

# 数字处理的数学原理和方法

李安昌 编著

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

# 数字处理的数学原理和方法

李安昌 编著

中国矿业大学出版社

## 内 容 简 介

本书重点介绍了数字处理的数学原理和方法, 内容包括富里叶变换、Z变换、希尔伯特变换、沃尔什变换、数论变换, 以及这些变换的快速算法, 同时联系频谱分析及线性滤波等实际应用问题。全书以研究确定性的离散信号为主, 对离散随机信号也作了简要介绍。内容选择考虑了先进性和实用性, 力求做到结构严谨, 条理清楚, 联系应用, 便于选学。

本书可供高等院校有关专业的本科生及研究生做为教材, 对有关工程科技人员也有很大参考价值。

### 高等学校教学用书 数字处理的数学原理和方法

李安昌 编著

中国矿业学院出版社出版

江苏省新华书店发行 中国矿业学院印刷厂印刷

开本787×1092毫米1/16 印张17 字数410千字

1988年7月第一版 1988年7月第一次印刷

印数: 1—3300册

ISBN 7-81021-043-2

0.3(课)

定价: 2.85元





# 前 言

随着计算机的广泛应用,以及各种快速算法的产生,促使数字信号处理技术发展迅速,其应用技术领域也越来越广。在数字信号处理技术的影响下,某些技术领域发生了根本性的变化。特别是在通讯、自控、地球物理、经济分析、语声处理等方面,都已达到较为深入和普遍应用的程度。因此,数字处理已逐渐形成为一门新兴学科。

本书重点介绍数字处理的数学原理和方法,它是数学与工程专业结合的边缘学科,它既是应用数学的深入,又是学习专业数字处理技术的基础。在本书中,主要研究数字信号的富里叶(Fourier)变换、Z变换、希尔伯特(Hilbert)变换、沃尔什(walsh)变换、数论变换,以及这些变换的快速算法。结合这些变换的研究,还讨论了连续信号和离散信号的频谱、抽样定理、褶积滤波及相关滤波等问题。在研究确定性信号的基础上,最后简要介绍了离散随机信号的处理方法。

本书是作者多年教学的总结,力求先进性与实用性相结合。在写法上,从确定性信号到随机性信号,并以前者为主。在确定性信号中,是从连续到离散、无限到有限、一维到高维。对于各种快速算法,都给出编制程序的一般公式,并选择有代表性的算法给出框图。在文字叙述上,力求结构严谨,条理清楚,说明应用,便于自学。每章后面附有较多的习题,最后附有答案,做为学习正文的检验和补充。

本书可供有关专业的本科高年级学生、研究生做为必修或选修课的教科书,也可供有关专业的教师和科技人员参考。书中第四、五、七章是互相独立的,可以根据实际需要进行选用。

本书承蒙朱儒楷教授详细审阅,提出了很多中肯的修改意见。在编著过程中,曹璿珞副教授、石炎生讲师都仔细阅读全书稿,并在教学中实践,随时提出很多宝贵意见,特此表示感谢。由于作者水平所限,书中难免有错误和不当之处,恳切希望读者批评指正。

