北京市自然科学基金委员会资助出版

经济、环境等非线性系统的预测和调控

田　瑾　项静恬　李宝慧　安新莉　著

中国统计出版社
China Statistics Press

经济、环境等非线性系统的预测和调控

田　瑾　项静恬　李宝慧　安新莉　著

中国统计出版社
China Statistics Press

(京)新登字 041 号

图书在版编目(CIP)数据

经济、环境等非线性系统的预测和调控/田瑾等著.
-北京:中国统计出版社,2001.9
ISBN 7-5037-3265-2

Ⅰ.经…
Ⅱ.田…
Ⅲ.随机非线性系统
Ⅳ.0211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 64228 号

作　　者/田瑾等
责任编辑/吕　军
封面设计/张建民
出版发行/中国统计出版社
通信地址/北京市西城区月坛南街 75 号　邮政编码/100826
办公地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号
电　　话/(010)63459084　63266600-22500(发行部)
印　　刷/科伦克三莱印务(北京)有限公司
经　　销/新华书店
开　　本/850×1168mm 1/32
字　　数/158 千字
印　　张/6.375
印　　数/1-3000 册
版　　别/2001 年 8 月第 1 版
版　　次/2001 年 8 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 7-5037-3265-2/O·36
定　　价/14.00 元

前　言

随着我国加入WTO步伐的临近，各行各业的领导决策者和实际工作人员都越来越迫切需要科学有效的现代数学工具和方法，以达到迅捷搜索信息、合理分析数据及准确预测调控的目的，北京市自然科学基金委员会和中国统计出版社不失时机地促成本书的问世，是为广大读者办了一件好事。

本书作者在20世纪90年代深入统计、经济、气象、地理等多领域参加实际课题，在分析各类非线性系统特性和需求的基础上，通过调研和创新，系统提炼出既有理论基础又能实用有效的数据分析方法并集成本书。全书共分六章，第一章提供了动态数据序列模拟和预测最基本最常用的模型工具；第二章系统介绍了分析判断波动数据周期间隔和数量的谱方法；第三章进述的季节调整程序能将复杂系统输出的非线性序列分解成几个简单序列分别实现模拟与预测；第四章讨论突变分析，其中的每一节都从不同角度给出了寻找突变点和转折处的新方法。第五章和第六章是九十年代最受关注的新成果，分别用综合和降维两个不同的手段对多输入多输出的非线性复杂系统实现信息加工、模拟预测和调控监测。该书由应用数学研究员、电算技术专家和经济统计工作者合作撰写，书中不仅包含九十年代多学科渗透的新方法新工具，而且对各种方法的讲述都做到有原理、有步骤、有程序、有实例，读者只需具备相当的数理统计基础就能读通方法并用于实际，本书不仅是各行各业数据分析专家的有效工具，亦可作为大专院校学生、研究生和教师的教材和参考。

作者感谢近十年来与作者协作研究的各学科专家、研究生和电算人员，他们为书中的方法和工具提供了有效的实例和分析；并

再次感谢北京市自然科学基金委员会和中国统计出版社领导，本书的问世离不开他们的支持和帮助；作者更感谢读者对本书的关爱，敬请读者对本书的错误和不足提供批评和指正。

作　者

2001 年 6 月

目　　录

第一章 时间序列时域分析—模拟与预测

时间序列时域分析,是七十年代初活跃并发展起来的一种动态数据参数化分析方法。它的主要手段,是对各类数据用相应的数学模型去近似描述,通过对于相应模型的研究分析,可以更本质地了解数据的内在结构和复杂特性,进一步达到由表及里控制规律和预测未来的目的。本章将介绍最常用的时间序列模型及其建模方法,所有这些模型在分析动态数据规律时都是有效而又得力的工具。

§1 时间序列线性模型[1]

线性模型是一种最基本的时间序列模型,它描述的主要对象是均值和方差不随时间变化的平稳序列。线性模型又是其它各类模型的基础,若欲成功描述数据复杂规律,首先需了解线性模型的形式、结构和建模方法。

