

轴测投影

理论与应用

（罗马尼亚） M·G·P·哲次郎 著
M·P·P·利斯郎 著



机械工业出版社

轴测投影理论与应用

[罗马尼亚] M·S·T·包太兹 著
N·P·米列斯库

李世铨 译

陆守道 校



机械工业出版社

本书共分三篇(十章),第一篇是总论,介绍轴测投影简介、平行投影特性、射影变换、几何变换和有关基础定理。第二篇是正轴测投影和斜轴测投影,阐述这两种轴测投影原理、基本参数关系、参数图解法和基本画法。第三篇是特殊轴测投影,介绍中心轴测投影、多维轴测投影和曲线轴测投影。

在附录中译者介绍了奥地利霍恩伯格的轴测投影新画法。

本书可供高等院校机械和建筑等专业的师生、研究生、以及从事设计绘图的专业人员参考。

AXONOMETRIA

Prof. dr. MIHAIL S. T. BOTEZ

Ing. NICOLAE P. MIRESCU

EDITURA TEHNICĂ 1970

轴测投影理论与应用

〔罗马尼亚〕 M. S. T. 包太兹
N. P. 米列斯库 著

李世铨 译

陆守道 校

责任编辑:刘小慧 责任校对:刘志文
封面设计:肖 暗 版式设计:霍永明
责任印制:张俊民

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ ·印张 $8^{1/4}$ ·字数 227 千字

1988年11月北京第一版·1988年11月北京第一次印刷

印数 0.001—4,100·定价:4.40元

ISBN 7-111-00625-9/TH·97

译 序

罗马尼亚包太兹教授和米列斯库工程师合著的这本书是继1953年苏联格拉祖诺夫与切特维鲁辛合著的《轴测投影学》^①之后又一本全面系统阐述轴测投影理论与应用的专著。该书不仅含有包太兹教授多年来的研究成果^②，而且还包括苏联学者40年代到60年代的重要论著，文中还引用了德、英、法、意、捷、比、奥等国家的有关文献，使本书成为一本内容丰富的著作。在内容上，如对高斯定理、波尔克—施瓦茨定理、魏斯巴赫公式、施莱米赫定理、舒尔定理、贝斯金定理、克鲁帕定理等都有新的论证；对缩比圆、缩比三角形、切特维鲁辛的完全图象理论，轴测投影变换以及多维轴测投影、中心轴测投影和曲轴轴测投影等增加了新的介绍材料。在论述方式上采用许多数学符号与文字配合，节省了很多篇幅。

译文尽量采用我国目前通用的术语，但也采用了新术语。译者还对原文中的错误作了更正，对原书中有些解释不够充分的地方，参照有关德文、俄文和日文文献作了适当补充（包括增加了插图）。

为了介绍较新的成就，译者还编译了奥地利格拉兹工业大学霍恩伯格教授提出的轴测投影新画法。

在本书的翻译过程中曾得到北京航空学院陈剑南教授的热情支持，并承蒙北京轻工业学院陆守道副教授予以校阅，在此一并表示感谢。

由于译者水平所限，译文如有不妥之处，敬请读者指正。

李世铨

一九八五年七月

^① 我国有中译本，人民教育出版社，1956。

^② 包太兹教授于1946年著有《画法几何应用》和《画法几何学》专著，于1952年著有《轴测投影变换与合成》一书，同年还在苏联杂志发表“轴测投影平面变换”论文等。

原 序

本书的编写意图是以初等数学形式阐述轴测投影平面模型的几何理论。书中只涉及欧几里得空间和具有实用意义的四维空间。

本书的叙述顺序是按轴测投影图的使用频率安排的。

为了便于参考罗马尼亚现有的理论书籍，需要一本象著者所写的《画法几何的应用》(Aplicatile Geometriei Descriptive, 1946, 罗马尼亚雅西)那样系统的文献综述。实际上本书也可以作为文献集锦。

在叙述方法方面，本书保持了传统形式。

本书可供用轴测投影理论和作图法解决实际问题的人使用，书中材料可作为高等院校教师讲授图学基础理论的参考，为大学生提供比较宽广的理论知识（这些内容在目前各工科专业教学中，由于课时减少而不能讲授）。此外，本书还可供设计工程师和研究院的有关研究人员参考。