作者

1987年7月

# 目 录

|                                       |            |
|---------------------------------------|------------|
| <b>第一章 富里叶变换与连续频谱 .....</b>           | <b>1</b>   |
| § 1—1 富氏级数与离散频谱 .....                 | 1          |
| § 1—2 富氏变换与连续频谱 .....                 | 8          |
| § 1—3 单位脉冲函数及其频谱 .....                | 20         |
| § 1—4 连续信号的滤波与褶积 .....                | 28         |
| § 1—5 连续信号的希尔伯特变换 .....               | 32         |
| 习题一 .....                             | 36         |
| <b>第二章 抽样定理与离散信号的滤波方法 .....</b>       | <b>40</b>  |
| § 2—1 抽样(采样)定理 .....                  | 40         |
| § 2—2 离散信号的滤波与频谱 .....                | 46         |
| § 2—3 离散信号的相关分析 .....                 | 55         |
| § 2—4 离散褶积及离散相关的算法 .....              | 62         |
| § 2—5 离散信号的 Z 变换 .....                | 70         |
| § 2—6 离散信号的希尔伯特变换 .....               | 80         |
| 习题二 .....                             | 86         |
| <b>第三章 有限离散富氏变换和快速富氏变换 .....</b>      | <b>90</b>  |
| § 3—1 DFT 公式的建立及泄漏效应 .....            | 90         |
| § 3—2 DFT 的基本性质 .....                 | 96         |
| § 3—3 周期序列的循环褶积和周期序列的频谱的希尔伯特变换式 ..... | 101        |
| § 3—4 按时间分解的 FFT 算法 .....             | 109        |
| § 3—5 按频率分解的 FFT 算法 .....             | 121        |
| § 3—6 提高 FFT 运算效率的一些方法 .....          | 130        |
| § 3—7 FFT 算法的推广 .....                 | 138        |
| 习题三 .....                             | 142        |
| <b>第四章 沃尔什函数与沃尔什变换 .....</b>          | <b>148</b> |
| § 4—1 预备知识 .....                      | 148        |
| § 4—2 沃尔什函数的定义及性质 .....               | 153        |
| § 4—3 W 矩阵与有限 W 变换(DWT) .....         | 162        |
| § 4—4 H 矩阵与有限 H 变换(DHT) .....         | 170        |
| § 4—5 快速 H 变换(FHT)与快速 W 变换(FWT) ..... | 176        |
| 习题四 .....                             | 184        |
| <b>第五章 数论变换及其快速算法 .....</b>           | <b>188</b> |
| § 5—1 数论的基本知识 .....                   | 188        |
| § 5—2 数论变换及其性质 .....                  | 191        |

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| § 5—3 快速数论变换 .....               | 196        |
| 习题五 .....                        | 201        |
| <b>第六章 二维信号的处理方法 .....</b>       | <b>203</b> |
| § 6—1 二维连续信号的频谱与褶积滤波 .....       | 203        |
| § 6—2 二维离散信号的褶积滤波、频谱和 Z 变换 ..... | 206        |
| § 6—3 二维 DFT 与二维 FFT .....       | 213        |
| § 6—4 二维有限沃尔什变换及其快速计算 .....      | 221        |
| § 6—5 二维数论变换及其快速算法 .....         | 225        |
| 习题六 .....                        | 228        |
| <b>第七章 离散随机信号的特性及处理 .....</b>    | <b>231</b> |
| § 7—1 离散随机信号及其统计特征 .....         | 231        |
| § 7—2 平稳随机序列及各态历经性质 .....        | 235        |
| § 7—3 平稳随机序列的功率谱分析 .....         | 239        |
| § 7—4 离散随机信号的数学滤波 .....          | 243        |
| 习题七 .....                        | 250        |
| 附 录 主要变换公式表 .....                | 253        |
| 习题答案 .....                       | 256        |
| 参考书目 .....                       | 264        |

# 第一章 富里叶变换与连续频谱

一个复杂的连续信号(即波形、函数),一般来说,都可以分解为许多简单的正弦信号(即简谐波)的叠加。找出这种分解的表达式,就可以进一步掌握复杂信号的构成及性质,以便对它进行分析和处理。研究这类问题的数学工具是富里叶(Fourier)分析方法,简称富氏分析。富氏分析是滤波方法的重要手段。

本章重点研究连续信号及脉冲函数的富里叶变换,以后简称富氏变换。并利用这一工具对信号进行频谱分析,最后简要介绍线性褶积滤波的基本思想。这一章是以后各章研究数字信号的基础。

## § 1—1 富氏级数与离散频谱

我们在高等数学中已经学习过富氏级数。利用富氏级数可以把有限区间上的复杂波分解为倍频谐波的叠加。本节首先简要复习一下富氏级数的展开公式,然后着重从工程应用角度讨论周期信号的频谱分析。

### 一、富氏级数

在实际中许多复杂信号是定义在有限区间上的,我们总可以对它进行周期延拓,使它化为随时间变化的周期函数。在高等数学中已知,一个以  $T$  为周期的函数  $x(t)$ , 在周期区间  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  上满足狄里克雷(Dirichlet)条件<sup>\*</sup>时,在连续点处可展成下列富氏级数:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (\text{实数型}) \quad (1-1-1)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (\text{复数型}) \quad (1-1-2)$$

其中,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  叫做基本角频率;