§1.1 自回归模型 AR(p)

自回归模型 AR(p)是最常用的一种时间序列线性模型,它能描述现时刻数据与之前若干数据之间的线性依赖关系。

一、模型形式和模型优点

设时间序列$\{x_t\}$, $t=1,2,\cdots,N$ 平稳,零均值,且

$$x_t=\varphi_1 x_{t-1}+\varphi_2 x_{t-2}+\cdots+\varphi_p x_{t-p}+a_t \qquad (1.1.1)$$

式中 p 为正整数,$(\varphi_1,\cdots,\varphi_p)$为参数,$\{a_t\}$为零均值的白噪声序列,即满足

$$Ea_t = 0, \quad Ea_t a_s = \begin{cases} 1 & t = s \\ 0 & t \neq s \end{cases} \tag{1.1.2}$$

模型(1.1.1)中描述的是序列$\{x_t\}$自身某一时刻和前 p 个时刻之间的相互关系，因此当模型参数满足一定条件时，称(1.1.1)式为 p 阶自回归模型，记作$\{x_t\} \sim AR(p)$。

AR(p)模型形式简单、直观，而且便于建模与预报。当样本充分大时，随着阶数 p 的提高，AR(p)模型还可逼近 ARAM 等模型。由于这些优点和特性，AR(p)模型应用非常广泛。

二、AR(p)模型的参数估计

对(1.1.1)式两边乘 x_{t-l}, $l=1,2,\cdots,p$ 再求均值，即得关系式

$$Ex_t x_{t-l} = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j Ex_{t-j} x_{t-l} + Ea_t x_{t-l}, \quad l = 1,2,\cdots,p \tag{1.1.3}$$

式中，$Ex_{t-j}x_{t-l}$为序列$\{x_t\}$的自协方差函数 γ_{l-j}，且由$\{a_t\}$特性可以证明 $Ea_t x_{t-l} = 0$, $l > 0$，由上式则得

$$\gamma_l = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \gamma_{l-j} \quad l = 1,2,\cdots,p \tag{1.1.4}$$

自协方差函数$\{\gamma_l\}$可由样本$\{x_t\}$, $t=1,2,\cdots,N$ 来估计

$$\hat{\gamma}_l = \hat{\gamma}_{-l} = \frac{1}{N}\sum_{t=l+1}^{N} x_t x_{t-l}, \quad l = 1,2,\cdots,M, \quad M > p \tag{1.1.5}$$

因此(1.1.4)即为以 $\varphi_1,\cdots,\varphi_p$为未知数的 p 阶线性方程组，AR(p)模型的参数估计为

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{\varphi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_0 & \hat{\gamma}_1 & \cdots & \hat{\gamma}_{p-1} \\ \hat{\gamma}_1 & \hat{\gamma}_0 & \cdots & \hat{\gamma}_{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\gamma}_{p-1} & \hat{\gamma}_{p-2} & \cdots & \hat{\gamma}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \hat{\gamma}_p \end{bmatrix} \tag{1.1.6}$$

由于自相关函数 $\rho_l = \gamma_l/\gamma_0$，(1.1.6)式中 $\hat{\gamma}_l$ 即可用$\hat{\rho}_l$ 代替，且有 $\hat{\rho}_0 \equiv 1$，即得

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}=\begin{bmatrix}\hat{\varphi}_1\\ \hat{\varphi}_2\\ \vdots\\ \hat{\varphi}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1}\\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \cdots & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\rho}_1\\ \hat{\rho}_2\\ \vdots\\ \hat{\rho}_p\end{bmatrix} \tag{1.1.7}$$