著 者

本书所用符号

本书采用通用的数学符号和代号，以表示几何元素之间的各种关系和运算。

当用单个字母表示点、直线和平面时，如 A 、 $\bar{A}$ 和 (A) ，可将它们分别读作点 A 、直线 A 和平面 A 。不过在不会引起混淆的情况下，一般不使用这些符号，而只用字母表示。

表示各种几何关系的符号有：

$\parallel$ —— 平行， $\nparallel$ —— 不平行， $\dot{\parallel}$ —— 全平行， $\parallel$ —— 半平行， $\in$ —— 属于， $\notin$ —— 不属于。

$\Rightarrow$ —— 意即。

$\forall$ —— 全称符号， $\exists$ —— 存在符号。

$\simeq$ 读作等价或相等， $\mapsto$ 读作射影。

对于四维空间， $\perp$ 表示完全垂直，符号 $\perp$ 表示半垂直。

$\subset$ 和 $\not\subset$ 分别表示包含和不包含。 $\cap$ 表示相交。

可以认为一直线或平面上的点是一个集合。不含任何元素的集合叫做空集，用 $\emptyset$ 表示。

并集运算符号 $\cup$ 表示由某一个集合或另一集合或者两个集合的元素组成的一个新的集合。从几何观点出发，对这一含意稍作引伸将有利于本书的叙述。如 A 与 B “联合”定义一直线。写作 $A \cup B = \overline{AB}$ ，或 $A \cup \bar{\Delta} = (A, \Delta)$ 表示 A 点与 Δ 直线定义一平面。因此，通过两个点的联合，一点和一直线的联合等可以看作是由其定义的一个空间。

这个观点不会给读者造成任何混淆。

目 录

译序

原序

本书所用符号

第一篇 总 论

第一章 绪论	1
§ 1.1 简史	1
§ 1.2 投影	3
a. 平面上的平行投影	3
b. 中心投影	7
c. 直线和平面的中心投影	8
§ 1.3 共线四点的复比 调和分割	10
a. 复比	10
b. 中心投影的复比不变性	11
c. 用坐标函数表示四点的复比	12
d. 调和分割	13
e. 一般调和关系	14
f. 调和分割的几何作图	14
§ 1.4 几何变换	15
a. 一一对应	15
b. 对合	16
c. 双有理对应	16
d. 变换群	16
§ 1.5 单应变换	17
a. 单应变换关系式	17
b. 单应变换作图	18
c. 极限点的坐标	20
d. 基本性质	21
§ 1.6 透视性与单应性	21
a. 定义	21

b. 单应性作图	22
c. 直线的仿射变换	23
d. 相异直线的单应分割作图	24
e. 平面的单应变换	25
f. 具有二重直线的平面单应变换	26
g. 平面仿射变换	27
h. 平面透射对应	28
i. 平面透射对应作图	29
§ 1.7 共线共点基本定理	30
a. 梅内劳 (Menelaus) 定理	30
b. 谢瓦 (Ceva) 定理	31
c. 德扎尔格 (Desargues) 定理	32
d. 二仿射场的对应三角形	35
§ 1-8 高斯正轴测投影定理	37

第二篇 正轴测投影和斜轴测投影

第二章 正轴测投影	41
§ 2.1 轴测投影的基本问题	41
§ 2.2 笛卡尔坐标轴的轴测投影图	42
§ 2.3 缩短系数	45
§ 2.4 轴测投影的尺度	45
a. 度量单位	45
b. 轴测尺度作图法	46
§ 2.5 正轴测投影要素	46
a. 正轴测投影要素的基本关系	46
b. 缩短系数关系定理	48
c. 由与缩短系数成比例的三个已知量计算缩短系数	49
§ 2.6 轴测投影面截取坐标轴的长度	49
§ 2.7 坐标原点到轴测投影面的距离	50
§ 2.8 α 、 β 、 γ 角和距离 δ 的图解法	51
§ 2.9 轴测投影轴间角 ξ 、 η 、 ζ 和倾角 α 、 β 、 γ 之间的关系	52
§ 2.10 魏斯巴赫关系式的新等价式	53
§ 2.11 用轴测投影面到原点的距离 δ 和轴间角 ξ 、 η 、 ζ 为函数	