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt & (n=0,1,\dots) \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt & (n=1,2,\dots) \end{cases} \quad (1-1-3)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (n=0, \pm 1, \dots) \quad (1-1-4)$$

<sup>\*</sup> 在区间  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  上至多只有有限个第一类间断点(有限间断点)及极值点。

(1-1-3)式或(1-1-4)式叫做富氏系数。在(1-1-1)式中,一般项  $a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$  表示一个  $n$  次谐波。因此, (1-1-1)式揭示了复杂波与简谐波之间的相互转化关系:

$$\begin{array}{ccc} & \text{分解} & \\ \text{复杂周期波} & \rightleftharpoons & \text{倍频谐波叠加} \\ & \text{合成} & \end{array}$$

从(1-1-3)式及(1-1-4)式容易看出,两种展开式的系数之间有下列关系:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \bar{c}_n \end{cases} \quad (1-1-5)$$

( $n=1,2,\dots$ )

还可以进一步证明实信号与其富氏系数之间有下列帕塞瓦尔(Parseval)等式:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (1-1-6)$$

事实上

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega_0 t} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \left( \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(n+m)\omega_0 t} dt \right)^\oplus \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n c_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \bar{c}_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \end{aligned}$$

## 二、离散频谱

所谓频谱分析就是研究谐波分量的振幅和相位随频率的变化规律。为此将  $n$  次谐波变换如下:

$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t &= A_n \left( \frac{a_n}{A_n} \cos n\omega_0 t + \frac{b_n}{A_n} \sin n\omega_0 t \right) \\ &= A_n (\sin \varphi_n \cos n\omega_0 t + \cos \varphi_n \sin n\omega_0 t) \\ &= A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \end{aligned}$$

其中

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (1-1-7)$$

---


$$\oplus \quad \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(n+m)\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i(n+m)\frac{2\pi}{T}t} dt = \begin{cases} 0, & n+m \neq 0 \\ 1, & n+m = 0 \end{cases}$$



$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1-1-8)$$

而  $A_n$  是  $n$  次谐波的振幅,  $\varphi_n$  是  $n$  次谐波的相位。它反映了振幅和相位随频率的变化规律。

为了讨论方便起见, 我们引进函数

$$X(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1-1-9)$$

这是一个复数值函数, 若改写为指数式就是

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{i \arg X(\omega)}$$

由于

$$X(n\omega_0) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{T}{2} (a_n - ib_n)$$

$$X(n\omega_0) = |X(n\omega_0)| e^{i \arg X(n\omega_0)}$$

因此不难得到

$$|X(n\omega_0)| = \frac{T}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{T}{2} A_n$$

$$\arg X(n\omega_0) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \varphi_n, & b_n \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} + \varphi_n, & b_n > 0 \end{cases} \quad (\text{参考图1.1})$$

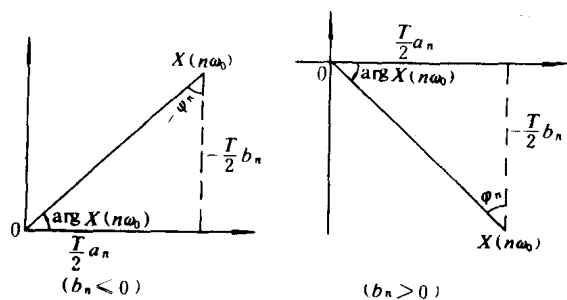


图 1.1

这说明:  $|X(n\omega_0)|$  与  $A_n$  只差常数倍;  $\arg X(n\omega_0)$  与  $\varphi_n$  只差常数项。

因此通常把  $X(\omega)$  叫做  $x(t)$  的频谱函数,  $|X(n\omega_0)|$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 叫做  $x(t)$  的振幅谱,  $\arg X(n\omega_0)$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 叫做  $x(t)$  的相位谱。由于谐波的频率是倍频变化, 所以振幅谱和相位谱都是离散频谱, 再注意  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , 因此周期  $T$  越大, 谱线越密。

在频谱分析中, 较多地利用振幅谱。下面我们给出振幅谱的两个重要性质:

性质 1 每个实周期函数的振幅谱是  $n$  (或  $n\omega_0$ ) 的偶函数, 即

$$|X(-n\omega_0)| = |X(n\omega_0)| \quad (1-1-10)$$

证明:由(1-1-9)、(1-1-4)及(1-1-5)式可得

$$X(n\omega_0) = Tc_n = \frac{T}{2}(a_n - ib_n)$$

$$X(-n\omega_0) = Tc_{-n} = \frac{T}{2}(a_n + ib_n) = \overline{X(n\omega_0)}$$

$$\therefore |X(-n\omega_0)| = |\overline{X(n\omega_0)}| = |X(n\omega_0)| \quad \langle \text{证毕} \rangle$$

此性质说明振幅谱关于纵轴对称。因此,我们只要研究振幅谱的 $n \geq 0$ 的部分即可。

性质2 每个实周期函数的振幅谱随 $n$ (或 $n\omega_0$ )的无限增大而趋于零,即

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} |X(n\omega_0)| = 0 \quad (1-1-11)$$

证明:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X(n\omega_0)|^2$$

上式说明级数  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X(n\omega_0)|^2$  收敛, 因此  $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} |X(n\omega_0)|^2 = 0$ , 从而得到

$$\lim_{n \rightarrow \pm \infty} |X(n\omega_0)| = 0 \quad \langle \text{证毕} \rangle$$

此性质表明 $n$ 足够大时, 振幅变化就很小了。以后可以看到, 我们最关心的是振幅谱靠近纵轴左右两侧的一段情况。

### 三、周期函数的功率谱

设 $x(t)$ 表示一个周期电压信号, 电阻为1, 则瞬时电流 $i(t) = \frac{x(t)}{1} = x(t)$ , 瞬时功率

$p(t) = i(t)x(t) = x^2(t)$ , 在一个周期时间间隔 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 上的平均功率应为

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

由帕塞瓦尔等式(1-1-6)得到

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X(n\omega_0)|^2$$

上式右端每一项 $\frac{1}{T^2} |X(n\omega_0)|^2$ 代表了频率为 $n\omega_0$ 的谱分量所贡献的功率, 因此通常

就把序列 $\frac{1}{T^2} |X(n\omega_0)|^2$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )叫做 $x(t)$ 的功率谱, 令

$$P_n = \frac{1}{T^2} |X(n\omega_0)|^2 \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1-1-12)$$

显然实周期函数的功率谱 $P_n$ 也是 $n$ 的偶函数, 且 $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} P_n = 0$ 。

#### 四、周期函数的平方逼近

利用帕塞瓦尔等式, 可以很容易地解决周期函数的平方逼近问题。所谓平方逼近周期函数  $x(t)$ , 就是选取三角多项式

$$T_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t)$$

的系数, 使

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t) - T_n(t)|^2 dt = \text{最小}。$$

由于

$$\begin{aligned} x(t) - T_n(t) &= \frac{a_0 - \alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n [(a_k - \alpha_k) \cos k\omega_0 t + (b_k - \beta_k) \sin k\omega_0 t] + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \end{aligned}$$

利用帕塞瓦尔等式

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

得

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t) - T_n(t)|^2 dt &= \frac{1}{4} (a_0 - \alpha_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \end{aligned}$$

显然, 当  $\alpha_0 = a_0$ ,  $\alpha_k = a_k$ ,  $\beta_k = b_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 时, 有

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t) - T_n(t)|^2 dt = \text{最小}。$$

因此,  $x(t)$  平方逼近的解就是  $x(t)$  的富氏级数展开的前  $n+1$  项和, 即

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

#### 五、对称周期信号的频谱

在实际中经常碰到具有某种对称条件的周期信号, 它的频谱特征也有其特殊性, 掌握其特殊性对于简化频谱计算及认识谐波分解特征都是很重要的。

例如, 若周期为  $T$  的信号  $x(t)$ , 满足对称条件:

$$x(-t) = x(t) \quad (\text{关于轴线 } t=0 \text{ 对称})$$

$$x(t \pm \frac{T}{2}) = x(t) \quad (\text{关于直线 } t = \pm \frac{T}{2} \text{ 对称})$$

则离散频谱

$$X(n\omega_0) = \begin{cases} 4 \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \cos n\omega_0 t dt, & n = \text{偶数} \\ 0, & n = \text{奇数} \end{cases}$$