由(1.1.6)和(1.1.7)式得到的 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 又称为 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 的 Yule - walker 估计。通常我们用递推算法求解模型参数 $\boldsymbol{\varphi}$，记 $\boldsymbol{\varphi}_k=(\varphi_{k1},\cdots,\varphi_{kk})$ 为 AR(k)模型参数，则随着阶数 k 的增加，由 AR(k)的 $\boldsymbol{\varphi}_k$ 可递推 AR(k 十 1)的 $\boldsymbol{\varphi}_{k+1}$：

$$\begin{cases}\varphi_{11}=\rho_1\\ \varphi_{k+1,k+1}=(\rho_{k+1}-\sum_{j=1}^{k}\rho_{k+1-j}\varphi_{kj})(1-\sum_{j=1}^{k}\rho_j\varphi_{kj})^{-1}\\ \varphi_{k+1,j}=\varphi_{kj}-\varphi_{k+1,k+1}\varphi_{k,k+1-j}, \quad j=1,2,\cdots,k\end{cases} \tag{1.1.8}$$

此算法运算次数与 k^2 成比例，快于消去法求解线性方程组，实用上非常方便。

三、模型定阶的判别准则

模型参数的估计是在给定模型阶数的前提下进行的，只有当模型阶数和参数全估计出来，模型识别的全过程才算完成，本节介绍三种最常用的阶数判别准则，它们适用于各类模型。

1.F—检验准则

F—检验实现时间序列模型的定阶，是多元回归因子筛选的直接推广，其主要思想如下。设指标 y 关于因素 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，有回归模型

$$y=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_rx_r+\varepsilon \tag{1.1.9}$$

为判别其中 s 个因素($s<r$)对于 y 的影响是否显著，可以借助于 F—检验准则。无妨设被检验的因子为 $x_{r-s+1},x_{r-s+2},\cdots,x_r$。

该问题等价于检验原假设 $H_0: a_{r-s+1}=\cdots=a_r=0$ 是否成立。令

$$A_0=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{a}_1^0x_{t1}-\cdots-\hat{a}_r^0x_{tr})^2 \tag{1.1.10}$$

$$A_1=\sum_{t=1}^{N}(y_t-\hat{a}_1x_{t1}-\cdots-\hat{a}_{r-s}x_{t,r-s})^2 \tag{1.1.11}$$

式中$\{y_t\}$,$\{x_{tj}\}$,$t=1,2,\cdots,N$,$j=1,2,\cdots r$ 为样本列,(1.1.10)和 (1.1.11)式分别为 r 个因子及 $r-s$ 个因子的残差平方和,则可计算检验统计量

$$F=\frac{A_1-A_0}{s}\bigg/\frac{A_0}{N-r} \tag{1.1.12}$$

F 服从自由度为 s 和 $N-r$ 的 F 分布,即 $F\sim F(s,N-r)$,对于预先给定的置信水平 α,由 F-分布表查出满足 $P(F\geqslant F_\alpha)$的 F_α(α 取 0.05 或 0.01),若算得的 F 大于 F_α 就拒绝原假设 H_0,即认为后 s 个回归因子 $x_{t-s+l},\cdots,x_r$ 对于指标 y 的影响是显著的;否则即认为不显著,可消去这 s 个因素。

运用上述思想,我们将用“过拟合”的手法确定时间序列模型阶数。以 AR 模型为例,如果 AR$(k+1)$的残差平方和不能比 AR(k)的有明显减少,则模型阶数可降为 k 阶。否则仍有升高可能,为此可得 AR(p)模型的 F—检验定阶准则:

设 $H_0:\varphi_{k+1}=0$,A_0 为 AR$(k+1)$模型的残差平方和,A_1 为 AR(k)模型的残差平方和:

$$A_0=\sum_{t=k+2}^{N}(x_t-\varphi_{k+1}x_{t-1}-\cdots-\varphi_{k+1,k+1}x_{t-k-1})^2 \tag{1.1.13}$$

$$A_1=\sum_{t=k+1}^{N}(x_t-\varphi_{k+1}x_{t-1}-\cdots-\varphi_{k,k}x_{t-k})^2 \tag{1.1.14}$$