计算轴测投影三角形的边长	56
§ 2.12 轴测投影三角形与垂足三角形的边长与缩短系数 之间的关系	58
§ 2.13 缩比圆与缩比三角形	64
a. 缩比圆	64
b. 缩比三角形	68
§ 2.14 正轴测投影法分类	69
§ 2.15 笛卡尔坐标与轴测投影坐标的关系	73
第三章 基本参数作图法	74
§ 3.1 缩短系数角 α, β, γ 的作图法	74
§ 3.2 缩短系数作图法	75
§ 3.3 按与缩短系数成比例的 p, q, r 三数作轴测投影轴	76
§ 3.4 由已知的一个缩短系数角和一个轴测投影轴间角求作 其它缩短系数角和轴间角	79
a. 第一种情况	79
b. 第二种情况	80
§ 3.5 已知两个与缩短系数成比例的数求作轴测投影轴	81
§ 3.6 已知三条与缩短系数成比例的线段求原尺度单位	82
§ 3.7 已知两个缩短参数求作第三参数	83
第四章 正轴测投影图的作图法	85
§ 4.1 切氏完全图象理论	85
§ 4.2 确定完全图象必需的点数	88
§ 4.3 正轴测投影图的作图法	94
a. 任意点的轴测投影图	94
b. 求点到轴测投影面的距离	91
§ 4.4 直线的正轴测投影图	93
a. 一般直线	93
b. 垂直于一个坐标面的直线	94
c. 平行于一个坐标面的直线	94
§ 4.5 二直线的相对位置	95
a. 相交直线	95
b. 平行直线	95
§ 4.6 平面的正轴测投影图	96

a. 一般平面	96
b. 垂直于一个坐标面的平面	97
c. 平行于一个坐标面的平面	98
§ 4.7 二平面的相对位置	98
a. 平行平面	98
b. 作已知平面的平行面	98
c. 相交平面	99
§ 4.8 直线与平面的相对位置	101
a. 直线与平面平行	101
b. 直线与平面相交	101
§ 4.9 度量问题	102
a. 确定直线的实长	102
b. 一般平面向轴测投影面重合	103
c. 确定笛卡尔坐标面内直线的垂线	104
d. 指示椭圆	105
e. 平面的垂线	106
§ 4.10 圆的轴测投影图	114
a. 位于坐标面内的圆	114
b. 一般平面内的圆	115
§ 4.11 正轴测投影图的应用	116
第五章 斜轴测投影	118
§ 5.1 概述	118
§ 5.2 波尔克—施瓦茨定理	119
§ 5.3 仿射变换的解析表达式	121
a. 二维空间	121
b. 三维空间	123
c. 由三维到二维的变换	124
§ 5.4 斜轴测投影的基本关系	128
a. 投射方向与变形系数之间的关系	128
b. 变形系数间的第二基本关系	130
§ 5.5 投射方向角的图解法	133
§ 5.6 斜轴测投影的分类	134
a. 正面斜轴测投影	135

b. 军用透视	135
c. 卡瓦利尔轴测投影	135
§ 5.7 斜轴测投影图的画法	136
a. 点的斜轴测投影图	136
b. 直线的斜轴测投影图	136
c. 直线和平面相交	137
§ 5.8 卡瓦利尔轴测投影的基本定位问题	138
a. 点的投影	139
b. 直线的投影	140
c. 平面的投影	141
§ 5.9 垂直性	142
a. 预备作图	142
b. 在一个笛卡尔坐标面上作直角的方法	143
c. 平面的垂线	143
§ 5.10 重合法与圆的斜轴测投影	145
a. 直角对应定理	145
b. 圆的投影	146
c. 投射面的重合	147
d. 在投射面内的圆	149
e. 一般平面的重合	149
f. 斜轴测投影中的度量问题	151
第六章 轴测投影变换	155
§ 6.1 预备作图	155
§ 6.2 由斜轴测投影到正等测投影的变换	156
§ 6.3 由三测轴测投影到正面斜轴测投影的变换	158
§ 6.4 由蒙日投影图到轴测投影图的变换	159
a. 变换成正轴测投影图	159
b. 变换成斜轴测投影图	161
c. 由蒙日投影图作正轴测投影图	162
d. 由蒙日投影图变换成投影面为铅垂面的斜轴测投影图	163
e. 科洛托夫投影法	163
§ 6.5 用坐标变换作轴测投影图	166
a. 会交法	167