并且  $x(t)$  的谐波分解只有余弦项偶次谐波。

事实上，因为  $x(-t) = x(t)$ ，利用奇偶函数的积分性质，得

$$\begin{aligned} X(n\omega_0) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= 2 \left[ \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

在上面第二个积分中，令  $u = \frac{T}{2} - t$ ，再注意

$$\cos n\omega_0 t = \cos(n\pi - n\omega_0 u) = (-1)^n \cos n\omega_0 u$$

及  
得

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = (-1)^n \int_0^{\frac{T}{4}} x(u) \cos n\omega_0 u du$$

故

$$\begin{aligned} X(n\omega_0) &= 2[1 + (-1)^n] \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ &= \begin{cases} 4 \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \cos n\omega_0 t dt, & n = \text{偶数} \\ 0, & n = \text{奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

同样由(1-1-3)式可得

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} \frac{8}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \cos n\omega_0 t dt, & n = \text{偶数} \\ 0, & n = \text{奇数} \end{cases} \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

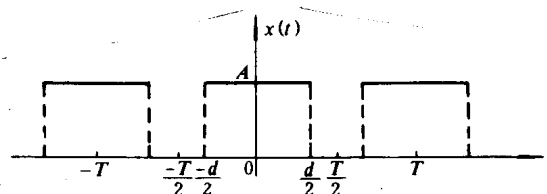
这说明  $x(t)$  的谐波分解(即富氏级数)是仅含余弦项的偶次谐波。

按照同样方法可研究其它对称条件的情况。现在我们把主要一些情况列表如下：(表见下页)

| 对称条件                                                                      | 频谱表达式                                                   | 谐波分解特征                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $x(-t) = x(t)$                                                            | $2 \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt$       | 只有余弦项                                                    |
| $x(-t) = -x(t)$                                                           | $-2i \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt$     | 只有正弦项                                                    |
| $x(t \pm \frac{T}{2}) = x(t)$                                             | $2 \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i2k\omega_0 t} dt$     | 只有偶次谐波                                                   |
| $x(t \pm \frac{T}{2}) = -x(t)$                                            | $2 \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i(2k-1)\omega_0 t} dt$ | 只有奇次谐波                                                   |
| $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ x(t \pm \frac{T}{2}) = x(t) \end{cases}$   | $4 \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \cos 2k\omega_0 t dt$      | 只有 $\begin{cases} \text{余弦项} \\ \text{偶次谐波} \end{cases}$ |
| $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ x(t \pm \frac{T}{2}) = -x(t) \end{cases}$  | $4 \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \cos(2k-1)\omega_0 t dt$   | 只有 $\begin{cases} \text{余弦项} \\ \text{奇次谐波} \end{cases}$ |
| $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ x(t \pm \frac{T}{2}) = x(t) \end{cases}$  | $-4i \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \sin 2k\omega_0 t dt$    | 只有 $\begin{cases} \text{正弦项} \\ \text{偶次谐波} \end{cases}$ |
| $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ x(t \pm \frac{T}{2}) = -x(t) \end{cases}$ | $-4i \int_0^{\frac{T}{4}} x(t) \sin(2k-1)\omega_0 t dt$ | 只有 $\begin{cases} \text{正弦项} \\ \text{奇次谐波} \end{cases}$ |

例 设周期为  $T$  的方波, 在  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$

上定义为  $x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{d}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$



求  $x(t)$  的振幅谱及功率谱, 并且画出当

$A = 1, d = \frac{1}{10}, T = \frac{1}{2}$  时振幅谱的图形。

图 1.2

解:  $\because x(-t) = x(t)$

$$X(\omega) = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} x(t) \cos \omega t dt = 2A \int_0^{\frac{d}{2}} \cos \omega t dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega d}{2}$$

定义函数

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

得

$$X(\omega) = Ad \text{sinc}\left(\frac{\omega d}{2}\right)$$

$$\therefore \text{振幅谱为 } |X(n\omega_0)| = Ad \left| \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right) \right|$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{功率谱为 } P_n = \frac{A^2 d^2}{T^2} \text{sinc}^2\left(\frac{n\omega_0 d}{2}\right)$$