则 $$F=\frac{A_1-A_0}{1}\bigg/\frac{A_0}{N-k-1} \tag{1.1.15}$$

当样本充分大时,$F\sim F(1,N-k-1)$,这里 $r=k+1$ 为总参数个数,$s=1$ 为被检验参数个数,若有 $F>F_\alpha$ 则 H_0 不成立,需继续升阶建模,否则即取最终模型阶数 $p=k$,即 AR(p)为合适模型。

本章介绍的其它时间序列模型均可用以上思想实现“过拟合”

的 F—检验法定阶。

2. 最小信息准则 AIC 和 BIC

用统计检验确定时序模型阶数的方法有两点不足之处,一是手段比较麻烦,二是置信度 α 的选取带有较大的人为性,为克服上述缺点,Akaike 给出了一个新的估计准则,此准则在模型参数极大似然估计的基础上,推导出最佳模型的参数和阶数应使以下统计量达到最小:

$$\mathrm{AIC} = N\log\hat{\sigma}_a^2 + 2s \tag{1.1.16}$$

式中 $\hat{\sigma}_a^2$ 为模型白噪声方差的估计, s 为独立参数个数。对于零均值自回归模型 AR(p),其独立参数为 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_p$ 和 $\hat{\sigma}_a^2$,因此 $s = p+1$。如果序列 $\{x_t\}$ 的均值非零,则 $s = p+2$。

用 AIC 准则定阶时,需在一定的阶数范围内由低至高地递推计算模型 AR(k)的参数 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k$ 和白噪声方差 $\hat{\sigma}_a^2(k)$。其中 $\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k$ 由(1.1.8)式递推, $\hat{\sigma}_a^2(k)$ 也可递推计算:

$$\hat{\sigma}_a^2(k) = (1-\hat{\varphi}_{kk}^2)\hat{\sigma}_a^2(k-1) = \prod_{j=1}^{k}(1-\hat{\varphi}_{jj}^2)\hat{\sigma}_a^2(0) \tag{1.1.17}$$

其中 $\hat{\sigma}_a^2(0) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(x_t - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x_t$ (1.1.18)

一般可将模型阶数范围经验地取为样本数 N 的比例(N 较小时)或 $\log N$ 的倍数(N 较大)。如果在上限处仍不能确定 AIC 最小值,应加大上限;如出现多个极小点,应对坑点相应模型作多方面比较(例如预报效果)再决定取舍。

由(1.1.16)式可见,AIC 信息量是模型拟合优度与模型参数个数的加权求和。通常模型拟合度的提高会导致模型参数的增多,反而因为模型复杂化而影响模型精度。而 AIC 准则体现了两方面的权衡,因而具有科学性。

AIC 准则也有不足之处,有人从理论上证明 AIC 准则选择的模型阶数偏高,因此 Akaike 提出 BIC 准则弥补其不足

$$\mathrm{BIC} = N\log\hat{\sigma}_a^2 + s\log N \tag{1.1.19}$$

式中各参数意义同于 AIC,对于 AR(p)模型,s 仍取 $p+1$ 或 $p+2$。

3. FPE 准则

与 AIC 及 F—检验准则不同,FPE 准则以模型的最终预报误差作为模型拟合优劣的标志。对于 AR(p)模型,其一步预报的误差为

$$x_t - \hat{x}_t = (\varphi_1 - \hat{\varphi}_1)x_{t-1} + \cdots + (\varphi_p - \hat{\varphi}_p)x_{t-p} + a_t \tag{1.1.20}$$

由推导可得一步预报误差方差的估计

$$\mathrm{FPE}p(x_t) = (1+\frac{P}{N})(1-\frac{P}{N})^{-1}(\hat{\gamma}_0 - \sum_{j=1}^{p}\hat{\varphi}_j\hat{\gamma}_j) \tag{1.1.21}$$

