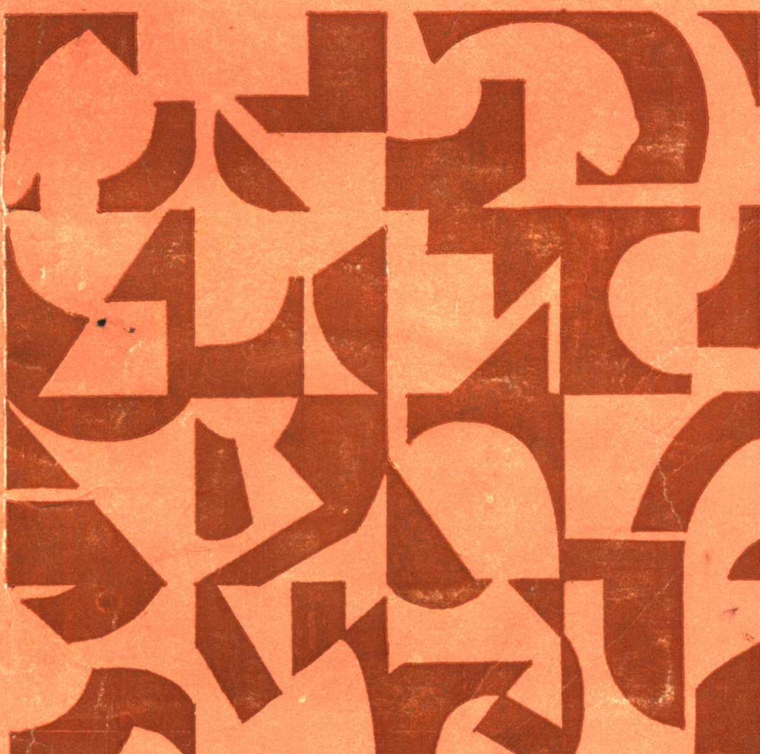
高等学校教材

新编高等数学基础

（下 册）



湖北教育出版社

高等学校教材

新编高等数学基础

黄守德　雷德秀　王大智　主编
赵根榕　胡迪鹤　　　　　主审

（下册）

湖北教育出版社

内 容 提 要

《新编高等数学基础》在1989年全国高等工科院校应用数学专业数学分析与高等代数教材审稿会上审定通过，作为高等工科院校各类多学时专业的高等数学及线性代数的教材。全书分上、中、下和“解题导引”四册。上册的内容为一元微积分与常微分方程，中册的内容为线性代数与空间解析几何，下册为多元微积分与无穷级数，“解题导引”是按教材章节编排的习题及解答。本册分“多元函数的微分学”、“多元函数的积分学”、“无穷级数”三章。

本书也可作为工程技术人员和数学爱好者的参考书。

新编高等数学基础
(下 册)
黄守德 雷德秀 王大智 主编
湖北教育出版社出版 新华书店湖北发行所发行
江西印刷公司排版 湖北省新华印刷厂印刷
850×1168毫米32开本 12.25印张 1插页 305 000字
1990年7月第1版 1990年7月第1次印刷
印数：1—4 100
ISBN 7—5351—0469—X/O·14
定价：3.30元

编 者 的 话

传统的微积分和线性代数课程分别以连续变量的极限运算和离散变量的代数运算为研究对象，它们虽然各有特点，但其内在联系却十分紧密．例如，极限法则一旦建立，便具有代数运算的特征．多元微积分运用向量和矩阵的方法处理，不但简单易懂，而且便于记忆和运用．我们按照微积分和线性代数内容的内在联系，并将常微分方程、场论结合在一起，编写了这套新体系的教材——《新编高等数学基础》．在一元微积分中，运用微分算符的（代数）运算性质建立积分的（形式）运算法则；在线性空间中，通过内积概念讨论了R^3空间中几何体的位置关系；在多元微分学中，用内积和矩阵微积的方法形式地处理了多元纯量函数及向量函数的微分问题，并用二阶偏导数组成的Hessean矩阵讨论了多元极值问题；在曲线积分与曲面积分中，以向量微分元与积分算符的形式运算给出曲线积分与曲面积分的定义，并解决了有关计算；在付里叶（Fourier）级数中，采用了内积记法，等等．这样以向量、矩阵为主线来处理微积分问题，观点新颖、推证简洁、运算准确、便于记忆和运用．