当  $A = 1$ ,  $d = \frac{1}{10}$ ,  $T = \frac{1}{2}$  时,  $\omega_0 = 4\pi$ , 得到振幅谱为

$$|X(n\omega_0)| = \frac{1}{10} \left| \text{sinc}\left(\frac{n\pi}{5}\right) \right| \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

振幅谱图形为图 1.3。功率谱图形与振幅谱图形类似, 只是谱线高低不同。

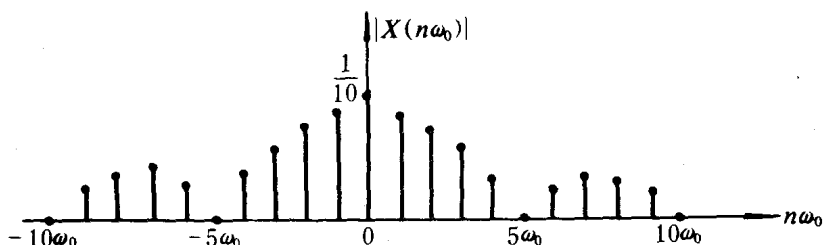


图 1.3

由上面这个例子不难看出, 信号的平均功率主要集中在低频部分。通过计算第一个波腹内(也就是  $|n\omega_0| \leq 5\omega_0$ ) 的平均功率

$$P' = P_0 + 2[P_1 + P_2 + P_3 + P_4]$$

$$= \frac{1}{25} + \frac{2}{25} \left[ \text{sinc}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right] \approx 0.18$$

与总平均功率

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = 2 \int_{-\frac{1}{20}}^{\frac{1}{20}} 1^2 dt = 0.2$$

之比, 可以发现 90% 以上的平均功率是集中在低频部分。因此对这个例子, 若用直流分量、基波及二、三、四次谐波叠加来近似原波形, 在一般工程分析中已能满足要求。

## § 1—2 富氏变换与连续频谱

在 § 1—1 中, 我们讨论了周期信号及其离散频谱。然而在实际问题中, 还经常遇到非周期信号, 如衰减振荡波和脉冲信号(见图 1.4)等, 它们都可视为定义在整个时间轴上



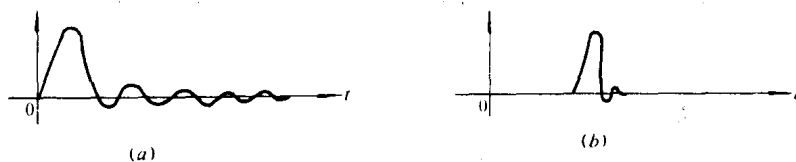


图 1.4

的函数, 也可视为周期为无限大的周期函数。因此, 我们可以对周期从有限到无限来研究非周期函数, 这时富氏级数将变为富氏变换, 离散频谱将变为连续频谱。

本节首先导出富氏变换的基本公式, 并引出连续频谱的概念, 然后研究频谱的基本性质, 最后给出几类基本信号的频谱。

### 一、富氏变换公式的导出及连续频谱的概念

设非周期函数  $x(t)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上满足下列条件:

1) 在任意有限区间上满足狄里克雷条件;

2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$  (即  $x(t)$  绝对可积),

作一个周期为  $T$  的函数  $x_T(t)$ , 使它在  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  内满足  $x_T(t) = x(t)$ , 显然

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} x_T(t) = x(t) \quad (\text{见图 1.5})$$

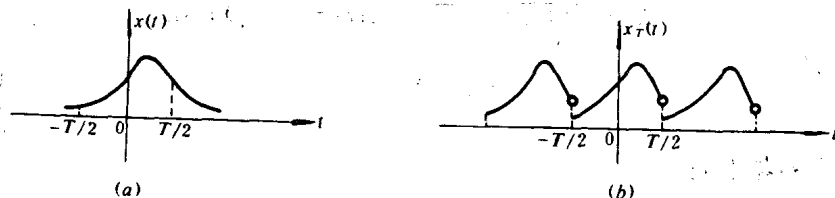


图 1.5

由 §1-1 知道

$$x_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(\omega_n) e^{i\omega_n t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n$$

其中

$$\omega_n = n\omega_0 = n\frac{2\pi}{T}; \quad \Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{2\pi}{T};$$

$$X_T(\omega_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-i\omega_n t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