(1.1.21)式中,系数$(1+\frac{P}{N})(1-\frac{P}{N})^{-1}$随着 p 的增大而增大,$\hat{\gamma}_0 - \sum_{j=1}^{p}\hat{\varphi}_j\hat{\gamma}_j$ 开头随 p 增大而减小,当 p 小于 x_t 的真阶时,FPE 值呈下降趋势,而当 p 超过 x_t 的真正模型阶数后,理论上 $\hat{\gamma}_0 - \sum_{j=1}^{p}\hat{\varphi}_j\hat{\gamma}_j$ 就不会再减小了,因此使 $\mathrm{FPE}_p(x_t)$取最小值的那个 p 值即可判定为$\{x_t\}$的自回归模型阶数,相应的 $\hat{\varphi}_1, \cdots, \hat{\varphi}_p$ 即为模型参数的估计

四、AR(p)建模

对时间序列$\{x_t\}$, $t=1,2,\cdots,N$ 建立 AR(p)模型可由以下步骤来实现:

1. 数据的预处理(对处理后的序列建模)

AR(p)建模的前提条件是$\{x_t\}$为平稳零均值序列,为此在建模前对$\{x_t\}$需作如下处理:

① 零均值化处理:$\tilde{x}_t = x_t - \bar{x} = x_t - \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}x_t$ (1.1.22)

② 平稳性检验与平稳化处理:前者可参考有关文献[1],后者用本章第二节中的差分处理或函数变换。

2. 计算样本自协方差 $\hat{\gamma}_l$ 和自相关函数$\hat{\rho}_l$((1.1.5)式)

3. 在给定上限内递推 $\boldsymbol{\varphi}_k$ 和$\hat{\sigma}_a^2(k)$ ((1.1.8)和(1.1.17)式)

4. 计算 AIC(或 BIC 值) ((1.1.16)和(1.1.19)式)

5. 最小 AIC(或 BIC)值相应的阶数和参数即为所求。

§1.2 自回归滑动平均模型 ARMA(p,q)

一、模型形式

由(1.1)式知，AR(p)模型要求$\{a_t\}$为白噪声，有些情形，残差量 $x_t-\varphi_1x_{t-1}-\cdots-\varphi_px_{t-p}$虽不"白"，但能由白噪声的线性组合表示，即

$$x_t-\varphi_1x_{t-1}-\cdots-\varphi_px_{t-p}=a_t-\theta_1a_{t-1}-\cdots-\theta_qa_{t-q} \tag{1.1.23}$$

(1.1.23)式即为 ARMA(p,q)模型，且记 $x_t\sim$ARMA(p, q)，引进推移算子 B：

$$B^lx_t=B^{l-1}(Bx_t)=B^{l-1}(x_{t-1})=\cdots=x_{t-l} \tag{1.1.24}$$

且约定算子 B 的线性性和可加性，则(1.1.23)式可简化为

$$\varphi(B)x_t=\theta(B)a_t \tag{1.1.25}$$

式中 $\varphi(B)$和 $\theta(B)$为 B 算子多项式

$$\varphi(B)=1-\varphi_1B-\varphi_2B^2-\cdots-\varphi_pB^p \tag{1.1.26}$$

$$\theta(B)=1-\theta_1B-\theta_2B^2-\cdots-\theta_qB^q \tag{1.1.27}$$

约定 $\varphi(B)$和 $\theta(B)$无公共因子，并要求 $\varphi_p\neq0$ 和 $\theta_q\neq0$，以及

$$Ea_tx_{t-\tau}=Ex_{t-\tau}a_t=0 \quad \tau>0 \tag{1.1.28}$$

为方便起见，(1.1.25)式参量常用下列形式的向量来表示：

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_p)^\tau, \quad \boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_q)^\tau,$$

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\varphi}^\tau,\boldsymbol{\theta}^\tau)^\tau, \qquad \boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\beta}^\tau,\sigma_a^2)^\tau \tag{1.1.29}$$