本书包含了国家教委工科数学教学指导委员会提出的《数学课程教学基本要求》中关于高等数学和线性代数的全部内容．书中标有＊号的内容可根据需要取舍．全部内容（包括习题课）可在230学时内授完．

在编写中，我们力求严谨准确、简明精炼、通俗易懂．为便于读者掌握高等数学的基本知识、基本运算和解决问题的基本能力，我们选配了一定数量的习题，专门编写了一本《新编高等数学基础解题导引》，书中的全部习题均有解答．习题中还选编了

近年来硕士研究生的部分入学试题解，供读者练习.

本书由武汉工学院、福州大学、长沙交通学院、西北大学联合编写. 西北大学赵根榕教授、武汉大学胡迪鹤教授对本书的编写工作给予了极大的支持，对原稿提出了许多宝贵意见. 西安交通大学游兆永教授、华中理工大学王能超教授对本书给予了很大的关心和鼓励. 编者所在的四所院校对教材编写和教学试验始终给予了热情关怀和支持. 显而易见，缺以上任何一方，本书的顺利出版是难以想象的. 寥寥数语，实在无法表达编者感激之情予万一.

本书虽经四校反复试教并参考国内外有关教材进行了数次修改，由于编者水平所限，一定还存在不少缺点和错误. 我们殷切希望使用本教材的师生和广大读者批评指正.

1989年10月

目　录

第八章　多元函数的微分学

8·1　多元函数……1
8·2　偏导数……11
8·3　全微分……20
8·4　矢量函数的导数……28
8·5　复合函数的微分法……37
8·6　隐函数的微分法……54
8·7　曲面与曲线……60
8·8　微分法的应用……84

第九章　多元函数的积分学

9·1　二重积分……116
9·2　三重积分……144
9·3　扩大……160
9·4　重积分的应用……165
9·5　曲线积分与曲面积分……180
9·6　高斯公式与斯托克斯公式……231
9·7　含参变量的积分……246
9·8　场论初步……258

第十章　无穷级数

10·1　无穷级数的概念与性质……303
10·2　数项级数……318

10・3　幂级数………………………………………… 333
10・4　付里叶（Fourier）级数……………………… 366

第八章　多元函数的微分学

前面七章，我们学习了一元函数微积分学及线性代数的知识．运用这些知识已能解决不少问题，但在实践中还会遇到大量多个变量的问题．因此，还需研究多个变量函数的微积分学．首先研究多个变量函数（又称多元函数）的微分学问题．

学习多元函数的微分学要将所学的概念、定理及处理问题的方法与一元函数的微分学中相应的概念、定理及处理问题的方法进行分析对比．这样能有助于对多元函数微分学的概念及方法的进一步理解，同时有助于加深和巩固已学过的一元微分学的相应知识．

8·1　多元函数

8·1·1　平面点集

有序实数对(x, y)●的集合，即

$$\{(x, y) | x \in R, y \in R\}$$

称为二维空间，记为R^2，二维空间R^2的子集叫做平面点集．

定义8·1若$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$是R^2中的任意两点，则称非负实数

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

为点P_1与P_2之间的距离，或记为$d(P_1, P_2)$．

● 起点在原点的向量称为向径，它完全由它的终点确定，考虑到这一点，我们称一个n元数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个点或是一个向量，点(x, y)可记为$\vec{P}$。

定义8·2 以点$P_0(x_0, y_0)$为中心，任意$r>0$为半径的圆内的所有点(x, y)，即

$$\{(x, y) | \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\}$$

称为点$P_0(x_0, y_0)$的圆形r邻域，简称r邻域．记为$\delta(P_0, r)$．点集

$$\{(x, y) \big| |x-x_0|<r, |y-y_0|<r\}$$

称为点$P_0(x_0, y_0)$的正方形r邻域．

这两种邻域只是形式不同，没有本质区别．

定义8·3 设D是一平面点集，P是平面点集的一点．

i) 若存在点P的某个r邻域$\delta(P, r)$，使$\delta(P, r) \subset D$，则称P是D的内点．

ii) 若在点P的任意邻域$\delta(P, r)$内，既有点属于D，又有点不属于D，则称点P是D的界点．D的所有界点的集合，称为D的边界．

iii) 若存在原点O的某个邻域$\delta(0, r)$，使$D \subset \delta(0, r)$，则称D为有界集，反之称为无界集．

定义8·4 若点集E的所有点都是E的内点，则称E为开集．开集E的余集．称为闭集．

定义8·5 设E是一个开集，若E内任意两个不同的点P、Q都可以用完全包含于E内的折线连接起来（即E是连通的），则称E为区域或开区域．开区域及它的边界所组成的集合，称为闭区域．