令

$$X(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} X_T(\omega_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

则

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} x_T(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{T \rightarrow +\infty \\ \omega_n \rightarrow 0}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

从而得到了一对积分公式:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1-2-1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1-2-2)$$

这对积分公式反映了函数  $x(t)$  与函数  $X(\omega)$  之间的变换关系, 通常把  $X(\omega)$  叫做  $x(t)$  的富氏变换,  $x(t)$  叫做  $X(\omega)$  的逆富氏变换, 记作

$$X(\omega) = F[x(t)] \quad x(t) = F^{-1}[X(\omega)]$$

也可简单记为

$$x(t) \underset{\text{FT}}{\rightleftharpoons} X(\omega)$$

显然有下列基本关系:

$$F[F^{-1}[X(\omega)]] = X(\omega) \quad F^{-1}[F[x(t)]] = x(t) \quad (1-2-3)$$

从(1-2-2)式中可以看出,  $x(t)$  被分解成频率连续变化的谐波  $\frac{d\omega}{2\pi} X(\omega) e^{i\omega t}$  的叠加, 其中  $X(\omega)$  真正反映了由  $x(t)$  引起的不同频率的谐波的振幅和相位的变化, 因此  $X(\omega)$  称为  $x(t)$  的频谱函数。设

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{i \arg X(\omega)} \quad (1-2-4)$$

把  $|X(\omega)|$  叫做  $x(t)$  的振幅谱,  $\arg X(\omega)$  叫做  $x(t)$  的相位谱。这里  $\omega$  是从  $-\infty$  连续变化到  $+\infty$ , 所以振幅谱和相位谱都是连续频谱。

为了比较周期信号与非周期信号的频谱分析的区别与联系, 现小结如下:

$$\begin{array}{l}
 \text{周期信号} \left\{ \begin{array}{l} \text{工具: 富氏级数} \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega \\ X(\omega_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-i\omega_n t} dt \end{array} \right. \\ \text{频谱: 离散谱} \left\{ \begin{array}{l} \text{振幅谱 } |X(\omega_n)| \\ \text{相位谱 } \arg X(\omega_n) \end{array} \right. \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{array} \right.
 \end{array}$$

$T \rightarrow +\infty$

$$\begin{array}{l}
 \text{非周期信号} \left\{ \begin{array}{l} \text{工具: 富氏变换} \left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \end{array} \right. \\ \text{频谱: 连续谱} \left\{ \begin{array}{l} \text{振幅谱 } |X(\omega)| \\ \text{相位谱 } \arg X(\omega) \end{array} \right. \quad (-\infty < \omega < +\infty) \end{array} \right.
 \end{array}$$

## 二、频谱的基本性质

前面我们已经知道频谱与富氏变换有着密切的关系, 要研究频谱的基本性质, 也就是研究富氏变换的基本性质。下面我们约定所研究的函数都满足富氏变换的条件。

### 1. 线性叠加

若  $x_1(t) \xrightarrow{\text{FT}} X_1(\omega)$ ,  $x_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} X_2(\omega)$ , 则对任意常数  $c_1, c_2$  有

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega) \quad (1-2-5)$$

证明:  $\because F[c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)] e^{-i\omega t} dt$$

$$= c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-i\omega t} dt + c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega)$$

$\therefore c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \xrightarrow{\text{FT}} c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega)$  <证毕>

说明: 此性质在频谱分析中很重要, 因为实际中碰到的信号一般都是由单一信号叠加而成的。如地震记录  $x(t)$  可视为有效波  $s(t)$  与干扰波  $n(t)$  叠加而成。即  $x(t) = s(t) + n(t)$ , 由此性质可知频谱  $X(\omega) = S(\omega) + N(\omega)$ , 当振幅谱  $|S(\omega)|$  与  $|N(\omega)|$  互相分离时(见图 1.6), 就可适当选择滤波档, 压制干扰。

### 2. 对称性质

若  $x(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(\omega)$ , 则

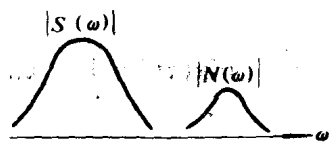


图 1.6