$\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\theta}$ 分别为 ARMA(p,q)模型的自回归参数及滑动平均参数。AR(p)、(MA(q))是 ARMA(p,q)当 $q=0$($p=0$)的特殊情况。

二、模型的稳定性

模型的稳定性是模型系统输出量不会随时间推移而发散的保证。ARMA(p,q)模型能否具有稳定性，由模型的 B 算子多项式

根的分布而决定。

将(1.1.26)和(1.1.27)式的 $\varphi(B)$ 和 $\theta(B)$ 表成如下因式分解的形式：

$$\varphi(B)=(1-\lambda_1 B)(1-\lambda_2 B)\cdots(1-\lambda_p B) \quad (1.1.30)$$

$$\theta(B)=(1-\mu_1 B)(1-\mu_2 B)\cdots(1-\mu_q B) \quad (1.1.31)$$

式中 $\lambda_i, i=1,\cdots,p$ 和 $\mu_j, j=1,\cdots,q$ 为实数或共轭复数，其倒数分别为 $\varphi(B)=0$ 和 $\theta(B)=0$ 的根。

如果 $|\lambda_i|<1,\ i=1,\cdots,p$ 即 $\varphi(B)=0$ 的根全部在单位园外，则 ARMA(p,q)模型是稳定的，不等式中只要有一个不成立，则模型为不稳定的。类似地，模型可逆性充要条件为 $|\mu_j|<1, j=1,\cdots,q$。稳定性和可逆性是模型可物理实现和可预报的基本保证，$\lambda_i, i=1,\cdots,p$ 和 $\mu_j, j=1,\cdots,q$ 称为模型特征值。

三、建模实现

ARMA(p,q)的建模方法有多种，但涉及较多的的概念和较复杂的程序。这里介绍一种长自回归白噪化建模方法。该法的基本思想是以高阶自回归拟合的近似可靠性为依据，用 $\{x_t\}, t=1,2,\cdots,N$ 拟合长自回归模型 AR(p_N)，用该模型的白噪声 $\hat{a}_p,\cdots,\hat{a}_N$ 近似代表真正白噪声序列，并以 $\{x_t\}$ 和 $\{\hat{a}_t\}$ 为样本对模型参数 $(\boldsymbol{\varphi}^\tau,\boldsymbol{\theta}^\tau)$ 作线性最小二乘估计，此方法建模的具体步骤如下：

1. 对 $\{x_t\}$ 用§1.1(四)中的步骤 1～3 来建立高阶自回归模型 AR(p_N)，p_N 取 $\log N$ 的适当倍数。

2. 计 AR(p_N)模型参数估计为

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2,\cdots,\hat{\alpha}_{p_N})^\tau \quad (1.1.32)$$

计算 AR(p_N)模型线差 $\hat{a}_t$

$$\hat{a}_t=w_t-\sum_{j=1}^{p_N}\hat{\alpha}_j w_{t-j} \quad t=p_N+1,\cdots,N \quad (1.1.33)$$

$\{w_t\}$ 为 $\{x_t\}$ 预处理后的序列。

3. 检验 $\{\hat{a}_t\}$ 的独立性，若非独立，则加大 p_N 重新进行前面两步计算，否则进行下步。

4. 给定阶数 p 和 q，$\{w_t\}$ 和 $\{\hat{a}_t\}$ 视作样本，对线性模型

$$w_t = \varphi_1 w_{t-1} + \cdots + \varphi_p w_{t-p} - \theta_1 \hat{a}_{t-1} - \cdots - \theta_q \hat{a}_{t-q} + a_t \tag{1.1.34}$$

求参数 $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\varphi}^\tau, \boldsymbol{\theta}^\tau)^\tau$ 的线性最小二乘估计，即

$$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\varphi}^\tau, \boldsymbol{\theta}^\tau)^\tau = (A^\tau A)^{-1} A^\tau \boldsymbol{Y} \tag{1.1.35}$$