b. 用会交法从一图形的两面正投影图作轴测投影图	169
§ 6.6 将蒙日投影图变换为正面斜轴测投影图	169
§ 6.7 用射影变换作轴测投影图	171
§ 6.8 获得良好轴测投影图的必要条件	172
第七章 基本定位问题	175
§ 7.1 轴测投影图的画法	175
a. 按初始条件作轴测投影图	176
b. 直纹曲面的轴测投影图	177
c. 球的斜轴测投影图	178
§ 7.2 立体的平面截交线	178
a. 用仿射变换法作平面截交线	178
b. 用平行投影法作平面截交线	180
c. 用投射面法作平面截交线	180
d. 用重合坐标面法作平面截交线	181
§ 7.3 直线与曲面的交点	183
a. 直线与锥面相交	183
b. 直线与球面相交	184
c. 直线与不等轴椭圆面相交	185
d. 双曲抛物面的平面截交线	186
§ 7.4 表面相交	187
a. 求相贯线的一般方法	187
b. 用蒙日投影与轴测投影的变换作相贯线	189
c. 辅助曲面代换法	192
§ 7.5 有公共准线的抛物面	193
§ 7.6 应用举例	195

第三篇 特殊轴测投影

第八章 中心轴测投影	205
§ 8.1 中心投影要素	205
a. 解析关系式	205
b. 中心投影的基本作图	208
c. 垂直性	209
§ 8.2 重要定理	211

§ 8.3 射影对应	214
a. 二直线间的射影对应, 定义、定理	214
b. 配极对应, 定义、定理	214
§ 8.4 坐标轴在中心轴测投影中的图象	218
§ 8.5 贝斯基 (Бескин) 定理	220
§ 8.6 克鲁帕 (Крупа) 定理	223
§ 8.7 中心轴测投影系的图解作图法	225
a. 预备作图	225
b. 已知视距圆和一条轴线的灭点求作轴线	226
c. 已知非正常(灭线)三角形求作轴线	227
d. 刻度作图法	229
e. 切特维鲁辛中心轴测投影轴的作图法	230
§ 8.8 确定灭点(极限点)的坐标	233
§ 8.9 点的图象作图法	236
§ 8.10 基本常数与定向常数的关系	238
§ 8.11 立方体的图象作图法	242
第九章 多维轴测投影	245
§ 9.1 概述	245
a. 定义	245
b. 关联公理	246
§ 9.2 交	247
§ 9.3 垂直性和平行性	248
a. 垂直性	248
b. 平行性	248
§ 9.4 投影	249
a. 中心投影	249
b. 平行投影	249
c. 简比的平行投影	250
d. 波尔克 (Pohlke) 定理	250
§ 9.5 点的投影作图法	252
第十章 曲线轴测投影	253
§ 10.1 引言	255
§ 10.2 基本概念	255

a. 巴斯卡 (Pascal) 定理	255
b. 曲线坐标	257
§ 10.3 曲线透视	258
§ 10.4 曲线轴轴测投影坐标的作图法	259
a. 莱德麦斯特构形	259
b. 笛卡尔坐标系的曲线图象	261
§ 10.5 波尔克定理的推广	261
§ 10.6 曲线刻度	262
a. 用圆弧作轴线	262
b. 用二次曲线弧作轴线	264
附 录 不用辅助线画轴测投影图的方法	266
1. 中心反射	266
a. 直线的反射图	266
b. 空间坐标轴的反射图	267
2. 利用简图作坐标轴的反射图	268
3. 应用举例	268
4. 根据坐标画轴测图	269

第一篇 总 论

第一章 绪 论

§ 1.1 简 史

轴测投影画法最早出现在英国，它的奠基人是**威廉·费利什** (William Farish, 1759—1837)，他是英国剑桥大学的“杰克逊物理教授”。费利什在1820年的英国哲学学会“会刊”上发表了题为“论等测透视图”(On isometrical perspective)的论文。在这篇文章中尽管没有证明任何定律，但他指出了在三直三面角的平面上作物体的多面投影是不方便的，并明确提出了表现力较好的立方体的一面投影表示法。这就是从立方体一条对角线上的无穷远点，向一个垂直于该对角线的平面投影。这样便构成了等测轴测投影法。费利什还发表了一系列的研究成果，使这种投影法进一步得到完善。

与此同时，在这方面做出比较重要贡献的还有**焦范尼·科达扎** (Giovanni Codazza, 1816—1873)，他第一个为蒙日的画法几何学写出了新的篇章。考虑到问题的普遍性，他对轴测投影作了严格的几何证明，并且提出了适合绘制某些图形的方法。

对轴测投影理论的形成有过重要贡献的是**路德维希·伊乌里斯·魏斯巴赫** (Ludwig Julius Weisbach, 1806—1871)，在他的题为“单二测投影法和轴测投影法”(Die monodimetrische und axonometrische Projections Methode)的论文中，考虑到解析几何与画法几何间的密切关系，建立了一系列以他的名字命名的公式。