若不需指明区域的开闭性，则称E为区域．

8·1·2 二元函数的定义

定义8·6 设D为二维空间R^2中的非空子集，而B为数集．如果对于D中的每一点(x, y)，按照对应关系f都对应数集B中的唯一数z，则称对应关系f是定义在D上的二元函数．记为

$$f: D \longrightarrow B$$

点$(x,\ y)$对应的数z，称为函数f在点$(x,\ y)$处的值．记为$z=f(x,\ y)$．集D称为函数f的定义域，函数值的集合称为函数f的值域．记为

$$f(D)=\{z \mid z=f(x,\ y),\ (x,\ y)\in D\}$$

与一元函数相同，我们将二元函数

$$f: D \longrightarrow B(D\subset R^2,\ B\subset R^1)$$

记为

$$z=f(x,\ y)$$

例1 在二维空间中，我们可以用对应关系，如

$$f(x,\ y)=x^2+y^2,$$

定义函数f．若$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$，也可用对应关系

$$f(x,\ y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

定义函数f．

例2 求$\log(x^2-y^2)$的定义域．

解 定义域是满足条件

$$x^2-y^2>0,\ \text{即}\ |x|>|y|$$

的点的集合（如图8·1阴影部分所示）．

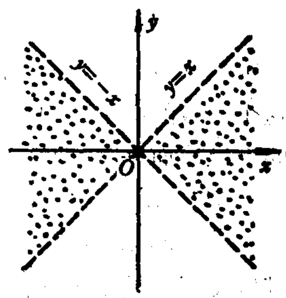


图 8·1

例3 求函数

$$z=\ln(y-2x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

的定义域．

解 由已给函数的表达式可知，自变量的取值必须同时满足下列不等式

$$\begin{cases} y-2x>0 \\ x\geqslant 0 \\ x^2+y^2<1 \end{cases}$$

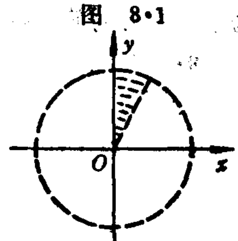


图 8·2

此不等式组表示了已给函数的定义域（如图8·2阴影部分所示）.

8·1·3　二元函数的几何意义

二元函数通常表示空间的曲面，点集

$$\{M(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y)\in D,\ z=f(x,\ y)\}$$

称为$z=f(x,\ y)$的图形（图8·3）.

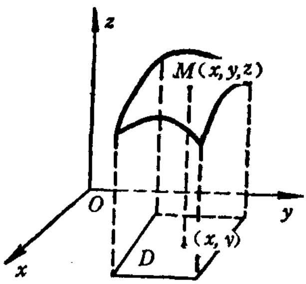


图　8·3

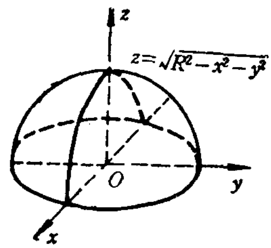


图　8·4

例4　函数

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

其定义域D为xy平面上的圆$x^2+y^2\leqslant R^2$. 这个函数的图形是中心在原点，半径为R的上半球面（图8·4）.

例5　函数

$$z=x^2+y^2$$

其定义域D是全平面. 函数的图形是位于xy平面上方的旋转抛物面（图8·5）.

