times 118 + 15 \times 62 + 20 \times 71 + 45 \times 246 + 20 \times 234 + \\ + 15 \times 49 + 20 \times 66 + 10 \times 252 = 28575.$$

这个吨公里数是否是最小值?在回答这个问题以前先看看流向图,在流向图中,有些流向是在圈的外面,也有些流向是在圈的里面。在圈外面的流向称为外圈流向,而在圈里面的流向称为内圈流向。諸外圈流向长之和称为外圈的长,而諸内圈流向长之和称为内圈的长。圈上没有流向的各段之长之和叫空圈长。

对于这样一个圈的交通图,它的流向图所确定的調运方案是最好的充分必要条件是:它的流向图上没有对流,而且内圈的长和外圈的长都小于或等于整个圈长的一半。关于这一点的严格証明将在下一节给出。

研究一下现在这个方案。根据里程图计算出内、外圈的长,分别为 363 公里和 735 公里,整个圈的长是 1381 公里。我們发现外圈的长大于整个圈长的一半,所以这个調运方案不是最好的。既然如此,就需要将这个調运方案进行调整。怎样调整呢?调整的方法就是将外圈縮短(如果原流向图内圈的长大于整个圈长的一半,則应将内圈縮短)。

检查一下外圈最細的(即流过稻米最少的)流向是 20 吨(郑开間、兰徐間、泰济間)。就先将外圈流过 20 吨的郑开間流向塗去

(即缩短为零)。将郑州的 20 吨向北供给石家庄,而只由衡水供给石家庄 30 吨。接着再将衡水多下来的 20 吨供给济南,而将兰封供给济南的 20 吨供给开封。于是又得到下面的流向图:

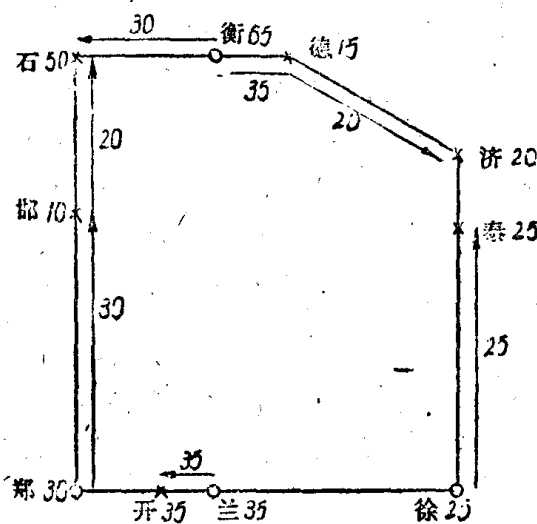


图 1.10

相应于这个流向图的调运方案是:

表 1.7

发点 \ 收点	石家庄	邯 郸	德 州	济 南	泰 安	开 封	发量(吨)
郑 州	20	10					30
徐 州					25		25
衡 水	30		15	20			65
兰 封						35	35
收量(吨)	50	10	15	20	25	35	155

按照这个调运方案运行的吨公里数是

$$30 \times 118 + 35 \times 62 + 20 \times 118 + 25 \times 246 + 35 \times 49 + 30 \times 252 + 20 \times 165 = 26795 \text{ (这个数字较调整前的流向图的数字为小)}.$$

在这个流向图中,外圈的长是 364 公里,而内圈的长是 646 公里,都少于整个圈长的一半,因此和这个流向图相应的调运方案是