其中，$\boldsymbol{Y} = (w_{r+1}, \cdots, w_N)^\tau$，$r = \max(p, q) + p_N$ (1.1.36)

$$A^\tau = \begin{bmatrix} w_r & w_{r+1} & \cdots & w_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{r-p+1} & w_{r-p+2} & \cdots & w_{N-p} \\ a_r & a_{r+1} & \cdots & a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r-q+1} & a_{r-q+2} & \cdots & a_{N-q} \end{bmatrix} \tag{1.1.37}$$

5. 在给定的阶数上限内由 AIC 准则选择模型阶数 p、q，计算公式为

$$\text{AIC} = N\log\hat{\sigma}_a^2 + 2(p + q + 1) \tag{1.1.38}$$

其中 $\hat{\sigma}_a^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{t=r+1}^{N}(w_t - \hat{\varphi}_1 w_{t-1} - \cdots - \hat{\varphi}_p w_{t-p} + \theta_1 \hat{a}_{t-1} + \cdots + \theta_q \hat{a}_{t-q})^2$ (1.1.39)

§2 时间序列准线性模型

由§1知，线性模型所描述的对象是平稳序列，而实际数据往往不能满足这个条件。本节给出 ARMA 模型的拓广形式：ARIMA 模型和季节性乘积模型。这两种准线性模型能够模拟含有多项式趋势和确定性周期的非平稳序列，但理论基础和建模手段又都基于 ARMA 线性模型。

§2.1 自回归求和滑动平均模型 ARIMA(p, d, q)

一、差分处理

不少序列在一定时段内常呈增长或下降趋势，不能用 ARMA 模型描述，但有些序列经某种处理后可产生新的平稳序列，这种处理方法称之为差分运算。设$\{Z_t\}$为非平稳序列，令

$$w_t = \nabla Z_t = (1 - B)Z_t = Z_t - Z_{t-1} \tag{1.2.1}$$

如果新序列$\{w_t\}$为平稳序列，就称$\{Z_t\}$为经一次差分运算后平稳的准平稳序列，称∇为差分算子。当然有些序列需经多次差分才能平稳化，因此，一般地称∇^d为d阶差分算子（d为正整数）。

$$\nabla^d = (1 - B)^d = 1 - C_d^1 B + C_d^2 B^2 + \cdots + (-1)^{d-1} C_d^{d-1} B^{d-1} + (-1)^d B^d \tag{1.2.2}$$

式中B为推移算子，C_d^r为组合数，计算公式为

$$C_d^r = d!\ /(r!\ (d-r)!),\ r = 1, 2, \cdots, d-1 \tag{1.2.3}$$

二、ARIMA(p, d, q)模型

设$\{Z_t\}$为非平稳序列，存在正整数d使

$$\nabla^d Z_t = w_t,\ t > d \tag{1.2.4}$$

$\{w_t\}$是 ARMA(p, q)序列（即$w_t \sim$ ARMA(p, q)），这样的$\{Z_t\}$称作 ARMA 序列的d阶求和序列，（具有d阶多项式趋势），记作$Z_t \sim$ ARIMA(p, d, q)。Z_t可形式地表为

$$\varphi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)a_t,\ \ t > d \tag{1.2.5}$$

由上可见，ARIMA 模型是 ARMA 模型的推广，对于$\{Z_t\}$建立 ARIMA(p, d, q)模型，就是对$\{Z_t\}$作d阶差分后，对$w_t = \nabla^d Z_t$的序列$\{w_t\}$建立 ARMA(p, q)模型；$\{Z_t\}$进行预报和控制，则是先对$\{w_t\}$作预报、控制后再转化为对$\{Z_t\}$的处理。

§2.2 季节性乘积模型 ARIMA(P, D, Q)$_s \times$(p, d, q)

一、模型形式

有些序列往往带有确定性的周期数s，可以方便地用季节性乘积模型描述。