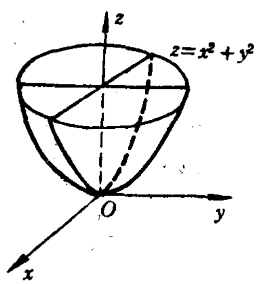


图　8·5

8·1·4　二元函数的表示法

一、公式法

前面例题中讨论的函数都是用公式表示的，如

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad z=x^2+y^2$$

二、表格法

例如，螺旋传动的效率η作为摩擦系数μ及螺旋角α的函数，

可列表如下：

η α μ	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$
0.01	0.897	0.945	0.961	0.970
0.02	0.812	0.895	0.925	0.941
0.03	0.743	0.850	0.892	0.914

三、几何法

作出空间直角坐标系，设已给函数

$$z=f(x,\ y)=f(P)$$

对于这个函数定义域D上的一点$P(x,\ y)$与它对应的函数值记为$z=f(x,\ y)=f(P)$. 我们就得到空间的一点$M(x,\ y,\ z)$. 这样，定义域D上每一点P对应空间的一点M. 这些点的全体一般地说形成了一个曲面，这个曲面称为$z=f(x,\ y)$的图形(如图8·3，图8·4，图8·5)，又称为$z=f(x,\ y)$的几何表示.

8·1·5　二元函数的极限和连续

一、二元函数的极限

定义8·7　设函数$f(x,\ y)$在点$P_0(x_0,\ y_0)$某一邻域内（点$P_0(x_0,\ y_0)$可以除外）有定义，若存在数A，对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且$(x,\ y)\neq(x_0,\ y_0)$时，恒有$|f(P)-A|<\varepsilon$，或$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$，则称A是函数$f(x,\ y)$在点$P_0(x_0,\ y_0)$的二重极限.

记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,\ y)=A$$

在这一定义中，点$P_0(x_0,\ y_0)$的方形邻域：

$$|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta$$

也可以换为点$P_0(x_0, y_0)$的圆形邻域

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

此时极限的定义可叙述为：

对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$0<d(P, P_0)<\delta$时，有$d(f(P), A)<\varepsilon$，则称$f(P)$在点P_0的极限是A. 记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A$$

二元函数极限$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$的几何意义是：任给正数$\varepsilon$，总存在点$P_0$的一个$\delta$邻域，在此邻域内（除点$P_0$外），函数$z=f(x, y)$的图形总在平面$z=A+\varepsilon$与$z=A-\varepsilon$之间.

例6 利用二重极限的定义证明下列各极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$　　　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to +\infty}}\dfrac{xy-1}{y+1}=3$

证 (1) 对任给$\varepsilon>0$，要使

$$|f(x, y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|$$

$$=\frac{x^2}{x^2+y^2}|y|<|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$$

只要取$\delta=\varepsilon$，则当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，恒有$|f(x, y)-0|<\varepsilon$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

(2) 对任给的$\varepsilon>0$，当$y>0$时，要使

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|=\left|\frac{xy-1-3y-3}{y+1}\right|$$

$$=\left|\frac{(x-3)y-4}{y+1}\right|\leqslant\frac{|x-3|y}{y+1}+\frac{4}{y+1}$$

$$<|x-3|+\frac{4}{y}<\varepsilon$$

只要取$0<\delta<\frac{\varepsilon}{5}$和$A>\frac{1}{\delta}$，则当$|x-3|<\delta$和$y>A$时，恒有

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|<|x-3|+\frac{4}{A}<\delta+4\delta=5\delta<\varepsilon$$

所以 $$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to+\infty}}\frac{xy-1}{y+1}=3$$

例7 证明下列极限不存在

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3xy}{x^2+y^2}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

证 (1) 考虑点(x, y)沿直线$y=kx$趋于$(0, 0)$，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{3k}{1+k^2}$$

右式的值不是确定的常数，它随直线$y=kx$中的斜率k而变，因此，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{3xy}{x^2+y^2}$$

不存在.

(2) 若取$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=-\frac{1}{n+1}$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim_{\substack{x_n\to 0\\ y_n\to 0}}(1+x_ny_n)^{\frac{1}{x_n+y_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n(n+1)}\right]^{n(n+1)}=\frac{1}{e}$$

若取$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=-\frac{1}{n+2}$，则

$$\lim_{\substack{x_n\to 0\\ y_n\to 0}}(1+x_ny_n)^{\frac{1}{x_n+y_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n(n+2)}\right]^{\frac{n(n+2)}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$不存在.