令人颇感兴趣的“轴测投影”的命名问题，直到很晚才被人发现。1852年迈尔 (M. Meyer) 首次使用了这个名称。一年以后，即1853年，卡尔·波尔克 (Karl. Pohlke) 便提出了以他自己的名字命名的定理，他当时是夏洛滕堡建筑科学院的副教授。这个定理是：“如果在一平面内给出三条交于一点的任意长度的直线 $O'L'$ ， $O'M'$ ， $O'N'$ ，则总可以认为这个图形是三直三面角棱线上的三等长线段 $OL=OM=ON$ 的平行投影”。

这个定理打开了研究斜轴测投影的道路。后来研究这个定理的人数是相当多的，其中必须提一下施瓦茨 (H. Schwarz)，他早在学生时代就为波尔克定理作了证明，证明得如此简捷雅致，使波尔克在自己的著作中也引用了它。

与此巧合，英国分析学者凯莱 (A. Cayley) 也对这个定理进行了研究。他的论文集第九卷 (Collected Papers IX) 第508~518页中有一篇题为“关于投影问题” (On a Problem of projection) 的文章，对波尔克定理作了解析证明。

意大利人威基 (S. Vecchi)，在1870年也为当时取得的轴测投影研究成果增添了新的内容。他按照正投影是平行投影的特殊情况，平行投影又是中心投影的特殊情况这一事实，将斜轴测投影与透视轴测投影连系起来。他在《综合工艺》期刊 (Il Politecnico) 第17、19和20卷上，发表了题为“透视轴测投影的证明” (Saggio di una prospettiva axonometrica) 和“关于透视轴测投影” (Sulla prospettiva axonometrica) 两篇论文，为透视轴测投影法奠定了基础。

在威基这两篇论文出版后不久，古多·豪克 (Guido Hauck) 于1876年发表了博士论文，题目是“透视画法的一般轴测投影理论的基本特性” (Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective)。在论文中他把正轴测投影公式扩展为透视轴测投影公式。这位数学家的其它著作具有理论联系实际的特点，为画法几何增添了新篇章。

最近二十年，苏联科学家们也积极从事这一教学部门的研究

活动。他们以大量的论文和专著使画法几何这一空间的平面几何模型面目一新，使轴测投影同样也有了新的发展。苏联的几何学家如贝斯基 (Н.М.Бескин)，切特维德辛 (Н.Ф.Четверухин)，扎帕利泽 (И.С.Джапаридзе)，哈尔杰耶夫 (Н.М.Халдеев) 等人在射影变换的应用方面和在推广到 n 维空间方面，以及为完善画法几何的这些专题理论方面做出了贡献。

1961年出版的瑞士洛桑大学教授德·吉本塔尔 (T.de Siebenthal) 的论文“论画法几何的革新” (Essai de rénovation de la géométrie descriptive) (载于《二十世纪数学》1961年第二卷)，他指出了画法几何是一个集合 E 变换为另一个集合 E' 的应用，因而可利用 E' 中的 A' 图象来描绘 E 中的 A 部分。作者将线性轴测投影表达法划分为 $R^m \rightarrow R^n$ 和 $R^3 \rightarrow R^2$ 两种类型，即射影轴测投影和透视轴测投影。他在1960年于洛桑大学工学院讲课中应用了这种表达法模型。

本学科的发展方向是以彭加雷 (Poincaré) 建立的“拓扑” (Analysis situs) 数学分支为基础，深入研究原理更广泛地推广几何学。当前演变成的数学分支“拓扑学” (Topology) 将对罗马尼亚学者产生影响。

上述这段简史很有局限性，当然是不够完整的。罗马尼亚学者在这个学科曾经作过一些尝试，但还没有做出重要贡献。

§ 1.2 投 影

1. 平面上的平行投影

设在空间有一平面 P ，一方向 Δ 和任意一点 A 。如果通过 A 点引一条与方向 Δ 平行的直线使它与平面 P 相交，则交点 a 就叫做 A 点沿 Δ 方向的平行投影。直线 Aa 叫做**投射线**，平面 P 叫做**投影面** (图 1)。

如果投影方向 Δ 与平面 P 垂直，这种投影就叫做**正投影**，否则叫做**斜投影**。

由平面 P 和方向 Δ 构成的一组元素叫做**平行投影系**。