注意，在求多元函数极限时，特别要注意极限的存在性，若要证明极限不存在，只要找到一种$(x, y)\longrightarrow(x_0, y_0)$的方式，使极限不存在；或者找到两种方式，使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x, y)$ 存在，但两者不相等，都可断定$f(x, y)$在 $P_0(x_0, y_0)$处极限不存在.

二、二元函数的连续性

1.二元函数的连续性的定义

二元函数的连续性定义有三种不同形式：

定义8·8 （极限形式）如果函数$z=f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)的某一邻域上有定义，又$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x, y)$ 存在；且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x, y)=f(x_0, y_0)$$

则称函数$f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

定义8·9 （增量形式） 如果函数$z=f(x, y)$ 在点(x_0, y_0)的某一邻域上有定义，且

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)]=0$$

即$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$，则称函数$z=f(x, y)$在$(x_0, y_0)$处连续.

定义8·10 （ε-δ形式） 对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$时，恒有

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$$

则称函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处连续.

和一元函数一样，我们也研究二元函数在某一区域上的连续性.

定义8·11 若函数 $f(x, y)$ 在区域D的每一点都连续，则称

$f(x, y)$ 在D上连续.

连续函数的和、差、积仍为连续函数；分母不为零处，其商也是连续的；连续函数的复合函数仍是连续函数．二元连续函数的图形是一个无孔隙、无裂缝的曲面．例如连续函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad (x^2+y^2\leqslant 1)$$

的图形是球心在原点、半径等于1的上半球面.

与一元函数一样，函数的不连续点称为函数的间断点，二元函数与一元函数不同之处是：二元函数除有间断点外，有时还有间断线．例如函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{3xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0)\\[2ex] 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$$

当$x\longrightarrow 0$，$y\longrightarrow 0$时的极限不存在(即$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$不存在)，所以点$(0, 0)$是函数的一个间断点．又如函数$z=\dfrac{xy}{2x-y}$不仅有间断点$(0, 0)$，还有间断线$y=2x$.

我们通常所称的二元初等函数是指：可用x，y的一个数学式子表示的函数,这个式子分别由x，y的基本初等函数经过有限次四则运算与复合步骤所构成．可以证明二元初等函数$z=f(x, y)$在它的定义域上是连续的(证略)，即当$P_0(x_0, y_0)$属于函数的定义域时，我们有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$$

这就提供了对许多常见的二元函数求极限的方法.

例8 求 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} e^{-2xy}\sin\dfrac{x}{y}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}$

解 (1) 函数$\frac{3xy}{x^2+y^2}$在 (1, 2) 处连续，所以

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\frac{3xy}{x^2+y^2}=\frac{3\times 1\times 2}{1^2+2^2}=\frac{6}{5}$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} e^{-2xy}\sin\frac{x}{y}=0$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\pi}{4}$

2.连续函数的性质及其运算

定理8·1 (保号性) 若函数$f(x, y)$在开区域D内一点$P_0(x_0, y_0)$处连续，且$f(x_0, y_0)>0$，则存在以点$P_0(x_0, y_0)$为心的邻域S，使对任意一点$(x, y)\in S\cap D$，有$f(x, y)>0$.

定理8·2 (有界性) 若函数$f(x, y)$在有界闭区域D上连续，则函数$f(x, y)$在D上有界，即存在常数$M>0$，对任意一点$(x, y)\in D$，有$|f(x, y)|\leqslant M$.

定理8·3 (最大值，最小值) 若函数$f(x, y)$在有界闭区域D上连续，则函数$f(x, y)$在D上能取到最小值与最大值，即闭区域D上至少存在两点$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，对D上任意一点$P(x, y)$，有

$$f(x_1, y_1)\leqslant f(x, y)\leqslant f(x_2, y_2)$$

此定理的几何意义是：一张在有界闭区域D上的连续曲面，必定有最高点与最低点．使函数取得最大值与最小值的点可以在D的内部，也可以位于D的边界上．这里需要注意，此定理除要求函数连续外，还要求区域D是有界的、闭的．这两条缺一不可，否则其结论就不一定成立．例如，函数$z=\frac{1}{xy}$在有界区域D：$0<x<1$与$0<y<1$上连续．当动点(x, y)在D内趋于(0, 0)时，函数值$z=\frac{1}{xy}$趋于正无穷大．这说明若去掉D是闭的条件，函数在D